

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



MATEMATIKA NA POHĽADNICIACH

BAKALÁRSKA PRÁCA

2014

Katarína IVANOVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

MATEMATIKA NA POHĽADNICIACH

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika  
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika  
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
Vedúci práce: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.



Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

---

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Katarína Ivanová  
**Študijný program:** ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** 9.1.9. aplikovaná matematika  
**Typ záverečnej práce:** bakalárska  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský

**Názov:** Matematika na pohľadniciach / *Mathematics on postcards*

**Cieľ:** Bakalárske práce z predchádzajúcich rokov [Ďuratná, 2011], [Trajová, 2012], [Mészárosová, 2013] obsahovali motivačné príklady založené na ukázkach z filmmov a románov. V tejto práci budú podobným spôsobom spracované témy zobrazené na pohľadniciach, napríklad fraktály, geometria, rôzne témy na pohľadniciach vydaných pri príležitosti Svetového roku matematiky a pod.

**Vedúci:** RNDr. Mgr. Beáta Stehlíková, PhD.  
**Katedra:** FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
**Vedúci katedry:** prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.  
**Dátum zadania:** 18.10.2013

**Dátum schválenia:** 14.11.2013  
doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.  
garant študijného programu

.....  
študent

.....  
vedúci práce

**Pod'akovanie** Touto cestou úprimne ďakujem svojej vedúcej bakalárskej práce RNDr. Beáte Stehlíkovej, PhD. za trpezlivé vedenie, cenné rady a usmernenia pri tvorbe tejto práce. Ďakujem tiež mojej rodine a priateľom za podporu a trpezlivosť.

## Abstrakt

IVANOVÁ, Katarína: Matematika na pohľadniciach [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava, 2014, 69 s.

Práca spracováva témy zobrazené na pohľadniciach podobným spôsobom ako bakalárske práce z minulých rokov, ktoré obsahovali motivačné príklady založené na ukážkach z filmov a románov. Obsahuje úlohy z niekoľkých matematických súťaží, základné algoritmy na riešenie bludísk, geometriu a fraktály. Cieľom tejto práce je prostredníctvom pohľadníc priblížiť matematiku bežnému čitateľovi a ozrejmiť ich matematické pozadie.

**Kľúčové slová:** matematická olympiáda, Putnamova súťaž, bludisko, fraktály, Mandelbrotova množina

## Abstract

IVANOVÁ, Katarína: Mathematics on postcards [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava, 2014, 69 p.

The thesis deals with themes shown on postcards in a similar way as bachelor theses from the previous years, which included motivational examples based on the excerpts from films and novels. It contains problems from several mathematical competitions, basic algorithms for maze solutions as well as geometry and fractals. The aim of this work is to describe mathematics to an ordinary reader and clarify the mathematical background through postcards.

**Keywords:** mathematical olympiad, Putnam Competition, maze, fractals, Mandelbrot set

# Obsah

Úvod	8
<b>1 Matematická olympiáda</b>	<b>9</b>
1.1 Medzinárodná matematická olympiáda . . . . .	9
1.2 Putnam Competition . . . . .	12
1.3 Odpoveď, ktorú hľadáme . . . . .	20
1.4 Talianska olympiáda v Cesenaticu . . . . .	22
<b>2 Fraktály</b>	<b>27</b>
2.1 Fraktálna geometria . . . . .	27
2.1.1 Kochova vložka . . . . .	29
2.1.2 Sierpinského trojuholník . . . . .	30
2.2 Mandelbrotova množina . . . . .	31
2.2.1 Mandelbrotova množina v programe Mathematica . . . . .	39
2.3 Fraktály okolo nás . . . . .	45
<b>3 Bludiská</b>	<b>47</b>
3.1 Niečo málo z histórie . . . . .	47
3.2 Katedrála v Chartres . . . . .	49
3.2.1 Geometria v katedrále . . . . .	50
3.3 Algoritmy na riešenie bludísk . . . . .	53
3.3.1 Hľadanie cesty . . . . .	54
<b>Záver</b>	<b>63</b>
<b>Zoznam použitej literatúry</b>	<b>64</b>

## Úvod

Matematika je všade okolo nás. Výnimkou nie sú ani pohľadnice. Komunikačný prostriedok, ktorý je v tejto dobe využívaný už podstatne menej ako v minulom storočí. Ručne písaná korešpondencia je postupne vytlačaná modernými spôsobmi komunikácie, ktoré nie sú cudzie takmer žiadnej vekovej kategórii. Napriek tomu môžeme matematiku objaviť aj na takomto, pre mnohých nezvyčajnom, mieste.

Pohľadnice sú posielané ako pripomienka mnohých významných udalostí života. Taktiež sú vytvárané s tým istým úmyslom - slúžiť ako spomienka na niečo, čo sa nám zapáčilo alebo nás nejakým spôsobom oslovilo. Výnimkou nie sú ani výročia rôznych podujatí. Preto by malo byť samozrejmosťou, že matematika zasahuje aj do tejto oblasti ľudskej komunikácie.

V tejto práci predstavíme práve také pohľadnice, ktoré poukazujú na matematické vnímanie sveta alebo pripomínajú významné stretnutie matematickej komunity. Cieľom tejto práce je poukázať na fakt, že matematika je súčasťou života každého človeka. Následne ukázať, koľko matematiky sa môže skrývať za obyčajnou pohľadnicou a priblížiť tieto poznatky aj bežnému čitateľovi.

Práca je rozdelená do troch kapitol. Ústrednou témou prvej kapitoly je pohľadnica, ktorej popis uvádzal, že sa jedná o matematickú olympiádu. Z tohto dôvodu je kapitola zameraná na riešenie príkladov z medzinárodných matematických olympiád a školských súťaží. V druhej kapitole priblížime vizuálne zaujímavé objekty - fraktály. Podrobnejšie sa v tejto časti budeme venovať známej Mandelbrotovej množine. Tretia kapitola obsahuje poznatky o bludiskách. Tiež sa v nej pozrieme na rôzne možnosti, ako sa z bludiska dostať von alebo ho celé preskúmať.



# 1 Matematická olympiáda

V tejto kapitole si predstavíme niekoľko matematických súťaží, ktoré sa zvyknú každoročne konať po celom svete. Dôvodom nášho záujmu je pohľadnica, ktorá je na obrázku 1. K tejto pohľadnici bol uvedený popis: *The 26th Mathematics Olympiad, 1946, Princeton, NJ*. Preto sme sa rozhodli nájsť súťaž, ktorá sa konala práve v tomto roku. Prvé úvahy nás viedli k medzinárodnej matematickej olympiáde (IMO - International Mathematical Olympiad), ale tiež aj k súťaži Putnam, ktorá sa v tomto roku konala. Ukážeme preto aj riešenia niektorých vybraných príkladov z týchto súťaží a objasníme, čo sa vlastne na našej pohľadnici nachádza.



**Obr. 1:** Pohľadnica: Podľa popisu príjemcu - *The 26th Mathematics Olympiad, 1946, Princeton, NJ*. [46]

## 1.1 Medzinárodná matematická olympiáda

Medzinárodná matematická olympiáda je určená pre študentov stredných škôl. Od roku 1959, kedy sa tieto majstrovstvá sveta v matematike prvýkrát uskutočnili v Rumunsku, sa každoročne stretávajú študenti v inej hostiteľskej krajine. Na prvom takomto stretnutí sa zúčastnilo len 7 krajín. Boli to Bulharsko, Československo, Rumunsko, Východné Nemecko, Poľsko, Maďarsko a Sovietsky zväz, ako uvádza [23]. Podľa [57]

bola pôvodne táto súťaž organizovaná iba pre krajiny východnej Európy vzhľadom na rozdelenie Európy na Východný a Západný blok. Každým rokom pomaly narastal aj počet zúčastnených krajín.

Vzhľadom na to, že sa táto olympiáda začala organizovať až od roku 1959, určite k nej teda nemôže patriť naša pôvodná pohľadnica. Napriek tomu si uvedieme ukážku príkladu z tejto olympiády, a to úplne prvého príkladu v histórii medzinárodnej matematickej olympiády. [23] K miestu konania tejto súťaže patrí aj takáto pohľadnica hostiteľskej krajiny - Rumunska na obrázku 2.



Obr. 2: Pohľadnica: Súčasnú Rumunsko, miesto konania prvej IMO.[49]

**IMO, príklad 1 z roku 1959:**

Dokážte, že zlomok  $\frac{21n + 4}{14n + 3}$  je pre každé prirodzené číslo  $n$  uvedený v základnom tvare.

[23]

**Riešenie:**

Na prvý pohľad to tak možno nevyzerá, ale dajú sa nájsť celkom jednoduché riešenia tohto problému, ktoré sú uvedené v [54].

Prvý spôsob využíva nasledovné vlastnosti deliteľa. Ak  $d$  delí dve celé čísla, potom delí aj ich násobky, ich súčet a rozdiel. Keďže platí:

$$3(14n + 3) - 2(21n + 4) = 1,$$

potom spoločný deliteľ čitateľa a menovateľa tiež delí 1. Z tohto dôvodu zlomok  $\frac{21n + 4}{14n + 3}$  nemôže byť zjednodušený. Teda najväčší spoločný deliteľ čitateľa aj menovateľa zlomku je 1 a zlomok je v základnom tvare.

Druhým možným spôsobom nájdenia riešenia podľa [54] pre túto úlohu je aj známy Euklidov algoritmus.<sup>1</sup> Čitateľa  $21n + 4$  predelíme menovateľom  $14n + 3$ . Výsledkom je 1 a zvyšok  $7n + 1$ . Zapišeme to takto:

$$\frac{21n + 4}{14n + 3} = 1 + \frac{7n + 1}{14n + 3}.$$

V druhom kroku urobíme rovnakú operáciu s výrazmi  $14n + 3$  a  $7n + 1$ . Dostávame:

$$\frac{14n + 3}{7n + 1} = 2 + \frac{1}{7n + 1}.$$

Pokračujeme podobne s výrazom  $7n + 1$  a zvyškom 1.

$$\frac{7n + 1}{1} = (7n + 1) + 0.$$

Ďalej dostávame  $nsd(1, 0)$ , čo je rovné 1. Teda vidíme, že najväčší spoločný deliteľ čitateľa a menovateľa je práve 1. Preto je daný zlomok uvedený v základnom tvare.

---

<sup>1</sup>Pripomeňme si podľa [8] Euklidov algoritmus na nájdenie najväčšieho spoločného deliteľa dvoch čísel. Ako vstup slúžia nezáporné celé čísla  $a$  a  $b$ . Ako výstup dostaneme najväčšieho spoločného deliteľa čísel  $a$  a  $b$  ( $nsd(a, b)$ ).

Algoritmus:

1. Súčasne nahraď  $a$  za  $b$  a  $b$  zvyškom z delenia  $a$  a  $b$ .
2. Opakovať tento krok, až kým sa  $b$  nerovná 0.
3. Výsledok: najväčší spoločný násobok je  $a$ .

Správnosť tohto algoritmu vyplýva z nasledovných vlastností najväčšieho spoločného deliteľa:  $nsd(a, b) = nsd(b, a)$ ,  $nsd(a, b) = nsd(a, b - ka)$ , kde  $k$  je celé číslo a  $nsd(a, 0) = a$ .

## 1.2 Putnam Competition

Medzi ďalšie matematické súťaže patrí aj súťaž Williama Lowella Putnama, ktorá je určená pre vysokoškolákov v Kanade a Spojených štátoch amerických. Prvá Putnamova súťaž sa konala v roku 1938. Jej historické pozadie vzniku sa podľa [19] však datuje už do roku 1933, kedy sa pod záštitou Elizabeth Lowell Putnam, manželky zosnulého Williama, uskutočnila matematická súťaž medzi desiatimi študentmi Harvardu a desiatimi študentmi United States Military Academy. Súťaž sa vydarila lepšie, ako sa predpokladalo, a preto sa plánovalo každoročne v nej pokračovať. Plán sa podarilo naplno zrealizovať až v roku 1938, kedy sa uskutočnila prvá oficiálna Putnamova súťaž. Súťažiteľ sa dalo ako v tímoch tak aj individuálne. Samozrejme, nechýbali ani ceny pre víťazov vo forme peňažnej odmeny.

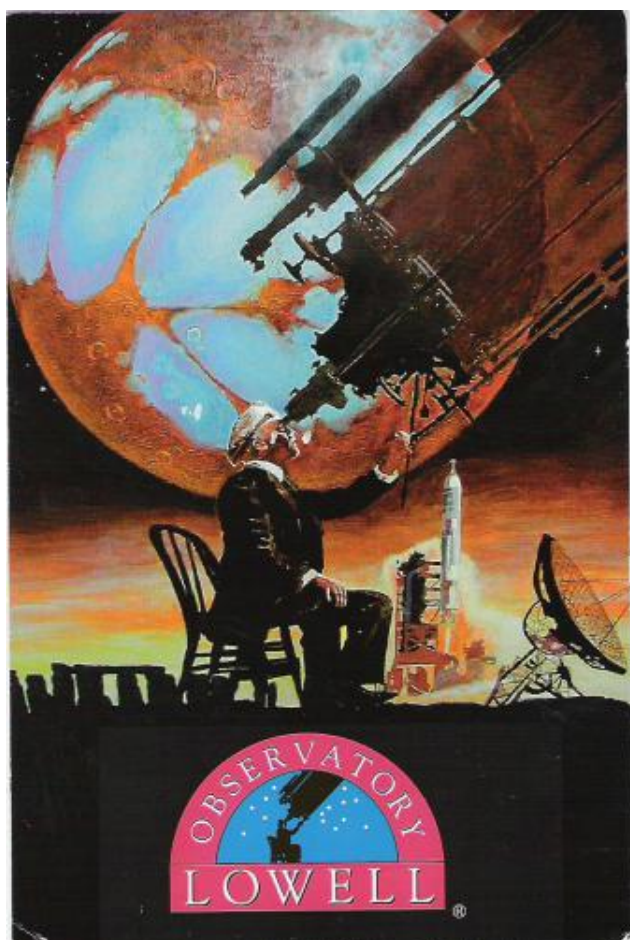
William však nebol jedinou známou osobnosťou v rodine. Elizabeth mala totiž dvoch bratov a jednu sestru, ktorí sa preslávili v oblasti svojho pôsobenia. Percival Lowell bol astronómom a zakladateľom Lowellovho observatória vo Flagstaffe. Abbott Lawrence Lowell sa zase stal prezidentom Harvardu a Elizabethina sestra Amy Lowell bola slávnou poetkou. [67] Na obrázku 3 vidíme aj pohľadnicu Lowellovho observatória vo Flagstaffe.

Súťaž Putnam sa síce konala v spomínanom roku 1946, ale bol to len deviaty ročník, teda nešlo o dvadsiaty šiesty ročník, takže ani táto možnosť nám nedáva odpoveď na našu otázku, z akej olympiády je naša pohľadnica.

V tejto časti si vyberieme niekoľko príkladov z minulých ročníkov Putnamovej súťaže. Ukážeme si jednoduchšie príklady, ale aj tie zložitejšie. Táto skúška je totiž notoricky ťažká. Na stránke seminára pripravujúceho študentov Stanfordu na Putnamovu súťaž [59] sa dočítame, že vo väčšine rokov je medián skóre 0, ale v posledných rokoch sa stala súťaž trochu jednoduchšou s mediánom 1.

Zadanie tejto súťaže pozostáva zo šiestich príkladov v doobedňajších hodinách a šiestich príkladov poobede. Za každý vyriešený príklad je možné získať od 0 do 10 bodov. Na získanie plného počtu bodov je potrebné poskytnúť riešenie so všetkými

potrebnými krokmi, ktoré sú nutné na vyriešenie príkladu, ako sa píše na stránke Putnamovej súťaže [67]. Zámerne sa piaty a šiesty problém zdajú byť náročnejšie ako tie ostatné, ale dôležitým faktorom je aj zostávajúci čas, keďže na vyriešenie každej sady šiestich úloh sú k dispozícii tri hodiny. V rozmedzí rokov 1974-2012 sa vyskytli dva problémy, v ktorých nikto z prvých dvesto<sup>2</sup> najlepších nezískal kladné skóre. Bol to príklad A6 z roku 1979 a príklad B6 z roku 2011. [19] Uvedieme preto aj na jeden takýto problém a jeho riešenie. Ukážeme si však aj riešenie príkladov z prvej polovice, ktoré sú považované za jedny z tých ľahších.



Obr. 3: Pohľadnica: Lowellovo observatórium vo Flagstaffe.[51]

Najprv sa zameriame na príklady z už spomínaného roku 1946, ktorých zadanie aj riešenie nájdeme v [20]. Podľa výsledkov [31] sa v tomto roku stali víťazmi študenti z

<sup>2</sup>Časopis The American Mathematical Monthly, publikujúci každý rok zadania a riešenia príkladov zo súťaže, uvádza bodový zisk 200 najlepších riešiteľov. Podobne knihy [20], [1], v ktorých sú zozbierané príklady z viacerých rokov.

Univerzity v Toronte. Na obrázku 4 je zobrazená *University Avenue, Toronto, Ontario, 1939*.



Obr. 4: Pohľadnica: University Avenue, Toronto, Ontario, 1939. [37]

### Putnam, príklad A1 z roku 1946

Nech  $p(x)$  je reálny polynóm stupňa menšieho ako 3 a spĺňa  $|p(x)| \leq 1$  pre  $x \in [-1, 1]$ . Ukážte, že potom  $|p(x)| \leq 4$  pre  $x \in [-1, 1]$ . [20]

#### Riešenie:

Postupujeme podľa [20]. Keďže  $p(x)$  je reálny polynóm stupňa menšieho ako 3, spĺňa predpis  $p(x) = ax^2 + bx + c$ . Jeho derivácia je  $p'(x) = 2ax + b$ . Derivácia polynómu  $p(x)$  je teda lineárna funkcia, a tak dosahuje svoje maximum aj minimum na uzavretom intervale  $[-1, 1]$  v jednom z koncových bodov. To isté platí aj pre maximum absolútnej hodnoty  $p'(x)$ . Pre derivácie v krajných bodoch súčasne platí:

$$p'(1) = 2a + b,$$

$$p'(-1) = -2a + b.$$

Preto  $\max_{x \in [-1, 1]} |p'(x)| = |2a + b|$  alebo  $\max_{x \in [-1, 1]} |p'(x)| = |-2a + b| = |2a - b|$ .

Teraz funkčné hodnoty derivácií v bodoch 1 a  $-1$  vyjadríme ako kombináciu funkčných hodnôt  $p(1)$ ,  $p(-1)$  a  $p(0)$ , pre ktoré platí:

$$\begin{aligned} p(1) &= a + b + c, \\ p(-1) &= a - b + c, \\ p(0) &= c. \end{aligned}$$

Platí:

$$2a + b = \frac{3}{2}(a + b + c) + \frac{1}{2}(a - b + c) - 2c,$$

čo znamená, že

$$p'(1) = \frac{3}{2}p(1) + \frac{1}{2}p(-1) - 2p(0).$$

Podobne

$$2a - b = \frac{1}{2}(a - b + c) + \frac{3}{2}(a - b + c) - 2c,$$

čiže

$$p'(-1) = \frac{1}{2}p(1) + \frac{3}{2}p(-1) - 2p(0).$$

Z tohto dostaneme ohraničenie pre absolútne hodnoty, pričom využijeme predpoklad  $|p(x)| \leq 1$ :

$$\begin{aligned} |p'(1)| &= |2a + b| \leq \frac{3}{2}|p(1)| + \frac{1}{2}|p(-1)| + 2|p(0)| \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 2 = 4, \\ |p'(-1)| &= |2a - b| \leq \frac{1}{2}|p(1)| + \frac{3}{2}|p(-1)| + 2|p(0)| \leq \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 2 = 4, \end{aligned}$$

a teda

$$\max_{x \in [-1, 1]} |p'(x)| = \max \{|p'(1)|, |p'(-1)|\} \leq 4.$$

Teraz ukážeme štvrtý príklad z poobedňajšieho stretnutia a jeho riešenie. Budeme sa riadiť zadaním a riešením z [20].

### Putnam, príklad B4 z roku 1946

Pre každé celé kladné číslo  $n$  majme

$$p_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, P_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, h_n = \frac{2p_n P_n}{p_n + P_n}.$$

Dokážte, že  $h_1 < h_2 < \dots < h_n < \dots$ , t.j., že postupnosť je rastúca.

**Riešenie:**

Postupnosť  $h_n$  má kladné členy, preto jej rastúcosť je ekvivalentná s rastúcosťou postupnosti logaritmu  $\ln h_n$ . Rastúcosť  $h_n$  teda dokážeme tak, že dokážeme rastúcosť  $\ln h_n$ . Pred výpočtom logaritmických členov  $h_n$  potrebujeme upraviť výraz definujúci  $h_n$  na súčin členov. Robíme preto tieto úpravy:

$$\begin{aligned} h_n &= \frac{2(1 + \frac{1}{n})^n(1 + \frac{1}{n})^{n+1}}{(1 + \frac{1}{n})^n + (1 + \frac{1}{n})^{n+1}} = \frac{2(n+1)^{2n+1} \frac{1}{n^{2n+1}}}{\frac{n(n+1)^n + (n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}} = \frac{2(n+1)^{n+1}(n+1)^n \frac{1}{n^{n+1}n^n}}{\frac{(n+1)^n(2n+1)}{n^{n+1}}} \\ &= 2(n+1)^{n+1}n^{-n}(2n+1)^{-1} \end{aligned}$$

Dostali sme teda vyjadrenie pre postupnosť  $h_n$  v požadovanom tvare súčinov, pomocou ktorého vyjadríme

$$\ln h_n = \ln 2 + (n+1) \ln(n+1) - n \ln n - \ln(2n+1).$$

Ďalej definujeme funkciu  $g$  s definičným oborom  $(0, \infty)$  tak, aby platilo, že  $\ln h_n = g(n)$ :

$$g(x) = \ln 2 + (x+1) \ln(x+1) - x \ln x - \ln(2x+1).$$

Ak dokážeme, že funkcia  $g$  je rastúca, bude z toho špeciálne vyplývať, že

$$g(1) < g(2) < \dots,$$

t.j.

$$\ln h_1 < \ln h_2 < \dots,$$

z čoho už vyplýva rastúcosť postupnosti  $h_n$ .

Vypočítame derivácie:

$$g'(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{2}{2x+1},$$

$$g''(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{4}{(2x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)(2x+1)^2}.$$

Teda  $g''(x) < 0$  pre  $x \in (0, \infty)$ , čo znamená, že  $g'(x)$  je klesajúca na  $(0, \infty)$ .

Ďalej platí:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2x+1} = 0,$$

z čoho, spolu s klesajúcosťou  $g'$ , vyplýva, že  $g'$  je kladná na  $(0, \infty)$ . Preto platí, že  $g$  je rastúca na  $(0, \infty)$ , čo sme potrebovali dokázať.



Pre porovnanie náročnosti jednotlivých úloh z prvej časti súťaže Putnam uvádzame prvý príklad z roku 1954.

### Putnam, príklad A1 z roku 1954

Nech  $n$  je nepárne celé číslo väčšie ako 1. Nech  $A$  je  $n \times n$  symetrická matica taká, že každý riadok a každý stĺpec tejto matice pozostáva z permutácie čísel  $1, \dots, n$ . Ukážte, že každé jedno číslo  $1, \dots, n$  sa musí objaviť na diagonále matice  $A$ . [20]

#### Riešenie:

Uvedieme najskôr konkrétne príklady takejto matice:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

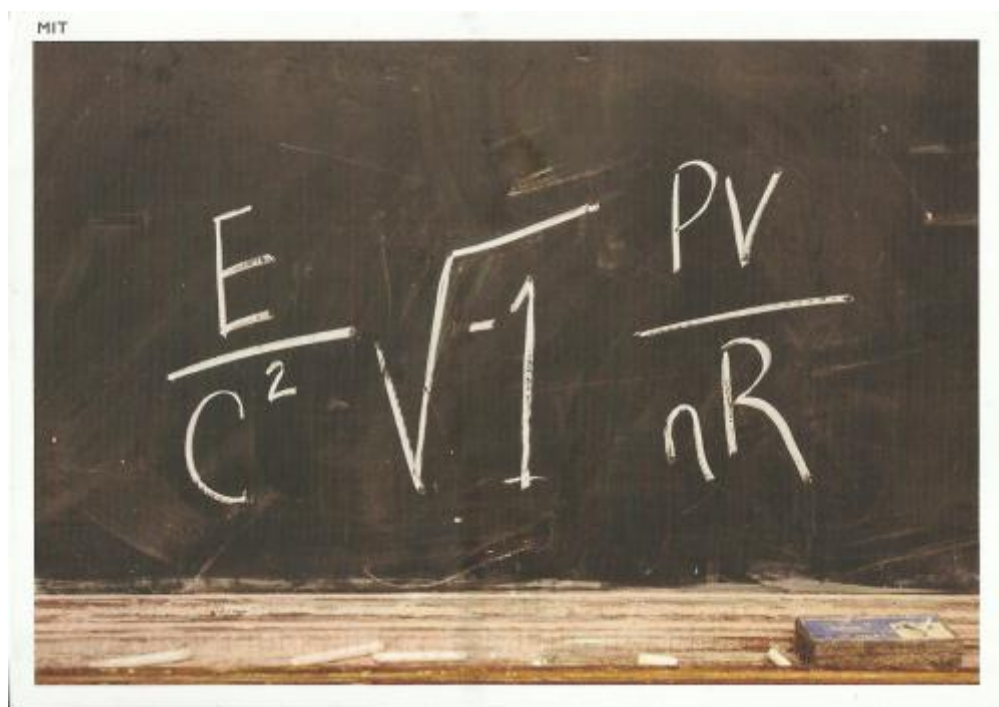
Tieto príklady nám môžu pomôcť pri vytvorení nasledovného všeobecného dôkazu. Každé z čísel  $1, \dots, n$  sa musí objaviť v  $A$  presne  $n$ -krát. Mimo diagonály sa čísla objavujú v pároch kvôli symetrickosti matice  $A$ . Keďže  $n$  je nepárne, každé číslo sa musí objaviť prinajmenšom raz na hlavnej diagonále. Navyše, keďže diagonála má  $n$  prvkov, každé z čísel  $1, \dots, n$  sa na nej nachádza práve raz.

Teraz príde na rad niečo zložitejšie. Podľa štatistík uvedených v [19] boli v rozmedzí rokov 1974 - 2011 dva príklady, v ktorých nebol dosiahnutý kladný počet bodov. Zameriame sa na rok 1979 a problémový príklad A6. V tomto roku sa na prvom mieste umiestnila škola MIT (Massachusetts Institute of Technology). [31] K tejto univerzite sa podarilo nájsť aj pohľadnicu s matematicko-fyzikálnou tematikou, ktorá je na obrázku 5.

Zadanie a návod k riešeniu príkladu A6 z roku 1979 nájdeme v [1]. Jeho riešenie nie je intuitívne, vyžaduje si nájsť nejakú fintu.

### Putnam, príklad A6 z roku 1979

Nech  $0 \leq p_i \leq 1$  pre  $i = 1, 2, \dots, n$ . Ukážte, že  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{|x-p_i|} \leq 8n(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1})$  pre niektoré  $x$  spĺňajúce  $0 \leq x \leq 1$ .



Obr. 5: Pohľadnica: MIT. [50]

**Riešenie:**

Pre  $k = 0, 1, \dots, 2n-1$  zvolíme  $I_k$  ako otvorený interval  $(\frac{k}{2n}, \frac{k+1}{2n})$ . Spomedzi  $2n$  intervalov  $I_k$  existuje  $n$  takých, ktoré neobsahujú žiadne  $p_i$ . Zvolíme si  $x_j$  ako stred každého z týchto  $n$  intervalov.

Nech  $|x_j - p_i| = d_{ij}$  a  $B = 8n(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1})$ . Pre fixované  $i$  spĺňa  $d_{ij}$  nerovnosť  $d_{ij} \geq \frac{1}{4n}$ , najviac dva z nich nespĺňajú  $d_{ij} \geq \frac{3}{4n}$ , najviac štyri nespĺňajú  $d_{ij} \geq \frac{5}{4n}$ , a podobne, ako to vidno aj na obrázku 6.

Potom platí:

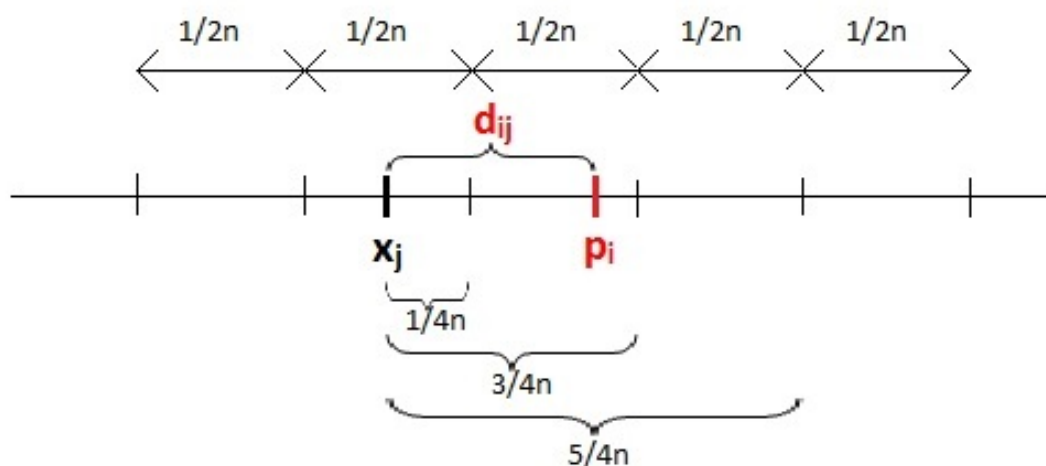
$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{d_{ij}} \leq 2 \left( 4n + \frac{4n}{3} + \frac{4n}{5} + \dots + \frac{4n}{2n-1} \right) = 2 \sum_{h=0}^{n-1} \frac{4n}{1+2h}.$$

Podľa nášho označenia tak dostávame:

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{|x_j - p_i|} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{d_{ij}} \leq 2 \sum_{h=0}^{n-1} \frac{4n}{1+2h} = B,$$

a teda

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{|x_j - p_i|} \leq B. \quad (1)$$



Obr. 6: Ohraničenie vzdialenosti  $d_{ij}$  k príkladu A6 z roku 1979

Nerovnosť (1) platí pre každé  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), sčítaním týchto  $n$  nerovností dpstávame:

$$\sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{|x_j - p_i|} \right) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{|x_j - p_i|} \right) \leq nB.$$

Takže je tu hodnota  $j$ , pre ktorú  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{|x_j - p_i|} \leq B$  a  $x_j$  pre takéto  $j$  môže slúžiť ako hľadané  $x$ .

Na záver ešte vysvetlíme, čo znamená nápis na tabuli na pohľadnici z obrázku 5.

- Prvý výraz  $\frac{E}{c^2}$  pochádza zo známej fyzikálnej rovnice  $E = mc^2$ . Teda naša prvá časť predstavuje písmeno **M**.
- Výraz  $\sqrt{-1}$ , ktorý dostaneme riešením  $i^2 = -1$ , predstavuje imaginárne číslo **i**.
- Posledná časť  $\frac{PV}{nR}$  sa týka rovnice ideálneho plynu  $PV = nRT$ . Tým pádom posledný výraz je písmeno **T**.

Takže nápis na pohľadnici je:

$$\frac{E}{c^2} \sqrt{-1} \frac{PV}{nR} = MIT,$$

čo je Massachusetts Institute of Technology.

### 1.3 Odpoveď, ktorú hľadáme

Po dlhšom pátraní sa nám nakoniec podarilo zistiť, o akú udalosť z pohľadnice na obrázku 1 ide, a kto sú všetci tí ľudia. Nebolo to jednoduché. Naša odpoveď prišla z Talianska vďaka mailovej komunikácii s Lucom Damianim [9], ktorý bol pôvodným vlastníkom spomínanej pohľadnice. Nejedná sa teda o žiadnu olympiádu, ako bolo uvedené v popise pri pohľadnici podľa [46]. Fotografia, ktorá bola predlohou tejto pohľadnice, bola zhotovená na konferencii „Problems in Mathematics“ na univerzite Princeton v roku 1946, ktorá sa konala pri príležitosti dvestého výročia založenia tejto univerzity a je možné ju nájsť na stránke [10] univerzity v Illinois.

Na tejto konferencii sa zúčastnili mnohí odborníci v matematickej a fyzikálnej oblasti. V krátkosti predstavíme tri významné osobnosti, ktoré boli prítomné na konferencii v Princetone: Václava Hlavatého pochádzajúceho z Československa, Carl Haralda Craméra a Johna Wilder Tukeyho, o ktorých sme už počuli na kurze zo štatistiky. Farebne ich vyznačíme na obrázku 7.



**Obr. 7:** Konferencia „Problems in Mathematics“, Princeton University, 1946. [10]

**Václav Hlavatý**

Český matematik žijúci v rokoch 1894-1969. Študoval na Filozofickej fakulte Univerzity Komenského a matematiku a deskriptívnu geometriu na Českej vysokej škole technickej v Prahe. Niekoľko rokov po vyštudovaní prednášal na Oxfordskej univerzite vo Veľkej Británii. Pôsobil aj ako profesor na Matematickom oddelení Indiana University v Bloomingtone v USA a na Graduate Institute for Applied Mathematics v rokoch 1948-1962, ako sa môžeme dočítať na [52]. Dokumenty z Indiana University sú uložené v knižnici v Bloomingtone a obsahujú dlhú korešpondenciu medzi Václavom Hlavatým a Albertom Einsteinom týkajúcu sa matematických dôkazov Einsteinových teórií. Jeho známy citát: „Čím ďalej ideme, tým viac sa od nás konečné vysvetlenie vzdáľuje, a všetko, čo zostáva, je viera.“ [25]

**Carl Harald Cramér**

V roku 1893 sa v Švédsku narodil známy matematik Carl Harald Cramér. V roku 1912 nasúpil na štúdium na univerzitu v Štokholme. V roku 1919 bol už menovaný docentom a začal produkovať sériu článkov o analytickej teórii čísel. Jeho hlavnou oblasťou výskumu sa však neskôr stala najmä teória pravdepodobnosti a štatistika. V roku 1927 publikoval text *Teória pravdepodobnosti a jej aplikácie*. O dva roky neskôr bol menovaný do novovytvorenej pozície v Štokholme a sa stal prvým švédskym profesorom poistnej matematiky a matematickej štatistiky. Zomrel v roku 1985. [4]

**John Wilder Tukey**

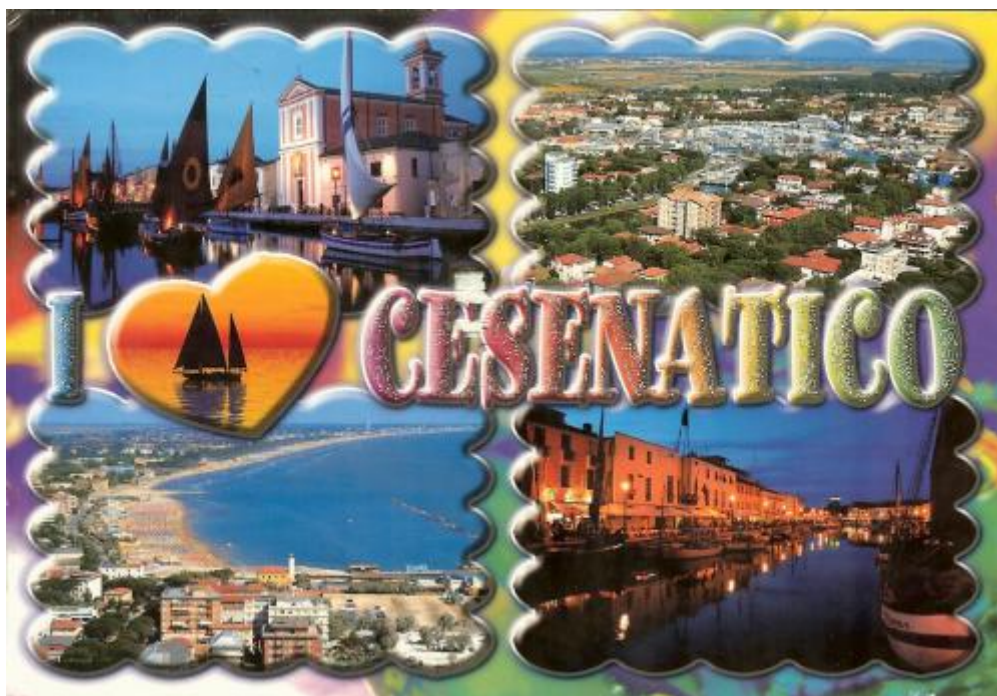
John W. Tukey sa narodil v roku 1915 v štáte Massachusetts v USA. Na Brown univerzite získal bakalársky titul v roku 1936, rok nato titul magistra v odbore chémia. Následne na to išiel na Princeton, kde sa po získaní doktorátu stal inštruktorom matematiky. O desať rokov neskôr, vo veku 35 rokov, sa stal profesorom. John Tukey priťahoval medzinárodnú pozornosť pre jeho štúdie štatistiky a ich aplikácie v najrôznejších vedeckých a technických odboroch. Je spájaný s výrazmi *bit* a *binárna číslica*. Zomrel v roku 2000. [3]



## 1.4 Talianska olympiáda v Cesenaticu

V tejto podkapitole predstavíme taliansku matematickú olympiádu. K tejto myšlienke nás priviedol práve Luca Damiani [9], ktorý nám poskytol informácie práve k tejto téme. Vysvetlil nám, že sa pri príležitosti matematickej olympiády v Taliansku vydávajú pohľadnice.

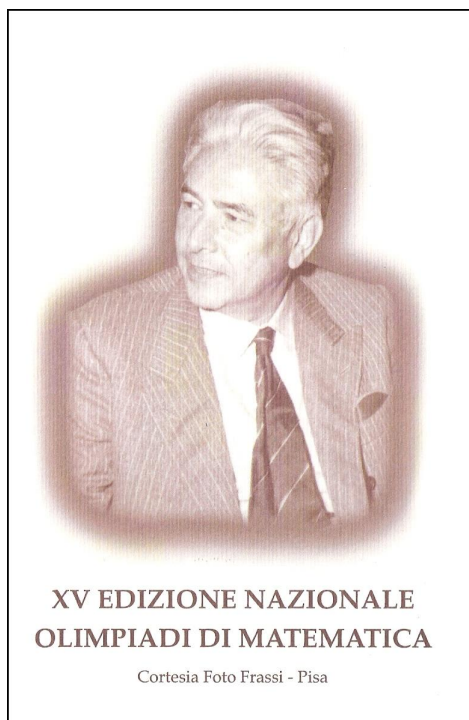
Podľa [24] sa matematické súťaže v Taliansku konajú v troch fázach. V polovici novembra je to *I giochi di Archimede*, ktorá je zbierkou otázok s viacerými odpoveďami. *La gara di Febbraio* usporiadaná vo februári pozostáva z otázok s viacerými odpoveďami ale aj otvorenými otázkami. A nakoniec je to talianska matematická olympiáda, ktorá sa koná každoročne v máji v Cesenaticu od roku 1985 až na prvé štyri roky, kedy sa konala vo Viareggio.



**Obr. 8:** Pohľadnica: Mesto Cesenatico, v ktorom sa koná celoštátne kolo talianskej matematickej olympiády. [45]

Ukážeme zadanie a riešenie jedného príkladu z talianskej matematickej olympiády v Cesenaticu. Konkrétne uvedieme prvý príklad z pätnásteho ročníka, ktorý prebiehal v roku 1999. Zadania aj riešenia nájdeme na stránke olympiády z matematiky [53]. Pri tejto príležitosti bola zhotovená aj pohľadnica, ktorú môžeme vidieť na obrázku 9. Na tejto pohľadnici je podľa [9] taliansky matematik Ennio De Giorgi (1928 - 1996). Viac

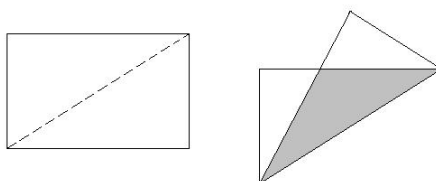
o jeho živote nájdeme na [15].



**Obr. 9:** Pohľadnica: Matematická olympiáda v Cesenaticu, XV. ročník. [43]

### Talianska MO, príklad 1 z roku 1999

Majme obdĺžnikový list so stranami  $a$ ,  $b$ , pričom platí  $a > b$ . Určite plochu trojuholníka, ktorý vznikne ohnutím listu pozdĺž diagonály obdĺžnika ako na obrázku 11. [53]

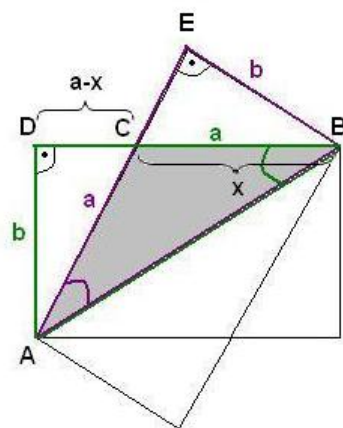


**Obr. 10:** Náčrt skladania papiera k príkladu 1 z roku 1999.

### Riešenie:

Zavedme označenie podľa obrázku 11. Vidíme, že trojuholník  $ABC$  je rovnoramenný. Vyplýva to zo zhodnosti uhlov  $BAC$  a  $ABC$  (resp. zo zhodnosti trojuholníkov  $ABD$  a  $ABE$ ). Obsah trojuholníka  $ABC$  teda vypočítame takto:

$$S = \frac{|BD| \cdot |AD|}{2} - \frac{|CD| \cdot |AD|}{2} = \frac{|AD|(|BD| - |CD|)}{2} = \frac{|CB| \cdot |AD|}{2},$$



Obr. 11: Riešenie príkladu 1 z roku 1999.

kde  $AD$  je výška strany  $CB$ . Podľa zadania:

$$DB = a, AD = b,$$

ďalej máme označenie podľa obrázku 11:

$$CB = AC = x, DC = a - x.$$

Podľa Pytagorovej vety použitej na pravouhlý trojuholník  $ACD$  vypočítame  $x$ .

Platí:

$$x^2 = b^2 + (a - x)^2,$$

teda

$$x^2 = a^2 - 2ax + x^2 + b^2$$

a dostávame

$$x = \frac{a^2 + b^2}{2a}.$$

Obsah trojuholníka  $ABC$  teda je:

$$S = \frac{x \cdot b}{2} = \frac{(a^2 + b^2)b}{4a}.$$

Ako sme už spomínali, k olympiáde vychádzajú pohľadnice s rôznymi motívmi. Najčastejšie ide o významné osobnosti matematického sveta. Na obrázku 12 vidíme pohľadnicu zhotovenú pri príležitosti šestnásteho ročníka národnej matematickej olympiády, na ktorej je zobrazený taliansky matematik Nicolo Tartaglia. Tento matematik





**Obr. 12:** Pohľadnica: Matematická olympiáda v Cesenaticu, XVI. ročník. [44]

žil podľa [33] v šestnástom storočí a pre mnohých je známy najmä nájdením riešenia kubickej rovnice.

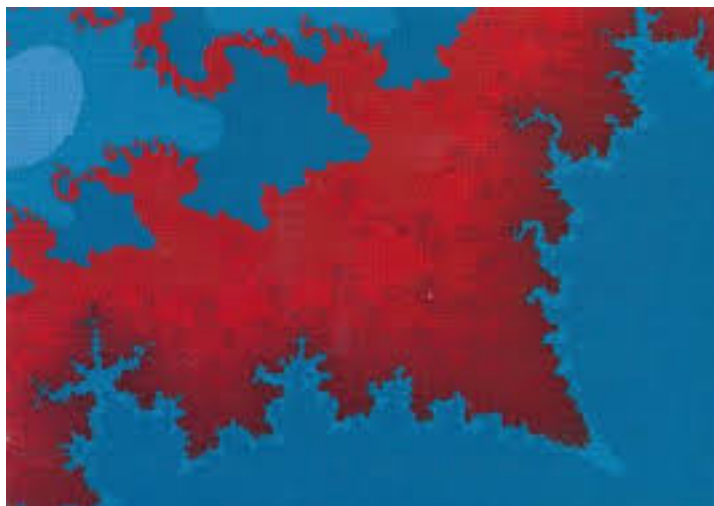
V tomto roku (2014) vyšla pri príležitosti matematickej olympiády v Taliansku pohľadnica „Múza logiky“, ktorá je na obrázku 13. [9]



**Obr. 13:** Pohľadnica: Matematická olympiáda v Cesenaticu, 2014. [9]

## 2 Fraktály

Matematika je oblasť života, ktorá skúma mnohé javy a často nepochopiteľné súvislosti medzi týmito javmi. Jednou z jej disciplín je aj fraktálna geometria, jednoducho povedané - fraktály. Mnohým ľuďom je tento pojem známy, iní zase videli obrázky najznámejších fraktálov. Dôležité však je, že matematické pozadie, ktoré sa skrýva za týmto pojmom, nie je celkom jednoduché. Budeme sa preto v tejto kapitole snažiť do určitej časti ozrejmiť princípy vzniku fraktálnych obrázkov, predstavíme známu Mandelbrotovu množinu<sup>3</sup>, uvedieme praktické využitie fraktálnej geometrie a ukážeme, kde všade sa fraktály vyskytujú.



**Obr. 14:** Pohľadnica: Fraktálne umenie, Seppo Rihlma, 1992. [38]

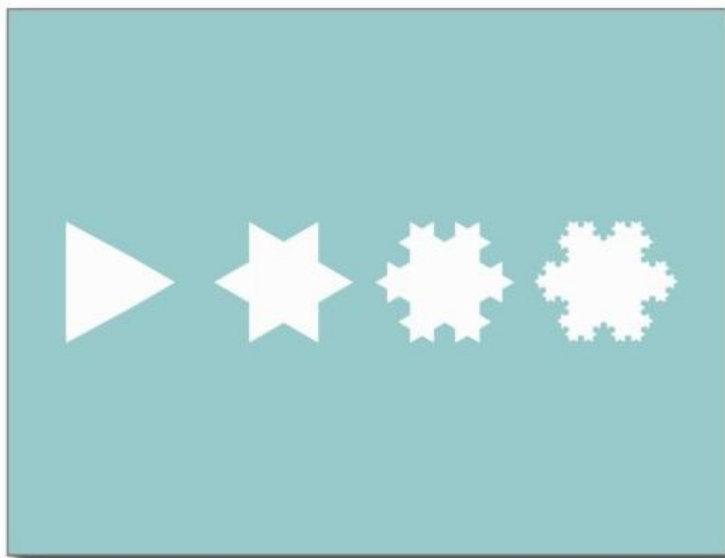
### 2.1 Fraktálna geometria

Fraktály sú podľa [26] objekty, ktorých geometrická štruktúra sa opakuje v ňom samom. V [30] sa uvádza, že fraktálny objekt by mohol byť definovaný ako rozdrobený geometrický útvar, ktorý môže byť rozdelený do častí, z ktorých každá približne predstavuje zmenšenú kópiu celku.

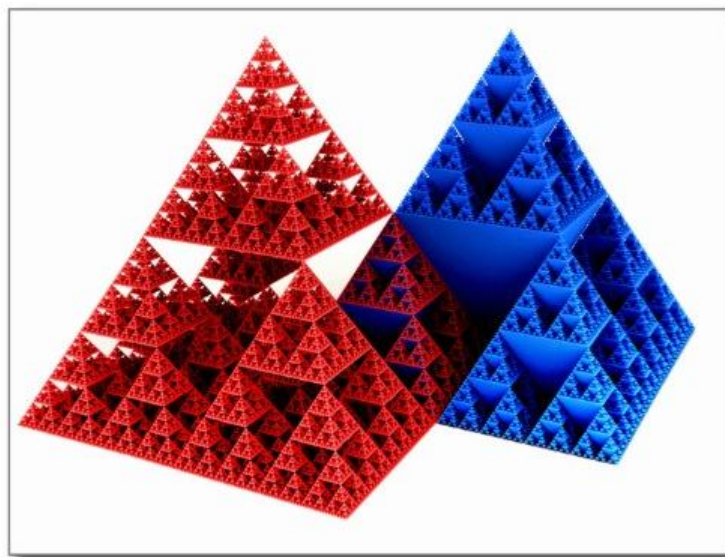
Podobnú definíciu nájdeme aj v [35] a teda, že fraktály sa na seba podobajú v rôznych mierkach. Všetky fraktály tak majú vo všeobecnosti vstavanú formu iterácie

<sup>3</sup>Slovo fraktál bolo vytvorené práve Benoitom Mandelbrotom. Toto slovo pochádza z latinského slovesa *frangere* (rozbiť) a od príslušného prídavného mena *fractus* (roztrieštený, nepravidelný). [35]

(opakovania) alebo rekurzie. Niekedy je dokonca možné túto rekurziu uvidieť v tom, ako je daný fraktál skonštruovaný. Medzi také patrí aj Kochova vločka a Sierpinského trojuholník, ktoré vidíme na pohľadniciach na obrázkoch 15 a 16.



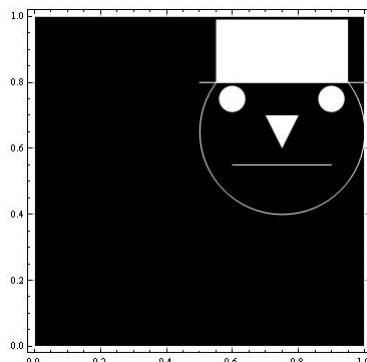
**Obr. 15:** Pohľadnica: Kochova vločka. [28]



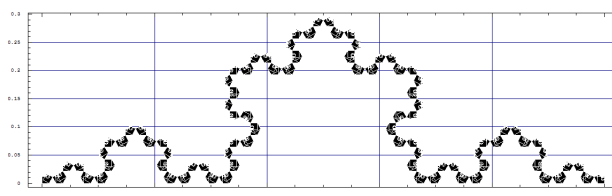
**Obr. 16:** Pohľadnica: Sierpinského trojuholník v 3D. [56]

Na stránke [26] k predmetu GeoComputation nájdeme kódy pre program Mathematica, od spoločnosti Wolfram Research, na vytvorenie Kochovej krivky a Sierpinského trojuholníka. Jedná sa o trochu netradičné prevedenie týchto fraktálov, keďže majú

použitý základný grafický objekt, ktorý vidíme na obrázku 17. Na obrázku 18 máme znázornenú Kochovu krivku.



**Obr. 17:** Grafický objekt použitý na vytvorenie Kochovej krivky. [26]



**Obr. 18:** Kochova krivka vytvorená pomocou grafického objektu z obrázku 17. [26]

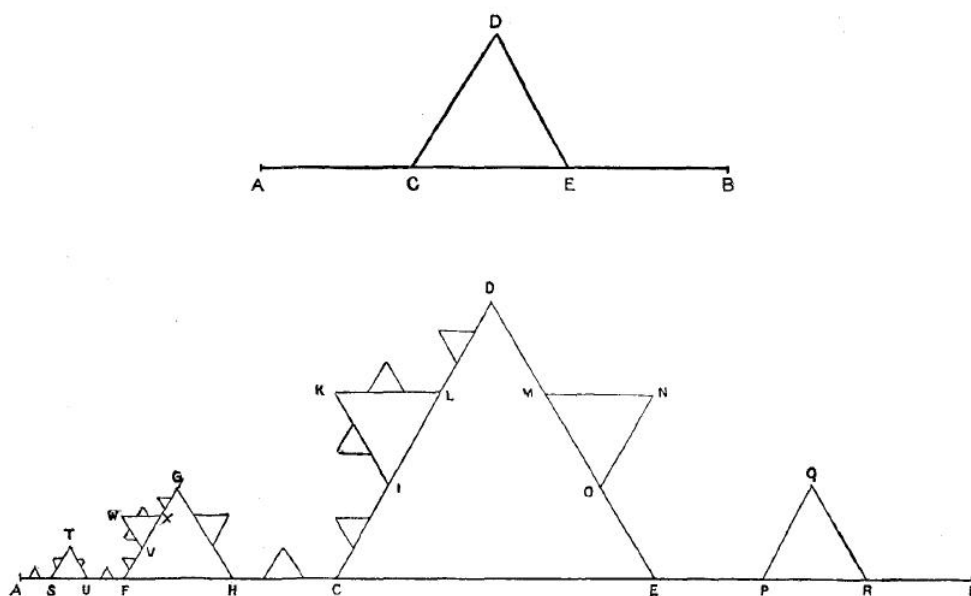
V nasledujúcich častiach vysvetlíme, ako vytvoriť už spomínané fraktálne útvary: Kochovu vložku a Sierpinského trojuholník.

### 2.1.1 Kochova vložka

Helge von Koch (1870 - 1924) bol švédsky matematik, podľa ktorého je pomenovaná jedna z prvých popísaných fraktálnych kriviek - Kochova krivka. V pôvodnom článku Kocha z roku 1906 [65] nájdeme náčrt postupného vzniku Kochovej krivky, ktorý je na obrázku 19. Okrem iného je v tomto diele aj dôkaz, ktorý potvrdzuje spojitosť krivky a zároveň tiež fakt, že nie je diferencovateľná.

Vidíme, že Kochova krivka vzniká opakovaním jednoduchého postupu. Začíname s úsečkou a v každom kroku vykonáme nasledovné:

1. Úsečku rozdelíme na tretiny.
2. Nad strednou časťou zostrojíme rovnostranný trojuholník.



Obr. 19: Náčrt Kochovej krivky. [65]

3. Stredná časť trojuholníka sa zmaže.

Kochova vložka je v skutočnosti zložená z troch Kochovych kriviek. Jej konštrukcia je veľmi podobná konštrukcii Kochovej krivky. Rozdiel je v počiatočnom útve, na ktorý sa aplikuje už spomínaný postup od bodu 2. V [66] sa teda dočítame, že vznik Kochovej vložky začíname rovnostranným trojuholníkom, pokračujeme odstránením vnútornej tretiny každej strany a na tomto mieste nakreslíme ďalší rovnostranný trojuholník. Tento proces môžeme opakovať až do nekonečna.

### 2.1.2 Sierpinského trojuholník

Wacław Sierpiński, poľský matematik žijúci v rokoch 1882 - 1969, je vedúcou osobnosťou topológie<sup>4</sup>. Ako sa ďalej dočítame v [14], vynaložil nemalé úsilie pri topologickej charakterizácii kontína - množiny reálnych čísel a popri tom objavil príklady topologic-

<sup>4</sup>Topológia je (voľne povedané) odvetvie matematiky, v ktorom sú dva objekty považované za rovnaké, ak môžu byť spojito pretvorené jeden na druhý prostredníctvom ohýbania, natiahovania a pod. pričom sa ich stavba nenaruší (nerozoberú sa na časti a opäť poskladajú). [13] Podľa [62] je kruh topologicky ekvivalentný elipse (deformovaný natiahovaním) a guľa zodpovedá elipsoidu. Definícia topológie vedie k nasledujúcemu matematickému vtipu [55]. Otázka: Kto je to topológ? Odpoveď: Nieкто, kto nedokáže rozlíšiť šišku od šálky kávy. Animácia vysvetľujúca tento vtíp sa dá nájsť na stránke [61].

kých priestorov s neočakávanými vlastnosťami. Po tomto matematikovi je pomenovaný aj známy fraktálny útvar - Sierpinského trojuholník, ktorý vzniká nasledovne:

1. Vezmeme rovnostranný trojuholník.
2. Tento trojuholník rozdelíme na štyri zhodné rovnostranné trojuholníky.
3. Odstránime prostredný trojuholník.
4. Opakujeme body 2 a 3 s každým zo zostávajúcich trojuholníkov.

Výsledný útvar je sebepodobný, t.j. malé časti sú zmenšené kópie celku. [14]



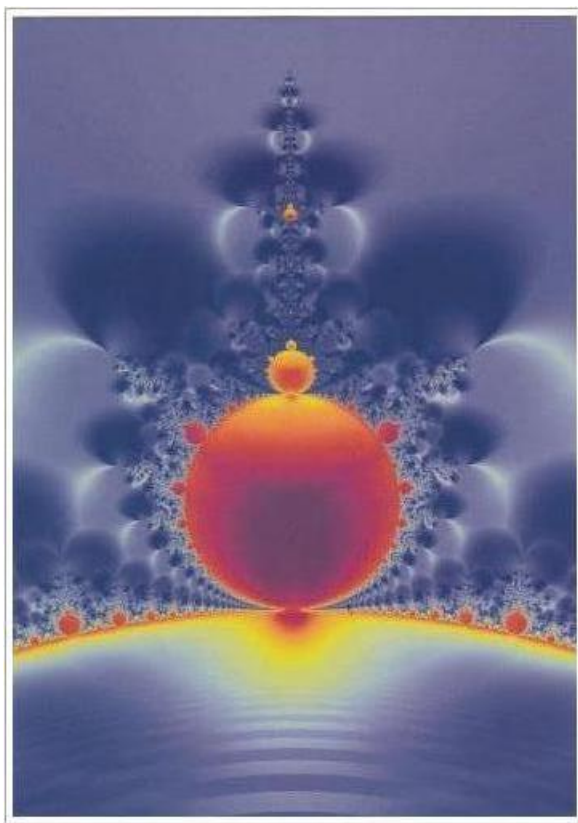
Obr. 20: Prvých päť iterácií Sierpinského trojuholníka. [58]

## 2.2 Mandelbrotova množina

Krátky prehľad o fraktáloch a základy ich vzniku máme už za sebou. Nastal teda čas predstaviť si sľubovaný pojem Mandelbrotovej množiny. Podľa [63] je tento pojem ikonou teórie chaosu, ktorá sa stala súčasťou fyziky koncom dvadsiateho storočia a jej významom ju môžeme porovnávať s kvantovou mechanikou či dokonca teóriou relativity.

James Gleick v [21] píše: „Mandelbrotova množina sa stala verejným symbolom teórie chaosu, ktorý sa objavoval na titulných stranách zborníkov z konferencií a na odborných časopisoch. Bola jadrom výstavy počítačového umenia, ktorá v rokoch 1985 a 1986 cestovala po svete. Z obrázkov bola jej krása ľahko uchopiteľná; ťažšie sa jej význam chápal matematikom, ktorí sa jej pomaly učili porozumieť.“

Pri práci s Mandelbrotovou množinou potrebujeme mať vedomosti o komplexných číslach. Budeme pracovať s funkciou komplexnej premennej. Funkcia komplexnej premennej, ako sa dočítame na stránke [63], je taká funkcia, ktorá každému komplexnému číslu z jeho definičného oboru priradí iné komplexné číslo. Mandelbrotova množina sa



**Obr. 21:** Pohľadnica: Mandelbrotova množina. [41]

na prvý pohľad môže zdať veľmi zložitá. Avšak funkcia, ktorá ju vytvára, je jednoduchá.

Bude nás zaujímať táto funkcia:

$$f(z) = z^2 + c,$$

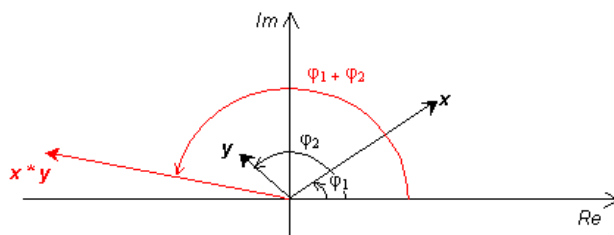
kde  $c$  je komplexná konštanta a argumentom je komplexné číslo  $z$ .

Táto funkcia vykoná s číslom  $z$  nasledovné veci [26], ktoré vidíme aj na obrázku 23:

- Otočí ho tak, aby s osou  $x$  zvieralo dvojnásobný uhol.
- Natiahne ho alebo stlačí, aby bola jeho veľkosť rovná druhej mocnine pôvodnej veľkosti.<sup>5</sup>

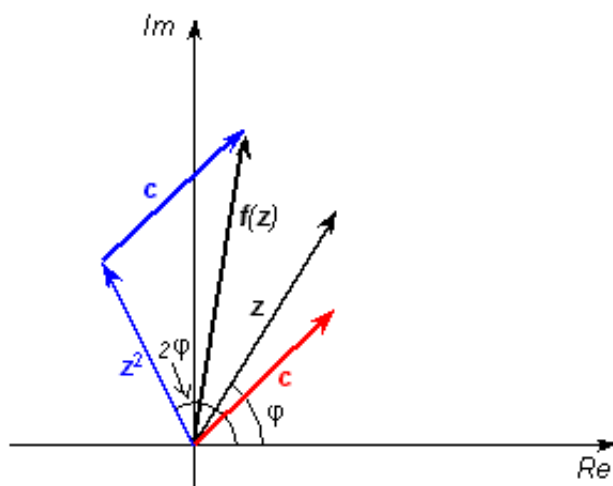
---

<sup>5</sup>Násobenie komplexných čísel zahŕňa dve geometrické transformácie. Je to rovnoľahlosť (t.j. natiahnutie alebo skrátanie) a otáčanie. V prípade násobenia dvoch komplexných čísel teda vypočítame súčet uhlov, ktoré zvierajú vektory týchto komplexných čísel s reálnou osou. Výsledný vektor tak s osou  $x$  zvierá uhol rovný súčtu pôvodných uhlov vektorov. Veľkosť výsledného vektora je súčin absolútnych hodnôt veľkostí vektorov daných komplexných čísel. [63] Názorne to vidíme na obrázku 22.



Obr. 22: Násobenie dvoch komplexných čísel. [63]

- Pripočíta k nemu komplexnú konštantu  $c$ .



Obr. 23: Operácie vykonávané funkciou  $f$  na komplexnom čísle  $z$ . [63]

Zapíšme funkciu  $f$  algebraicky podľa [26]. Využijeme základné vlastnosti pri práci s komplexnými číslami. Máme teda komplexné čísla  $z$  a  $c$ , ktoré majú svoju reálnu aj imaginárnu časť:

$$z = z_r + z_i \cdot i,$$

$$c = c_r + c_i \cdot i.$$

Potom predpis pre  $z^2$  bude vyzeráť:

$$z^2 = (z_r^2 - z_i^2) + (2z_r z_i) \cdot i.$$

Dostávame teda predpis pre funkciu  $f$ :

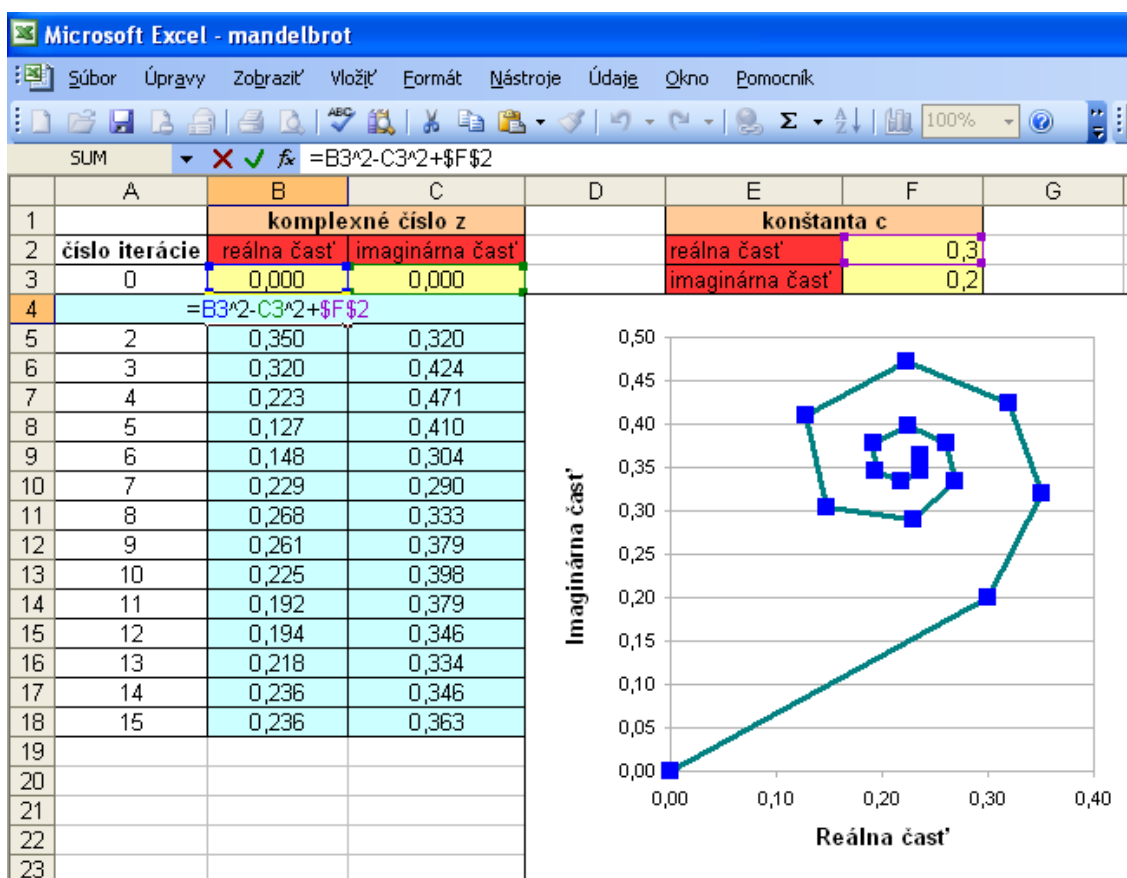
$$f(z) = z^2 + c = (z_r^2 - z_i^2 + c_r) + (2z_r z_i + c_i) \cdot i. \quad (2)$$



Tento predpis funkcie  $f$  sa dá dobre využiť na generovanie postupnosti

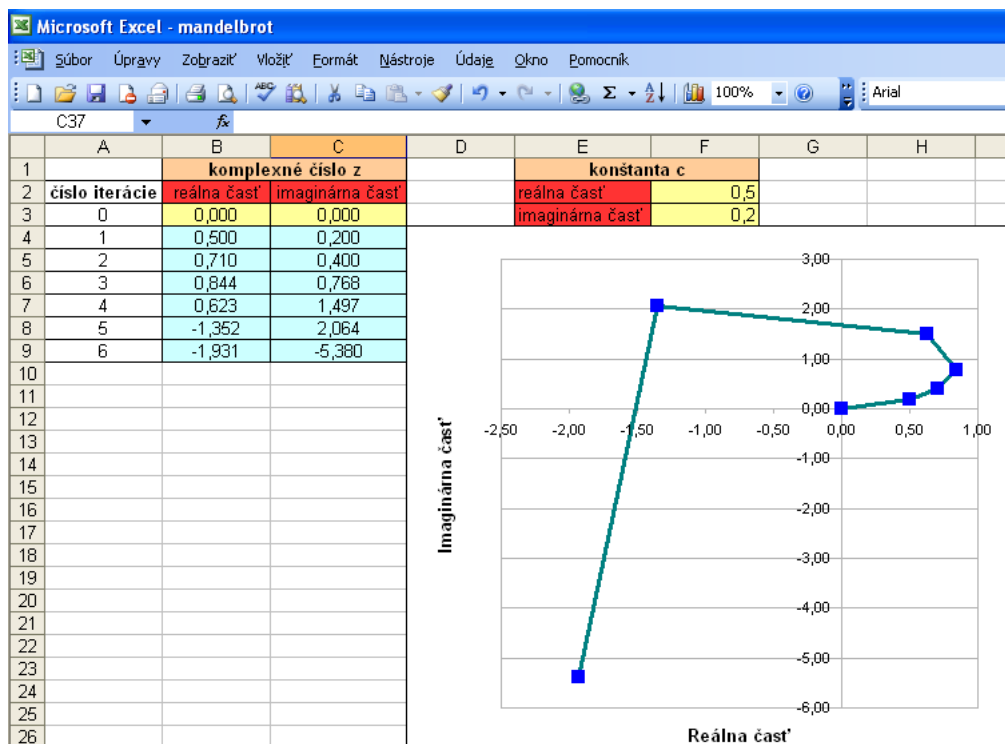
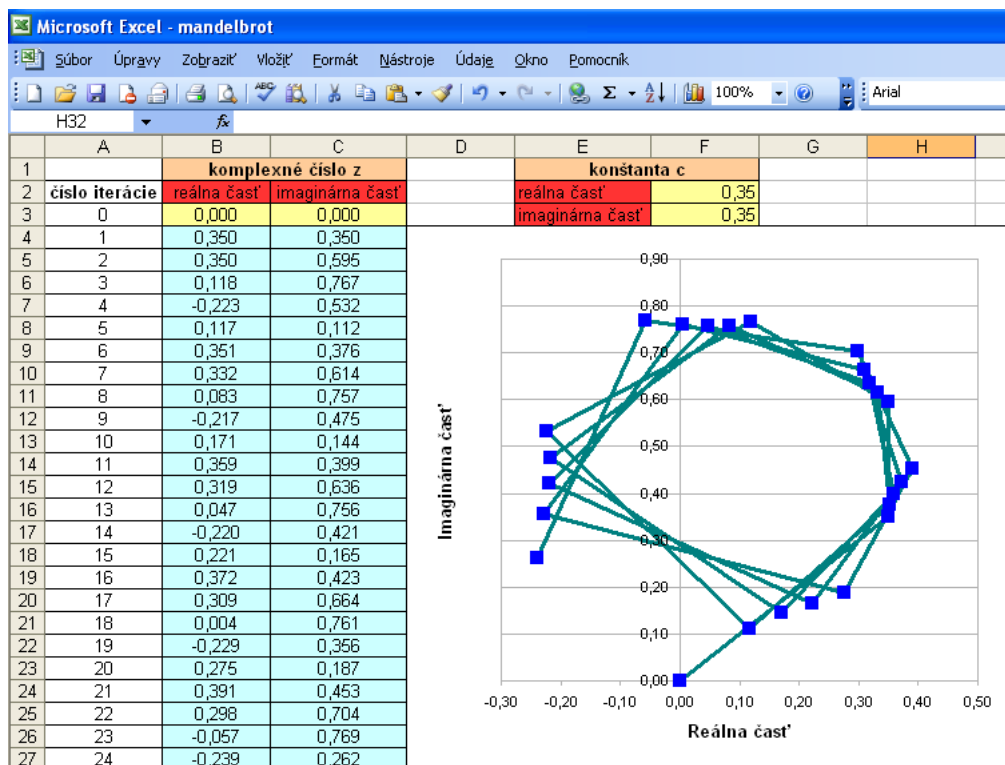
$$z_{n+1} = f(z_n), z_0 = 0 \quad (3)$$

napr. v programe Excel. Na nasledujúcich obrázkoch 24, 25 a 26 vidíme, ako vytvorí takúto postupnosť a tiež ako sa mení postupnosť v závislosti od zvolených veľkostí počiatočných podmienok pre číslo  $c$ . Na obrázku 24 môžeme konkrétne vidieť vzorec použitý v Exceli, ktorým pomocou (2) generujeme postupnosť.



**Obr. 24:** Generovanie postupnosti (3) využitím zápisu (2) v Exceli,  $c = 0,3 + 0,2 \cdot i$ .

Mandelbrotova množina je v [69] aj v [63] definovaná ako množina všetkých bodov komplexnej roviny  $c = (c_r, c_i)$  takých, že postupnosť (3) je ohraničená. Z definície nám teda vyplýva, že bod  $c = (c_r, c_i)$  do Mandelbrotovej množiny nepatrí, keď absolútne hodnoty členov prislúchajúcej postupnosti rastú do nekonečna. V [63] nájdeme nasledujúce tvrdenie: *Bod  $c = (c_r, c_i)$  nepatrí do Mandelbrotovej množiny, ak postupnosť prekročí hraničnú kružnicu s polomerom 2.*

Obr. 25: Divergencia bodov postupnosti (3),  $c = 0,5 + 0,2 \cdot i$ .Obr. 26: Oscilácia bodov postupnosti (3),  $c = 0,35 + 0,35 \cdot i$ .

**Veta o veľkosti hraničnej kružnice [63]:**

Majme funkciu  $f(z) = z^2 + c$ . Nech  $c$  je komplexné číslo a  $\{z_0, z_1, z_2, z_3, \dots\}$  je postupnosť komplexných čísel daná rekurentne vzťahmi  $z_{n+1} = f(z_n)$ ,  $z_0 = 0$ . Ak pre nejaký  $k$ -ty člen postupnosti platí, že  $|z_k| > 2$ , tak ďalšie členy postupnosti sa budú zväčšovať nad všetky medze. Taká postupnosť bude teda neohraničená.

**Dôkaz** (podľa [63]):

Neohraničenosť postupnosti komplexných čísel  $\{z_0, z_1, z_2, z_3, \dots\}$  dokážeme pomocou geometrickej postupnosti reálnych čísel  $\{d_0, d_1, d_2, \dots\}$ , o ktorej vieme, že ide do nekonečna. Ukážeme, že každý člen rastúcej postupnosti  $\{z_n\}$  je väčší ako jemu zodpovedajúci člen postupnosti  $\{d_n\}$ . A vzhľadom na to, že postupnosť  $\{d_n\}$  ide do nekonečna, pôjde do nekonečna aj rastúca postupnosť  $\{z_n\}$ .

V tomto dôkaze využijeme tieto nerovnosti, ktoré platia pre komplexné čísla  $a$  a  $b$ .

$$|a + b| \leq |a| + |b|. \quad (4)$$

$$|a + b| \geq |a| - |b|. \quad (5)$$

Dôkaz ešte rozdelíme na dva prípady podľa toho, či je absolútna hodnota konštanty  $c$  väčšia alebo menšia ako 2.

**PRÍPAD 1:**  $|c| \leq 2$ 

V úvode dôkazu sme uviedli, že postupnosť  $\{|z_{n+k}|\}_{n=0}^{\infty}$  je rastúca. V krátkosti teda najprv dokážeme rastúcosť postupnosti  $\{|z_{n+k}|\}_{n=0}^{\infty}$ , ktorá nám umožní vykonať ďalšie kroky pri dokazovaní neohraničenosti postupnosti.

Nech  $z_k$  je prvý taký člen postupnosti spĺňajúci  $|z_k| > 2$ , t.j.

$$|z_k| > 2 \geq |c| \Leftrightarrow -|z_k| < -2 \leq -|c|. \quad (6)$$

Pre veľkosť ďalšieho člena postupnosti  $z_{k+1}$  potom platí:

$$|z_{k+1}| = |z_k^2 + c| \geq |z_k^2| - |c| = |z_k|^2 - |c|. \quad (7)$$

K vzťahu (6) pripočítame  $|z_k|^2$ , využijeme vzťah (7) a dostaneme:

$$|z_k|^2 - |z_k| < |z_k|^2 - |c|,$$

$$|z_{k+1}| \geq |z_k|^2 - |c| > |z_k|^2 - |z_k| = |z_k| \underbrace{(|z_k| - 1)}_{> 1}.$$

Pre člen  $|z_{k+1}|$  nakoniec platí:

$$|z_{k+1}| > |z_k| > 2,$$

$$|z_{k+1}| > (|z_k| - 1)|z_k|.$$

Rovnakým spôsobom je tento postup použiteľný pre ostatné členy a dostaneme zovšeobecnenie:

$$|z_{k+n}| > \underbrace{(|z_{k+n-1}| - 1)}_{> 1} |z_{k+n-1}| > |z_{k+n-1}| > 2, \quad (8)$$

$$|z_{k+n}| > (|z_{k+n-1}| - 1)(|z_{k+n-2}| - 1) \dots (|z_{k+1}| - 1)(|z_k| - 1)|z_k|. \quad (9)$$

Z týchto dvoch nerovnic vyplýva, že všetky členy postupnosti nasledujúce za  $k$ -tým členom už majú veľkosť väčšiu ako 2 a súčasne, že postupnosť veľkostí je rastúca, t.j.  $|z_k| < |z_{k+1}| < |z_{k+2}| < |z_{k+3}| < |z_{k+4}| \dots$

Môžeme teraz pokračovať v hlavnej časti dôkazu. Zvolíme si pomocnú geometrickú postupnosť nasledovne:

$$d_n = q^n |z_k|,$$

kde kvocient  $q = |z_k| - 1$  je väčší ako 1.

Keďže z rastúcnosti platí  $|z_{k+1}| > |z_k|$ , potom aj  $|z_{k+1}| - 1 > \underbrace{|z_k| - 1}_{= q}$ . Podobne to platí aj pre ostatné členy, t.j.:

$$|z_{k+2}| - 1 > q, |z_{k+3}| - 1 > q, \dots |z_{k+n-1}| - 1 > q.$$

Vo vzťahu (9) tak prichádzame k požadovanej nerovnosti:

$$|z_{k+n}| > (|z_{k+n-1}| - 1)(|z_{k+n-2}| - 1) \dots (|z_{k+1}| - 1)(|z_k| - 1)|z_k| > \underbrace{q \cdot q \dots q}_n |z_k| = q^n |z_k|.$$

A teda

$$|z_{k+n}| > q^n |z_k| = d_n,$$

čo sme chceli dokázať, že postupnosť komplexných čísel  $\{z_k, z_{k+1}, \dots\}$  v prípade  $|c| \leq 2$  rastie v absolútnej hodnote do nekonečna.

**PRÍPAD 2:**  $|c| > 2$ 

V tomto prípade je prvý člen postupnosti, ktorého veľkosť je väčšia ako 2, už člen  $z_1 = c$ . Súčasne teda pre člen  $z_1$  platí, že  $|z_1| = |c| > 2$ . Pre ďalší člen postupnosti bude platiť:

$$|z_2| = |z_1^2 + c| = |c^2 + c| \geq |c|^2 - |c| = \underbrace{(|c| - 1)}_{> 1} |c|.$$

Teda  $|z_2| > |c| > 2 \Rightarrow -|c| > -|z_2|$ . Podobne pre člen  $z_3$  platí:

$$|z_3| = |z_2^2 + c| \geq |z_2|^2 - |c| > |z_2|^2 - |z_2| = \underbrace{(|z_2| - 1)}_{> 1} |z_2|.$$

Dostávame nasledovné:

$$|z_3| > |z_2| > |c| > 2,$$

$$|z_3| > (|z_2| - 1)(|c| - 1)|c|.$$

Rovnako môžeme pokračovať s ďalšími členmi a prideme k všeobecnému výsledku:

$$|z_n| > |z_{n-1}| > \dots > |z_2| > |c| > 2, \quad (10)$$

$$|z_n| > (|z_{n-1}| - 1) \dots (|z_2| - 1)(|c| - 1)|c|. \quad (11)$$

Dokázali sme, že postupnosť  $\{z_n\}_{n=k}^{\infty}$  je rastúca aj pre  $|c| > 2$ .

Dôkaz neohraničenosti urobíme pomocou geometrickej postupnosti  $d_n = q^n |c|$ , kde  $q = |c| - 1$  je väčšie ako 1. Dokážeme:

$$d_n < |z_n|.$$

Ako sme už dokázali, platí  $|z_2| > |z_1| = |c|$ . Potom platí aj  $|z_2| - 1 > \underbrace{|c| - 1}_{= q > 1}$ . Podobne to funguje aj pre ostatné členy rastúcej postupnosti, t.j.

$$|z_3| - 1 > q, |z_4| - 1 > q, \dots, |z_{n-1}| - 1 > q.$$

Potom zo vzťahu (11) dostávame

$$|z_n| > (|z_{n-1}| - 1) \dots (|z_2| - 1)(|c| - 1)|c| > \underbrace{q \cdot \dots \cdot q \cdot q}_n |c| = q^n |c|.$$

Teda sme dokázali, že postupnosť rastie do nekonečna aj pre  $|c| > 2$ :

$$|z_n| > q^n |c| = d_n.$$

Ukázali sme, že ak pre nejaký  $k$ -ty člen postupnosti platí  $|z_k| > 2$ , ďalšie členy postupnosti sa budú zväčšovať nad všetky medze a takáto postupnosť bude neohraničená. Bod  $c$  teda nebude patriť do Mandelbrotovej množiny, ak postupnosť prekročí hraničnú kružnicu s polomerom 2.

### 2.2.1 Mandelbrotova množina v programe Mathematica

Pomocou programu Mathematica<sup>6</sup> a kódov zo stránky k predmetu Computational Physics na University of California [69] sa nám podarilo vykresliť Mandelbrotovu množinu na rôznych oblastiach, ktoré môžeme vidieť na obrázkoch 28, 29, 30, 31 a 32.

Nasledujúce kódy sa používajú na generovanie Mandelbrotovej množiny. Argumenty funkcie sú: reálna časť  $c_r$  komplexného čísla  $c$ , imaginárna časť  $c_i$  komplexného čísla  $c$  a hodnota **lim** - maximálny počet iterácií. Ďalej je zadaná počiatočná hodnota  $z = 0$  a počet iterácií je nastavený na hodnotu 0, t.j.  $ct = 0$ . Nasleduje podmienka: pokiaľ platí  $|z| < 2$  a  $ct \leq \mathbf{lim}$ , potom  $z = z^2 + c_r + i \cdot c_i$  (teda sa vypočíta ďalší člen postupnosti a jeho hodnotou sa prepíše premenná  $z$ ) a zvyšujeme počet iterácií  $ct$ . Funkcia potom vracia (mínus) počet iterácií, ktoré sú potrebné, aby zobrazenie uniklo za hranicu  $|z| = 2$  až po maximálne **lim** - maximálny počet iterácií. Ak aj po tomto počte iterácií platí  $|z| < 2$ , funkcia vráti hodnotu  $-(\mathbf{lim} + 1)$ .

Definujeme teda podľa [69] funkciu *mandelbrot*, ktorá je skonštruovaná na základe uvedeného postupu:

```
mandelbrot [ cr_ , ci_ , lim_ ] := (
  z = 0; ct = 0;
  While [ Abs [ z ] < 2.0 && ct <= lim ,
    z = z^2 + cr + I ci ;
    ++ct
  ];
  -ct
);
```

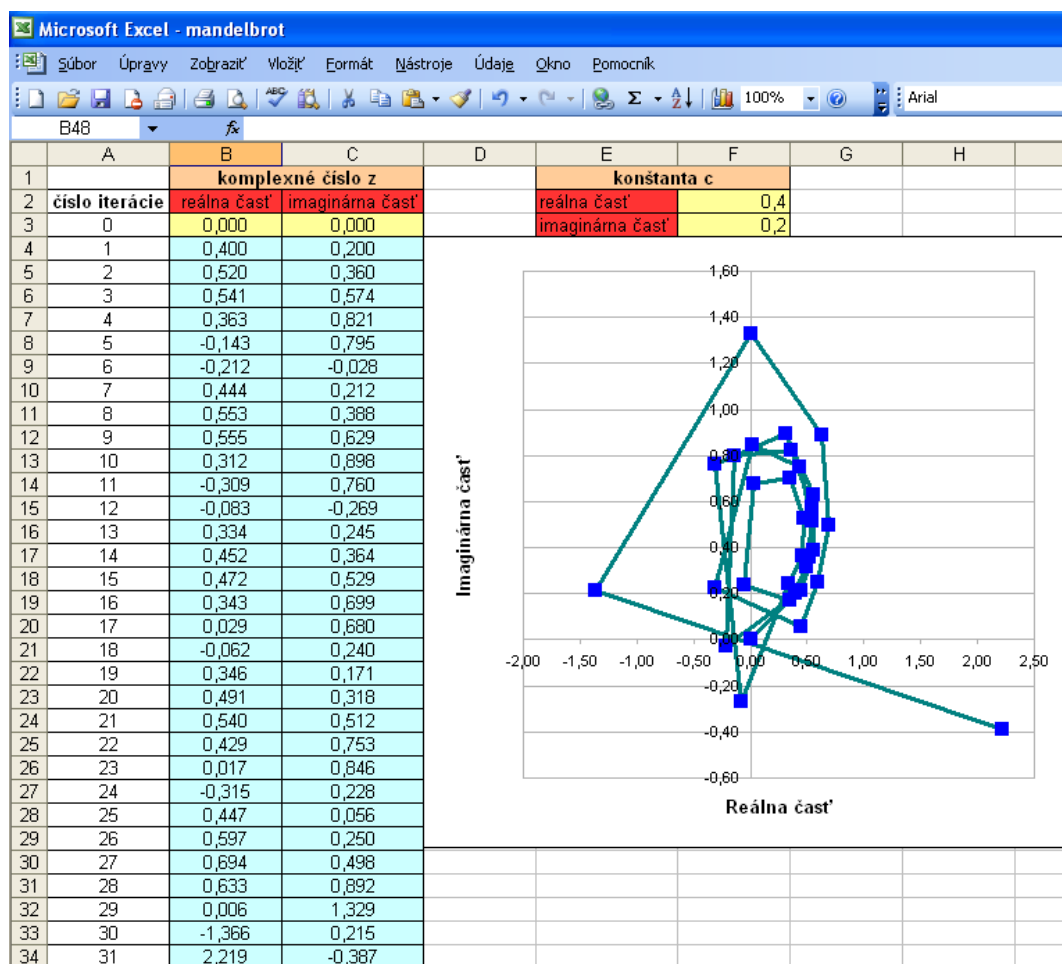
<sup>6</sup>30-denná trial verzia softvéru Wolfram Mathematica, ktorú nájdeme na stránke [68].

V prípade, že chceme vedieť iba počet iterácií, ktoré sú potrebné na únik do nekonečna, postačí nám zadať hodnoty  $c_r$ ,  $c_i$  a **lim**.

```
mandelbrot [0.4 , 0.2 , 100]
```

```
Out [1] -31
```

Začínajúc z bodu  $z = 0$  a  $c = 0,4 + 0,2i$  je teda potrebných 31 iterácií na únik za hranicu  $|z| > 2$ . Na obrázku 27 vidíme, aké hodnoty nadobúda postupnosť začínajúca práve v spomínaných začiatočných bodoch. Hodnoty pri 30. iterácii sú:  $z = -1,366 + 0,215i$  a  $|z| = \sqrt{(-1,366)^2 + (0,215)^2} \doteq 1,383 < 2$ . Pri 31. iterácii už má číslo  $z$  tvar  $z = 2,219 - 0,387i$  a hodnotu  $|z| \doteq 2,252 > 2$ .



Obr. 27: Generovanie postupnosti (3) pomocou Excelu,  $c = 0,4 + 0,2 \cdot i$ .

Nasledujúci kód tiež definuje Mandelbrotovu funkciu. Funkciu potrebujeme pri kreslení grafov vyčísliť veľa krát, preto sa nám oplatí použiť príkaz *Compile*, vďaka ktorému bude program „bežať“ rýchlejšie.

```

mandelbrotC = Compile[{ cr , ci , lim } ,
  Module[ { z = 0. + I 0. , ct = 0 } ,
    While [Abs [z] < 2.0 && ct <= lim ,
      z = z^2 + cr + I ci ;
      ++ct
    ];
    -ct
  ]
];

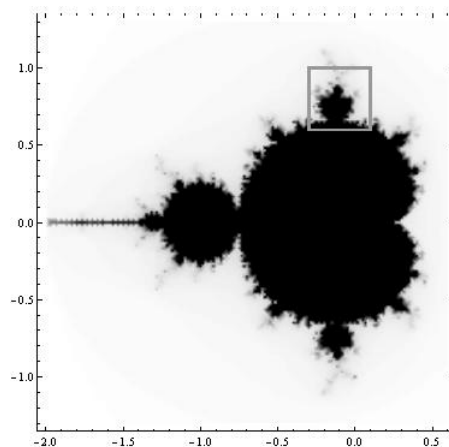
```

Hodnota funkcie, ktorá je vykreslená, je charakterizovaná stupňom „černoty“ v príkaze *DensityPlot*. Čím je číslo menšie, tým je graf černejší. Keďže vo funkcii *mandelbrotC* počítame iterácie ako záporné číslo, najtmavšia časť obrázku 28 je tá, kde funkcia vráti hodnotu  $-(\mathbf{lim} + 1)$ .

```

DensityPlot [
  mandelbrotC[cr , ci , 100], {cr , -2, 0.6} , {ci , -1.3, 1.3} ,
  PlotPoints -> 40, Mesh -> False , ColorFunction -> GrayLevel ,
  Epilog -> {{ GrayLevel[0.6] , Thickness[0.008] ,
    Line[{{ -0.3, 0.6} , { -0.3, 1} , { 0.1, 1} , { 0.1, 0.6} , { -0.3,
      0.6} }]}]}]

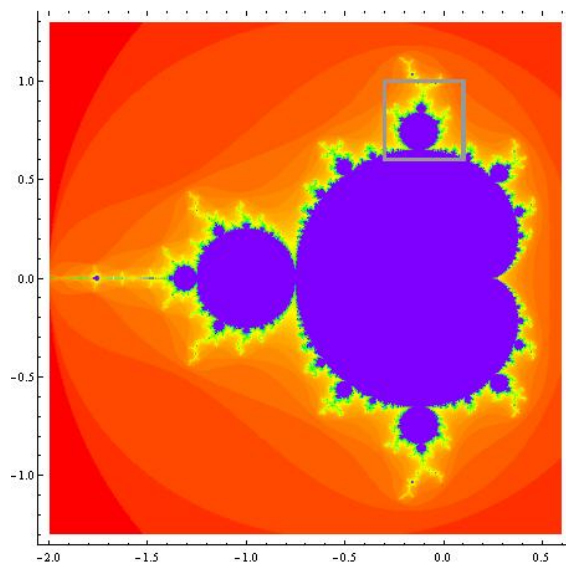
```



**Obr. 28:** Mandelbrotova množina v odtieňoch čiernej, výpočet zrealizovaný podľa [69].

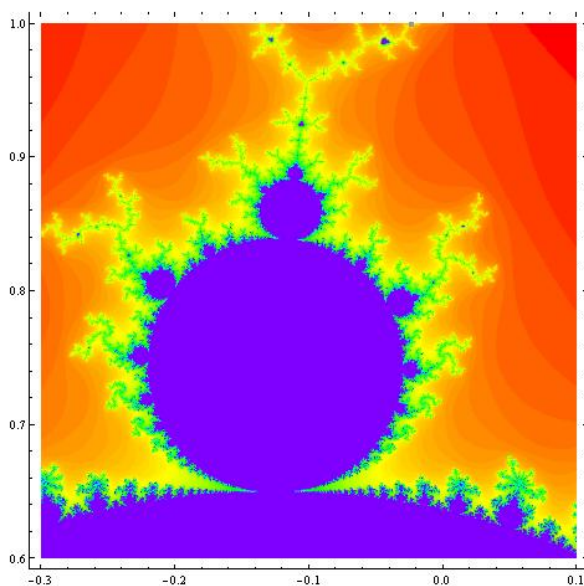


Nasledujúci obrázok 29 ukazuje množinu s lepšími výsledkami a vo farebnom prevedení (voľba *ColorFunction*). Oblasť zafarbená modrou farbou potrebujú väčší počet iterácií na únik za stanovenú hranicu, červené oblasti potrebujú iba pár iterácií.



**Obr. 29:** Farebná Mandelbrotova množina, výpočet zrealizovaný podľa [69].

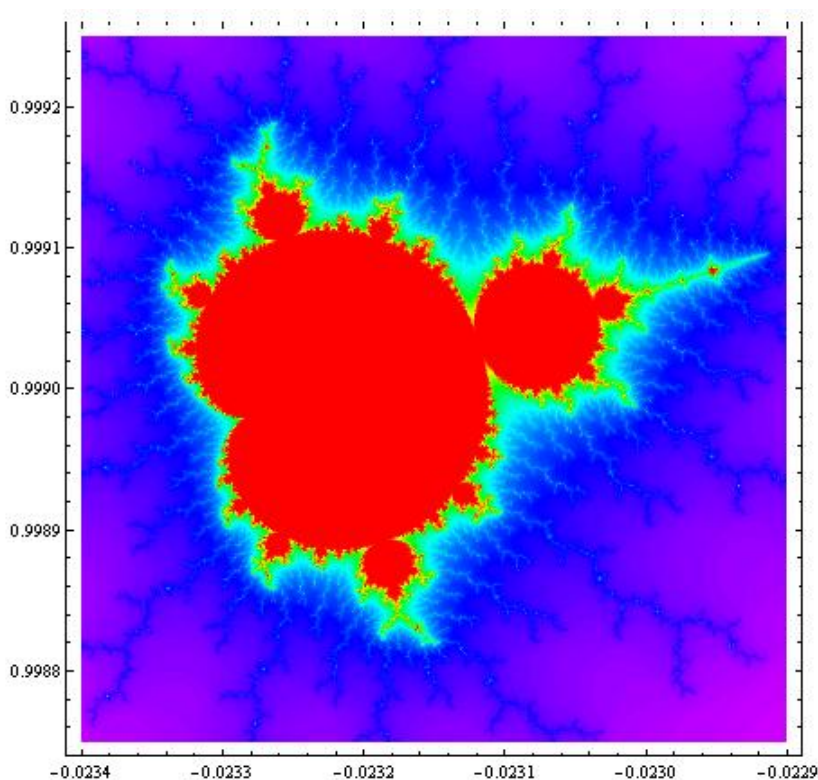
Na obrázku 30 vidíme priblíženú časť obrázku 29, konkrétne oblasti v sivom ráme. Všimnime si, že rovnaká štruktúra je opakovaná v rôznych mierkach a na rôznych častiach, čo je typické pre fraktály. [69]



**Obr. 30:** Priblíženie Mandelbrotovej množiny z obrázku 29, výpočet zrealizovaný podľa [69].

Ešte bližšie priblíženie môžeme vidieť na obrázku 31, ktorý vyobrazuje oblasť súradníc v okolí bodu  $cr = -0.023, ci = 1$ . Na detailnejšie zobrazenie štruktúry sa využíva nastavenie maximálneho počtu iterácií, v tomto prípade na hodnotu 1000. Potrebný kód na vykreslenie tejto časti Mandelbrotovej množiny:

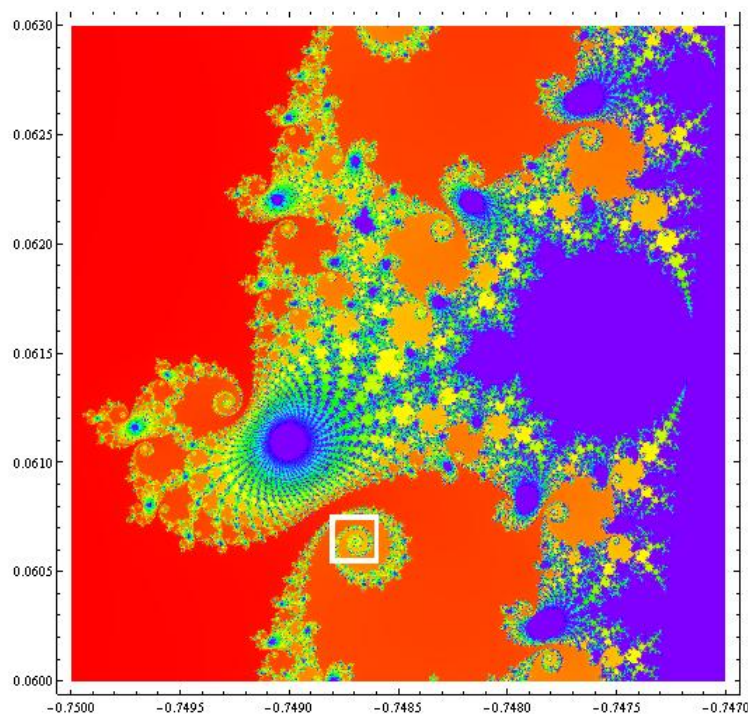
```
DensityPlot[mandelbrotC[cr, ci, 1000], {cr, -0.0234, -0.0229},
{ci, 0.99875, 0.99925}, PlotPoints -> 200, Mesh -> False,
ColorFunction -> (Hue[0.8 #1^7] &)]
```



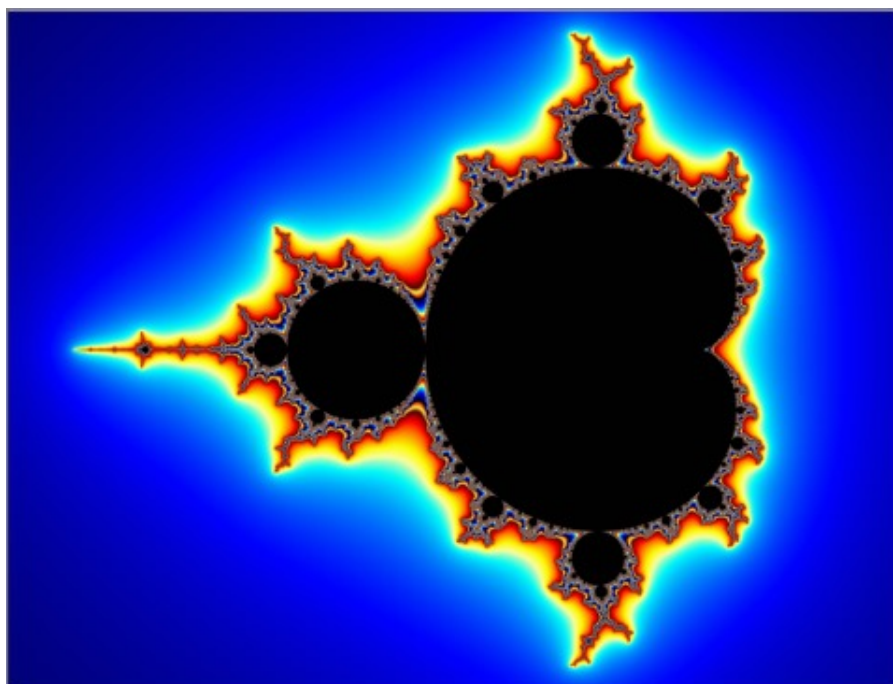
**Obr. 31:** Zvýšenie počtu iterácií, výpočet zrealizovaný podľa [69].

Na ďalšom obrázku vidíme zväčšenie ľavého „špicu“ množiny z obrázku 29. V tomto vyobrazení je mierka takmer tisíckrát väčšia ako v prípade obráku 29.

Pohľadnica na obrázku 33 je farebnou verziou typického zobrazenia Mandelbrotovej množiny. Vyššie sme vysvetlili, prečo je obrázok farebný, aj keď sú pri vykresľovaní množiny pre jednotlivé body len dve možnosti - buď bod do množiny patrí alebo nepatrí.



Obr. 32: Mandelbrot, výpočet zrealizovaný podľa [69].



Obr. 33: Pohľadnica: Typický obrázok Mandelbrotovej množiny. [34]

## 2.3 Fraktály okolo nás

Pre mnohých môže byť záhadou, kde všade okolo nás nájdeme fraktály. Nejedná sa len o premyslené diela vedcov, ako by sa mohlo na prvý pohľad zdať, hlavné slovo tu má príroda sama. Na opakovanie štruktúry nie je nič neprirodzené.

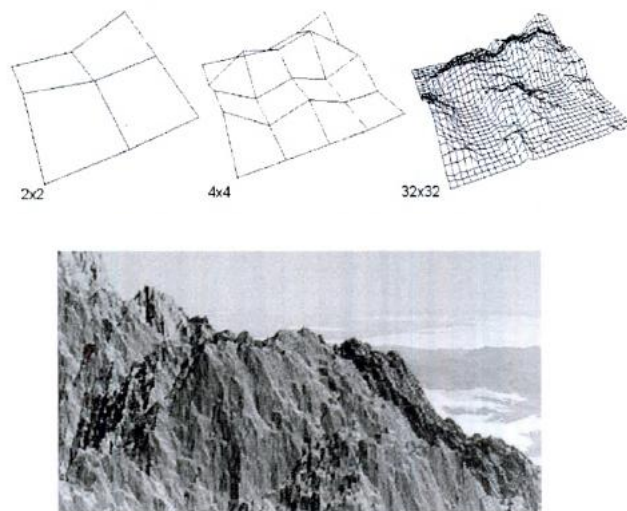
Pripomenieme si teda vlastnosť sebedobnosti. V matematickom ponímaní je táto vlastnosť známa skôr pod pojmom invariance voči zmene mierky. Teda objekt, na ktorý sa pozeráme, vyzerá podobne pri akomkoľvek zväčšení. [60] Sebedobnosť je teda prítomná aj v prírode a jedným z príkladov môže byť napríklad karfiol na obrázku 34, ktorý má túto vlastnosť. Jeho tvar sa v ňom samom opakuje v rôznych mierkach.



**Obr. 34:** Pohľadnica: Fraktálny karfiol. [18]

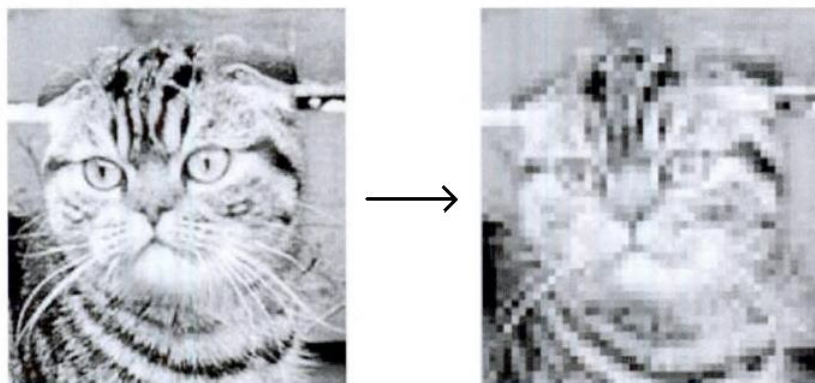
Ako sa ďalej dočítame v [35], rôzne druhy fraktálov a vlastnosť sebedobnosti sú aplikované v rôznych oblastiach. Svoje využitie nájdú napríklad v počítačovej grafike alebo virtuálnej realite. V [26] sa tiež uvádza, že je možné vytvoriť mnoho fraktálov. Dajú sa generovať mestá, pohoria (obrázok 35), oblaky, či dokonca 3D objekty na vyplnenie krajiny. Podľa [60] sú sebedobné súčasti živej aj neživej prírody ako kameň, mraky, stromy aj rastliny. Ďalej sa tu tiež uvádza, že javy ako vetvenie stromov, vetvenie ciev a žíl v živočíchoch alebo hromadenie baktérií a rias v kolóniách, sa dajú spoľahlivo popísať iba pomocou fraktálnej geometrie. Fraktály tiež slúžia k modelova-

niu a porozumeniu zložitejších dejov odohrávajúcich sa v čase, teda ide o dynamické javy.



**Obr. 35:** Generovanie fraktálneho pohoria. [35]

V terminológii počítačovej grafiky bol pojem fraktálneho objektu zovšeobecnený mimo Mandelbrotovej pôvodnej definície. [17] Aplikácia fraktálnej geometrie v tomto obore je v kompresii obrázkov. Takáto fraktálna kompresia sa uskutočňuje lokalizovaním sebedobných častí obrázku a následného použitia fraktálneho algoritmu na generovanie celých častí. Na obrázku 36 vidíme, ako opakovaná kompresia a dekompresia obrázku spôsobí postupnú stratu kvality. [35]



**Obr. 36:** Kompresia a dekompresia obrázku, pri ktorej dochádza k strate kvality. [35]



## 3 Bludiská

Výraz bludisko poznáme všetci. Neraz sme sa ocitli v situáciách, v ktorých sa nám nedarilo nájsť správnu cestu. A presne to vyjadruje tento pojem.

V tejto časti sa pozrieme na historické pozadie vzniku bludísk a labyrintov. Vysvetlíme súvislosti medzi teóriou grafov a bludiskami a uvedieme spôsoby nájdenia cesty z bludísk. Inšpiráciou je pre nás pohľadnica bludiska vo francúzskej katedrále v Chartres, ktorú vidíme na obrázku 37.



Obr. 37: Pohľadnica: Bludisko v katedrále v Chartres, Francúzsko. [47]

### 3.1 Niečo málo z histórie

Najznámejší mýtus o labyrinte je podľa [16] grécka legenda o Tézeevi a Minotaurovi. Príbeh, v ktorom aténsky princ Tézeeus zabije Minotaura - napoly býka a napoly človeka, ktorý sa ukrýva v labyrinte postavenom pre krétskeho kráľa Minosa. Podľa legendy boli Aténčania nútení poslať sedem mládencov a sedem panien ako poctu víťazovi vojny - kráľovi Minosovi. Pomocou kľbka od Ariadny, dcéry kráľa Minosa, nájde po hrdinskom čine Tézeeus cestu z labyrintu a spolu s Ariadnou utečie. Na obrázku 38 vidíme pohľadnicu vyobrazujúcu detail zabitia Minotaura.

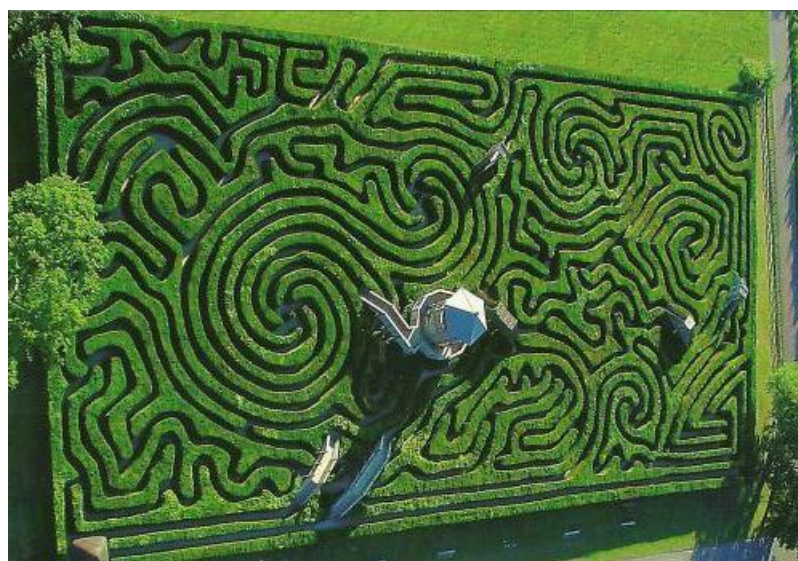
Pri archeologickom výskume paláca kráľa Minosa sa nezistili žiadne informácie o existencii labyrintu, aj keď samotná budova má tento charakter, ako sa dočítame v [16].



**Obr. 38:** Pohľadnica: Doska zobrazujúca zabitie Minotaura Téseom z Acropolisu. [42]

Pôvod slova labyrint sa odvodzuje od pojmu „labrys“, ktorý pomenovával obojstrannú sekeru, zbraň používanú v časoch vlády kráľa Minosa okolo roku 1700 pred n.l.

V [12] sa dozvieme, že labyrint alebo bludisko je systém spleťtých chodieb a slepých uličiek. *Labyrinth* bol názov budov daný starými Grékmi a Rimanmi, ktoré boli úplne alebo čiastočne podzemné, obsahovali niekoľko komôr a chodieb, ktoré ťažko poskytovali východ. Neskôr, najmä od európskej renesancie, sa labyrinty alebo bludiská objavovali vo formálnych záhradách, skladajúcich sa zo spleťtých ciest oddelených vysokými živými plotmi, ako vidíme na pohľadnici na obrázku 39.



**Obr. 39:** Pohľadnica: Záhradné bludisko, Anglicko, Longleat, Wiltshire. [40]

### 3.2 Katedrála v Chartres

Jednými z mnohých miest, kde môžeme nájsť bludiská, sú aj chrámy a katedrály. V stredoveku bolo vytvorených viacero labyrintov na dlažbe cirkevných budov: Reims, Amiens, Saint-Quentin. Zjavili sa tam ako podpis sponzorov a staviteľov s údajmi mien na stredovej tabuli. [5]

Ako príklad si môžeme zobrať práve gotickú katedrálu v meste Chartres na severe Francúzska vzdialeného od Paríža len 96 kilometrov. Stavba katedrály bola začatá v roku 1145 a počas 26-ročného obdobia prestavaná po požiari v roku 1194. Katedrála v Chartres je zapísaná v zozname svetového dedičstva. Táto katedrála, ako sa tiež dočítame na stránke UNESCO [64], predstavuje vysoký bod francúzskeho gotického umenia aj vďaka pozoruhodným oknám z farebného skla z dvanásteho a trinásteho storočia, ktoré sú vo veľmi dobrom stave.



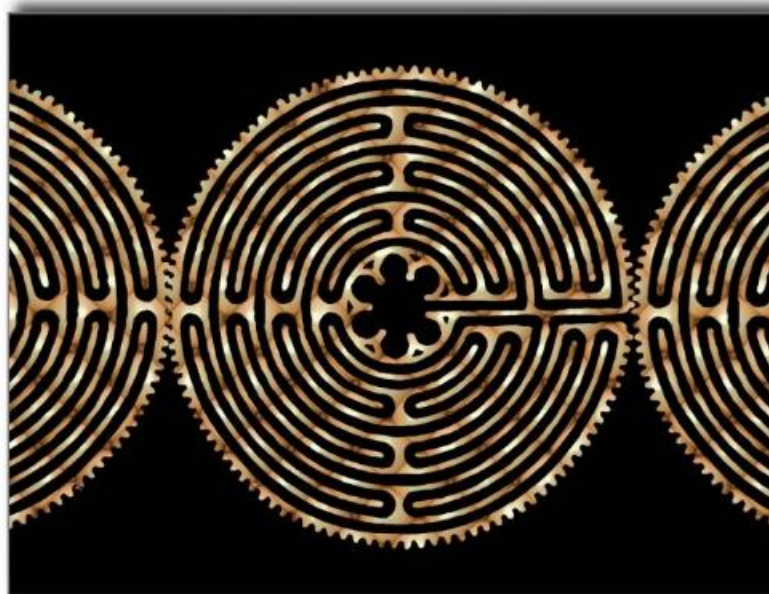
Obr. 40: Pohľadnica: Katedrála v Chartres, Francúzsko. [39]



V katedrále sa nachádza bludisko, ktoré je vyobrazené na pohľadnici na obrázku 37. Najnovšie objavy podľa [5] ukazujú, že labyrint bol pôvodne určený na modlitbu veľkonočných vešpier, ktoré boli oslavou, pri ktorej si Cirkev pripomínala Kristovo víťazstvo nad smrťou. Udivujúce tance zobrazovali prechod podsvetím, zázrak otvoreného hrobu a fakt, že zmŕtvychvstanie sa týka všetkých ľudí.

### 3.2.1 Geometria v katedrále

Teraz ukážeme, ako možno vytvoriť útvar, aký je v strede bludiska v katedrále v Chartres, ktoré vidíme detailnejšie zobrazené na obrázku 41. Budeme sa riadiť návodom zo stránky k predmetu *Creative Geometry* na State College of Florida [7]. Ide o rovnaký útvar, aký sa nachádza v katedrále. Rozdiel je len v tom, že v prípade katedrály je tento útvar narušený cestičkou labyrintu.

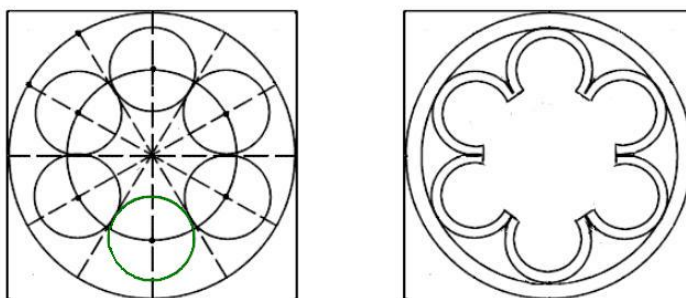


Obr. 41: Pohľadnica: Labyrint v Chartres. [6]

Útvar, ktorý pripomína kvet, nie je ťažké zostrojiť. Celý postup má len niekoľko jednoduchých krokov:

1. Začneme zostrojením štvorca a nájdením jeho stredu pomocou uhlopriečok.
2. V nájdenom strede štvorca skonštruujeme vpísanú kružnicu.

3. Kružnicu rozdelíme na štvrtiny a každú štvrtinu na tretiny. Dostávame tak kružnicu rozdelenú na 12 rovnakých častí.
4. Zostrojíme ďalšiu kružnicu, ale tentokrát s menším polomerom. Tento polomer by mal byť podľa návodu v [7] polovicou polomeru pôvodnej kružnice. Na obrázku 42 však vidíme, že príslušný náčrt, ktorý je tiež prebratý z [7], nemá túto vlastnosť. Ukážeme, že táto požiadavka nie je podstatná. Týmto spôsobom nájdeme ďalších 6 stredov pre menšie kružnice.
5. Skonstruujeme 6 malých vpísaných kružníc, na obrázku 42 označených zelenou farbou. Tieto kružnice sa navzájom dotýkajú. Tento fakt vysvetlíme nižšie a ukážeme, že nezávisí od polomeru menšej kružnice.
6. Zvýrazníme okraje malých kružníc a dorobíme vonkajšie okraje.

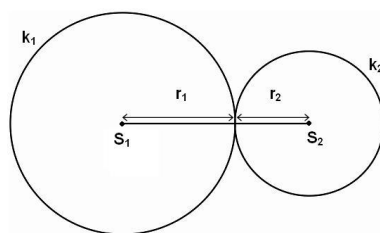


**Obr. 42:** Obrázky k návodu na zostrojenie útvaru v strede bludiska. [7]

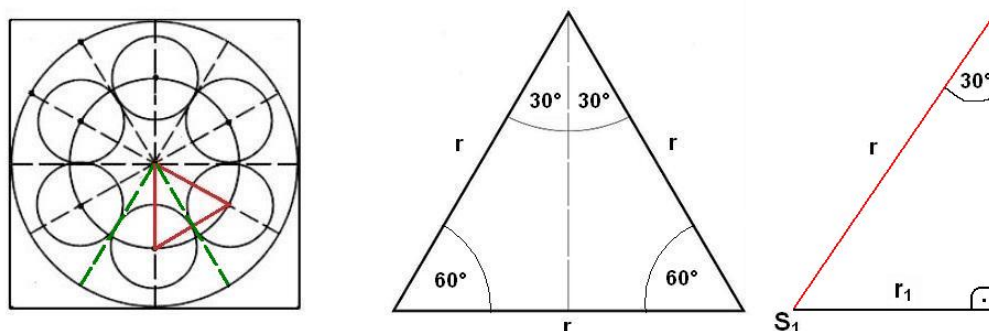
Zostáva nám teda ešte vysvetliť, prečo by sa mali malé vpísané kružnice navzájom dotýkať. Dôvod je veľmi jednoduchý.

Ako dobre poznáme z geometrie, dve kružnice sa navzájom dotýkajú zvonka v jednom bode, ak platí, že vzdialenosť ich stredov je rovná súčtu ich polomerov. [70] Predpokladajme, že máme 2 kružnice  $k_1(S_1, r_1)$  a  $k_2(S_2, r_2)$ . Aby sa dotýkali tieto dve kružnice zvonka v jednom bode, musí platiť rovnosť  $|S_1S_2| = r_1 + r_2$ , ako vidíme na obrázku 43.

Našou úlohou je teda zistiť, aká je požadovaná vzdialenosť stredov kružníc. Na obrázku 44 vidíme, že strany červeného trojuholníka majú dĺžku polomeru  $r$  menšej kružnice a zvierajú  $60^\circ$  uhol. Kvôli tomuto je aj tretia strana dlhá presne  $r$ . Teda trojuholník, ktorý tu vznikne, je rovnostranný.



**Obr. 43:** Vzájomná poloha dvoch kružníc, vonkajší dotyk.



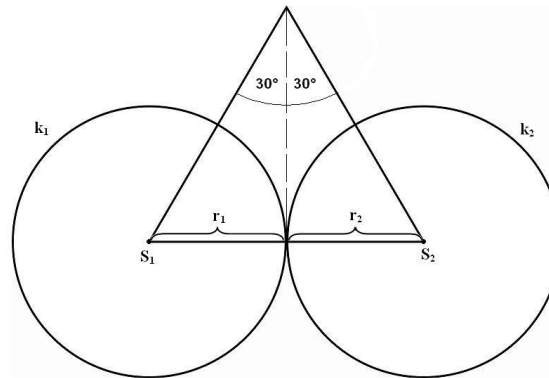
**Obr. 44:** Dotýkajúce sa kružnice, rovnostranný trojuholník a konštrukcia malej kružnice.

To má za následok, že stredy kružníc sú od seba vzdialené o polomer  $r$ . Všetky malé kružnice sú zhodné, a teda majú rovnaký polomer. Jeho dĺžku určíme na základe konštrukcie malej kružnice. Tá bola zostrojená tak, aby sa dotýkala úsečiek, ktoré sú na obrázku 44 vľavo vyznačené zelenou. To znamená, že v bode dotyku zvierajú polomer so zelenou úsečkou pravý uhol. Obrázok 44 vpravo znázorňuje detail. Platí teda:

$$r_1 = r \cdot \sin 30^\circ = \frac{r}{2}.$$

Dostávame, že  $r_1 = r_2 = \frac{r}{2}$ , teda  $|S_1S_2| = r_1 + r_2$  a susedné kružnice sa navzájom dotýkajú.

Na záver ešte doplníme podmienku, pri ktorej sa malé kružnice zmestia do veľkej. Súčet polomeru menšej kružnice (na obrázku 44 vyznačený červenou farbou, označili sme ho  $r$ ) a polomeru malých vpísaných kružníc (vypočítali sme, že sa rovná  $\frac{r}{2}$ ) musí byť menší ako polomer veľkej kružnice. Ak polomer veľkej kružnice označíme  $R$ , musí platiť  $r < \frac{2}{3}R$ . Tomuto vyhovuje napríklad inštrukcia z [7], podľa ktorej  $r = \frac{1}{2}R$ . Nie je to však jediná možnosť, preto konštrukcia fungovala aj pre polomer, ktorý je na obrázku v [7] o niečo väčší. Všimnime si, že rôznou voľbou  $r$  dostaneme rôznu šírku okraja.



**Obr. 45:** Detail - rovnostranný trojuholník a dotýkajúce sa kružnice.

### 3.3 Algoritmy na riešenie bludísk

Už od nepamäti sa vyskytovali rôzne úlohy a s nimi aj postupy na ich riešenie. Ako sa dočítame v [36], neboli to len úlohy na zabezpečenie pohodlia alebo potravy, ale tiež úlohy, ktoré vyžadovali počítanie. S rozvojom počítania sa preto objavujú aj algoritmy na sčítovanie či násobenie. Jedným z najznámejších algoritmov je Euklidov algoritmus na nájdenie najväčšieho spoločného deliteľa dvoch prirodzených čísel, s ktorým sme sa už stretli v prvej kapitole.

Vysvetlíme teda najprv pojem algoritmus. V knihe [36] sa pod pojmom algoritmus rozumie postup, ktorý nás dovedie k riešeniu úlohy. Tento postup má mať nasledovné vlastnosti:

- determinovanosť - postup je zadaný vo forme konečného počtu jednoznačných pravidiel,
- hromadnosť - jedným algoritmom možno riešiť celú triedu úloh rovnakého druhu,
- efektívnosť - zaručiť vyriešenie úlohy po konečnom počte krokov.

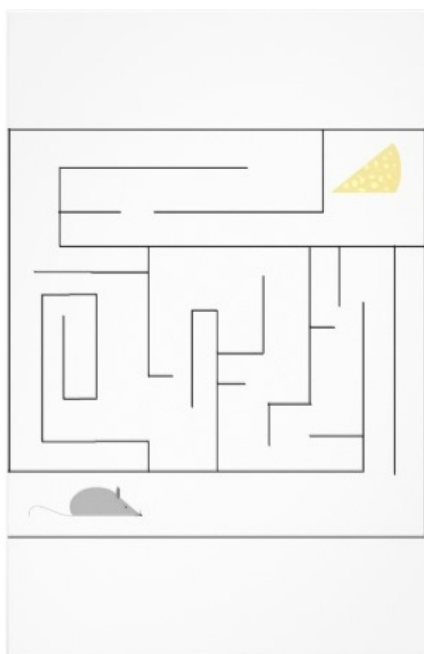
Pre niektoré úlohy je existencia algoritmu celkom zrejma. Podľa [36] v mnohých kombinatorických a grafových úlohách stačí na vyriešenie úlohy preskúšať všetky dostupné možnosti. Takýchto možností však býva veľmi veľa, a preto je rozumné hľadať lepší algoritmus. Ukázalo sa, že má zmysel posudzovať algoritmy podľa času alebo počtu elementárnych operácií, ktoré sú potrebné na vyriešenie problému.

### 3.3.1 Hľadanie cesty

V knihe [22] sa uvádza: „Ak chceme začať riešiť problém zo života matematickými metódami, musíme najskôr uskutočniť matematickú analýzu problému, potom úlohu transformovať na matematický problém, ten vyriešiť a výsledky spätne interpretovať do problému z reálneho života.“

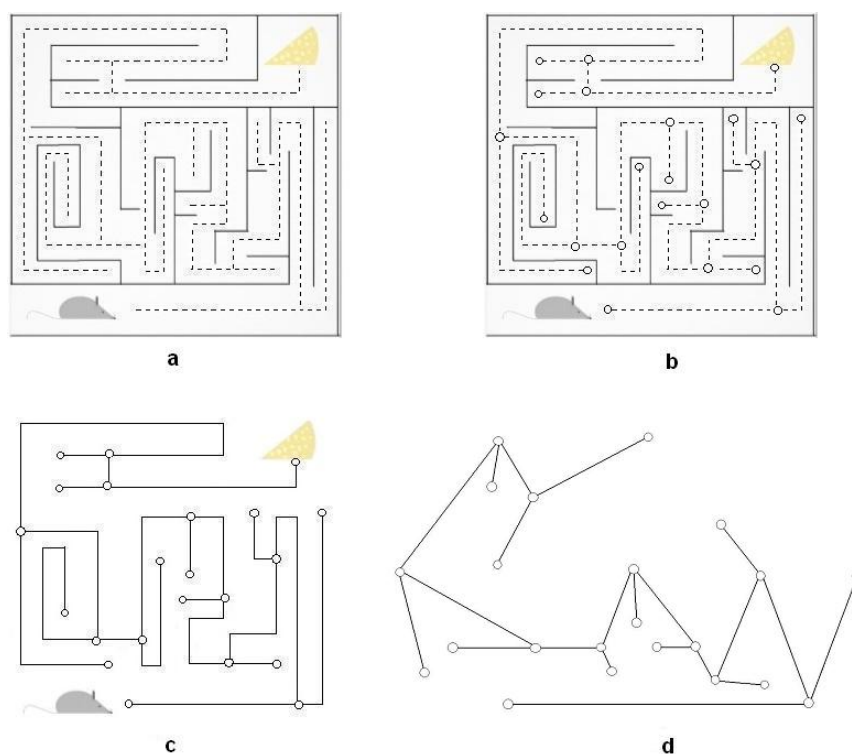
S hľadaním cesty v bludisku je to podobne. Táto úloha úzko súvisí s teóriou grafov. Uvedieme teda, ako je možné transformovať mapu labyrintu na graf. Podľa [36] je jednou zo základných úloh na grafoch zistiť, či medzi sebou nejaké dva vrcholy súvisia. Uvidíme, že v prípade bludiska to zodpovedá úlohe zistiť, či sa z jedného miesta bludiska vieme dostať do druhého.

Ako sa ďalej dočítame v [22], mapu labyrintu je možné transformovať na graf mnohými spôsobmi. Ukážeme jeden z nich, ktorý patrí medzi tie jednoduchšie a ľahko pochopiteľné, aj keď nie najefektívnejšie, čo sa týka počtu vrcholov a hrán v grafe. Budeme tento postup ilustrovať na jednoduchom bludisku z pohľadnice na obrázku 46.



**Obr. 46:** Pohľadnica: Bludisko na ilustráciu transformácie na graf podľa teórie grafov. [32]

Pretvorenie bludiska na graf ilustrujeme na obrázku 47. Najprv si v bludisku čiarkovanými čiarami vyznačíme všetky možné cesty. Pozri obrázok 47 a. Pokračujeme označením križovatiek a konce ciest krúžkami, ako je znázornené v časti 47 b. V ďalšom kroku, obrázok 47 c, nahradíme čiarkované čiary obyčajnými a zmažeme obrázok labyrintu. V poslednom kroku nahradíme lomené čiary rovnými a dostávame grafovú reprezentáciu labyrintu, viď 47 d.



**Obr. 47:** Prechod z bludiska na graf.

Téma prieskumu labyrintov začala byť zaujímavá pre matematikov najmä na konci 19. storočia. Ako sa ďalej uvádza v [22], mnohé problémy zaoberajúce sa prieskumom labyrintov možno preto nájsť práve v knihách z tohto obdobia. Jedným z týchto problémov je hľadanie cesty medzi dvoma miestami v bludisku a druhým problémom je, ako s istotou prejsť celé bludisko.

Ak chceme preskúmať labyrint tak, že prejdeme každou chodbou a každou križovatkou, potom musíme nájsť takú postupnosť vrcholov a hrán v grafe, ktorá obsahuje všetky jeho vrcholy a hrany.

### Tarryho prieskum grafov

Postupov na prechod bludiskom je viacero. Jedným z nich je Tarryho spôsob nájdenia cesty z labyrintu. Táto metóda úniku z labyrintu sa riadi podľa nasledujúcich dvoch pravidiel. [36]

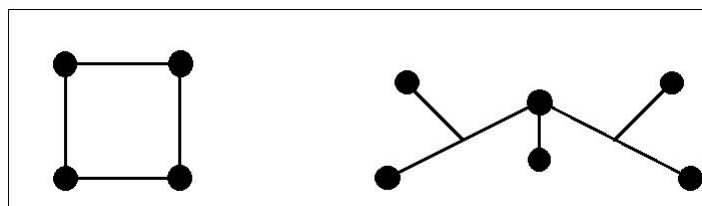
(T1) Každou hranou môžeme v jednom smere prechádzať nanajvýš raz.

(T2) Po tej hrane, po ktorej sme prišli do nejakého vrcholu prvýkrát, môžeme ísť späť iba vtedy, ak niet inej možnosti.

V [22] aj v [36] sa najskôr dozvedáme, že Tarryho prieskum grafov je konečný (nemôže sa teda stať, že sa zacyklí). Dôvod je jednoduchý: graf má konečne mnoho hrán a každou hranou môžeme podľa (T1) prejsť iba jedenkrát v každom smere, a teda aj celý algoritmus je konečný.

Naviac v [36] nájdeme nasledujúce tvrdenie: Ak pravidlá (T1) a (T2) nedovoľujú vytvoriť dlhší sled, tak posledný vrchol sledu je štartovací vrchol  $s$ . Tento sled je teda uzavretý a navyše každá hrana komponentu grafu obsahujúceho  $s$  je prejdená oboma smermi.

Toto tvrdenie teraz dokážeme a budeme sa riadiť knihou [36]. Komponent grafu je taký súvislý podgraf tohto grafu, ktorý nie je obsiahnutý v žiadnom väčšom súvislom podgrafe grafu, teda je to maximálne súvislý podgraf, viď obrázok 48.

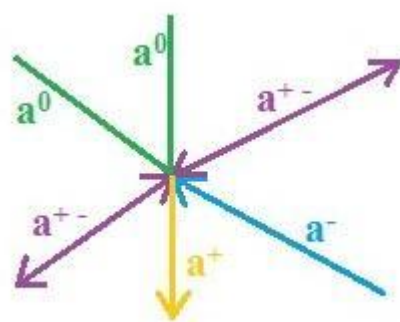


Obr. 48: Graf s dvomi komponentami.

Pojem sled predstavuje postupnosť vrcholov a hrán, ktorými je možné prechádzať. Nech je teda utvorený, podľa pravidiel (T1) a (T2), prípustný  $s - x$  sled  $Q$ , ktorý už nemožno predĺžiť. Tento sled začína v  $s$  a končí v  $x$  a nie je možné v ňom pokračovať, urobiť z neho ďalší krok. Ak by  $x \neq s$ , tak existuje hrana  $e$ , ktorou sme prišli do  $x$  prvýkrát. Z nepredĺžiteľnosti sledu však vyplýva, že hrana  $e$  je už prejdená aj v smere od  $x$ . Inak by sme sme mohli urobiť krok späť. Vrátime sa teda do okamihu tesne po tomto prejdení hrany  $e$ .

Všetky hrany susediace s  $x$  možno rozdeliť nasledovne:

- $a^0$  - počet hrán, ktoré sme vôbec neprešli,
- $a^-$  - počet hrán, ktorými sme do  $x$  len prišli,
- $a^+$  - počet hrán, ktorými sme z  $x$  len odišli,
- $a^{+-}$  - počet hrán, ktorými sme prišli aj odišli.



Obr. 49: Hrany grafu.

Z našich predpokladov potom máme, že počet príchodov a odchodov musí byť rovnaký, a tak musí platiť:  $a^+ + a^{+-} = a^- + a^{+-}$ . Keďže nemôžeme urobiť ďalší krok a predpokladáme, že už nezostali žiadne neprejudené hrany, tak musí platiť:  $a^0 = 0$  a tiež  $a^+ = 0$ . Teda aj  $a^- = 0$ , čo značí, že všetky hrany susediace s  $x$  sú už prejudené dvakrát. Po tomto odchode z  $x$  nemožno už nikdy do  $x$  prísť, čo hovorí pravidlo (T1). Tento spor tak dokazuje, že  $x = s$ , pričom sme predpokladali, že sme v  $x$  skončili.

Celý sled  $Q$  leží v komponente obsahujúcom  $s$ . Treba ešte ukázať, že každá hrana tohto komponentu je prejudená oboma smermi a nachádza sa v  $Q$  dvakrát. Nech  $u_0, u_1, \dots, u_q$  je poradie vrcholov, v akom sa v  $Q$  vyskytujú prvýkrát. Indukciou dokážeme, že všetky hrany susediace s  $u_r$  ( $r = 0, 1, \dots, q$ ) sú prejudené oboma smermi. Z  $u_0$  sme vyštartovali a teraz v ňom stojíme, takže počet odchodov sa rovná počtu príchodov, a preto každá hrana susediacia s  $u_0$  je prejudená oboma smermi. Teda tvrdenie pre  $u_0$  platí. Indukčný predpoklad je, že to platí aj pre  $k < r$ . Nech  $r > 0$  a nech  $u_k u_r$  je hrana, ktorou sme do  $u_r$  prišli prvýkrát. Pretože  $k < r$ , tak táto hrana je podľa indukčného predpokladu prejudená oboma smermi. Avšak po jej prejudení v smere od  $u_r$  už musia byť všetky



hrany susediace s  $u_r$  prejdene oboma smermi, čo platí vzhľadom na počet príchodov a odchodov, ako sme už uviedli vyššie pre  $x$ . Týmto je naše tvrdenie dokázané.

Inšpirovaní [22] ilustrujeme prechod grafom pomocou Tarryho algoritmu použitím farieb, aby bolo zrozumiteľné, aké kroky sme uskutočnili. Na začiatku majú všetky hrany čiernu farbu. Každá hrana spája dva vrcholy, a preto jej môžu byť priradené dve farby. Hrany budeme zafarbovať do polovice v závislosti od nasledujúcich jednoduchých pravidiel:

**(F1)** Ak vstupujeme do hrany označenej čiernou farbou, jej prvú polovicu zafarbíme na červeno. Jej druhú polovicu zafarbíme na modro, ak je táto hrana hranou prvého príchodu do vrcholu. Inak ju zafarbíme na zeleno.

**(F2)** Ak vchádzame do modrej alebo zelenej hrany, celú ju zafarbíme na žltu.

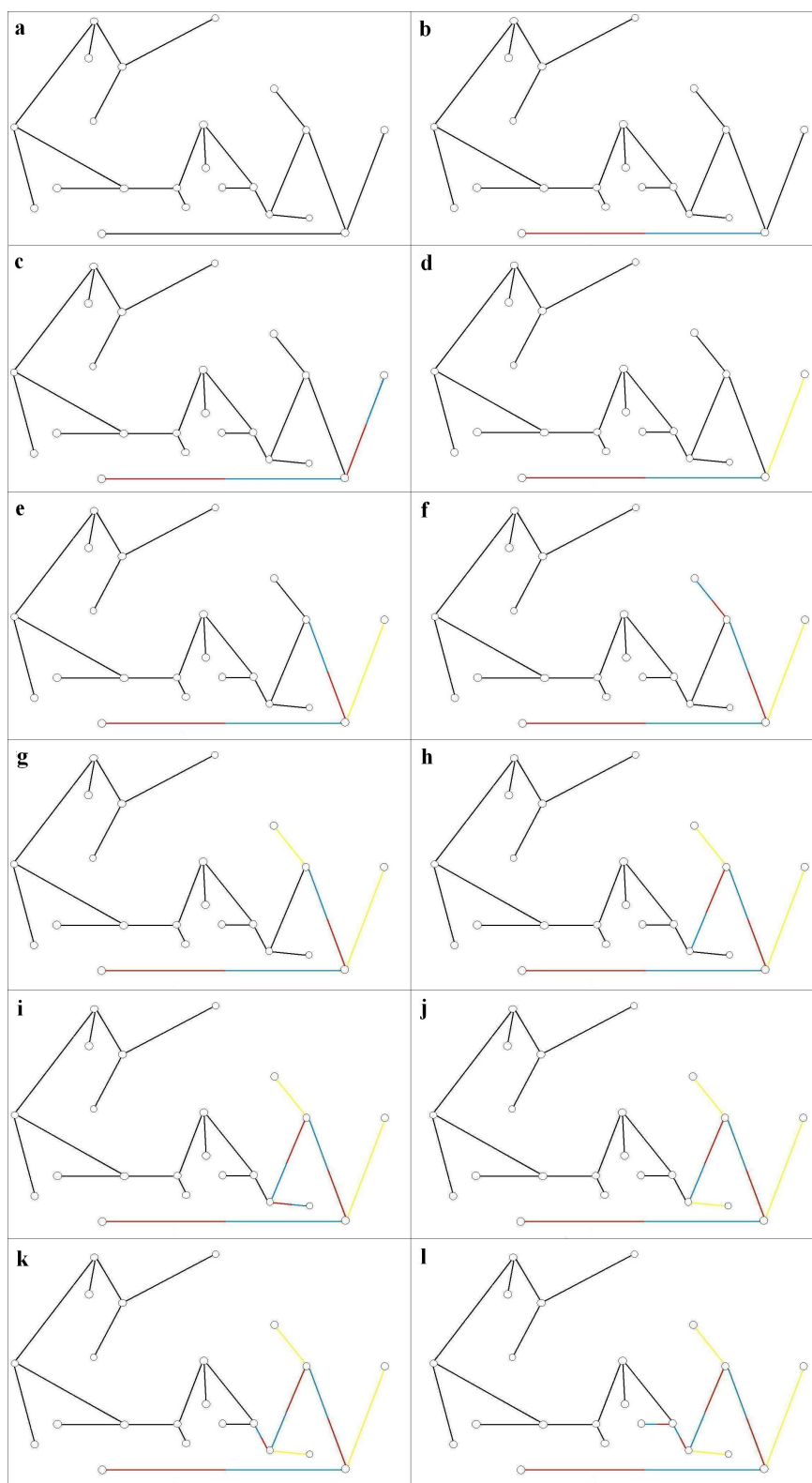
Vďaka týmto pravidlám budeme mať podľa [22] dostatok informácií, aby sme uskutočnili Tarryho prieskum podľa pravidiel (T1) a (T2). Nasledovné pravidlá (FT1) a (FT2) korešpondujú s Tarryho pravidlami pri farebne označených hranách, ktoré nájdeme v [22].

**(FT1)** V grafe sa môžeme pohybovať iba hranami, ktorých prvá polovica je čierna, modrá alebo zelená. Nemôžeme ísť po hranách, ktoré sú z prvej polovice zafarbené červenou alebo žltou farbou.

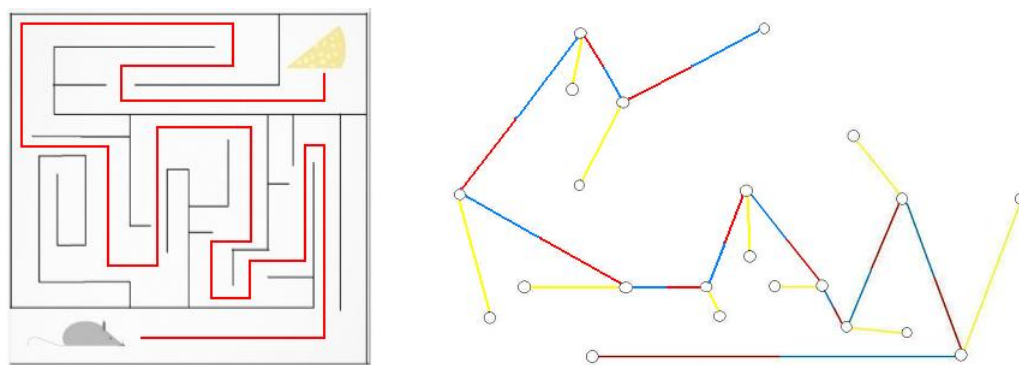
**(FT2)** Pri odchode z vrcholu volíme najprv hrany, ktorých prvá polovica je čierna alebo zelená. Ak také nie sú, vyberieme si hrany s prvou polovicou zafarbenou na modro.

Použitie pravidiel (F1), (F2), (FT1) a (FT2) ilustrujeme na grafe z obrázku 47 d. V našom prípade nie je použitá zelená farba. Dôvodom je, že graf, s ktorým pracujeme, neobsahuje prepojené vrcholy. Okrem hlavnej cesty obsahuje len slepé uličky, viď obrázok 50.

V [36] sa ďalej dočítame, že pre skutočný labyrint navrhuje Tarry zaznamenať prechody chodbami a smery nasledovne:



**Obr. 50:** Tarryho algoritmus aplikovaný použitím farieb.



Obr. 51: Nájdená cesta v pôvodnom bludisku a jeho grafe.

- Ak prechádzame chodbou prvýkrát, necháme na jej začiatku dve značky.
- Na jej konci potom zanecháme jednu značku, ak prichádzame do známeho, už predtým navštíveného rázcestia. Tri značky necháme na konci chodby, ak prichádzame do nového rázcestia.
- Ak sa vraciame chodbou, kde už na začiatku bola jedna značka, pridáme k nej ešte jednu. Na každom konci teda budeme mať dve značky.

Môžeme teda obe pravidlá (T1) a (T2) zhrnúť do jedného: Na ľubovoľnom rázcestí nemožno vstúpiť do chodby s dvoma značkami a možno vstúpiť do chodby so žiadnou alebo jednou značkou, a ak niet inej možnosti, tak aj do chodby s tromi značkami. [36]

### Trémauxov prieskum

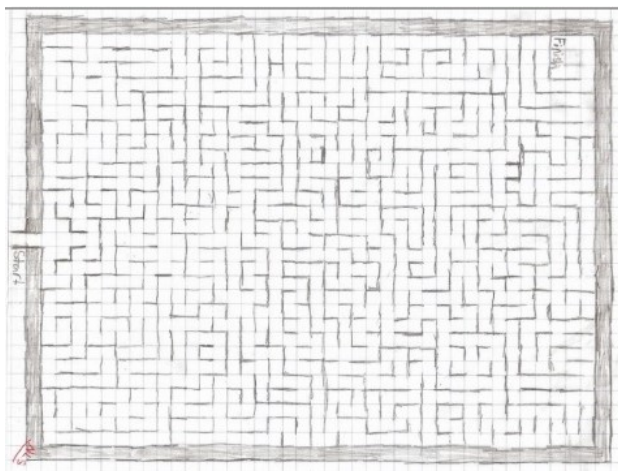
Špeciálnym prípadom Tarryho algoritmu je algoritmus, ktorý uverejnil Trémaux ešte pred Tarrym. V [36] sa ďalej uvádza, že k pravidlám (T1) a (T2) je doplnené nasledovné pravidlo:

- (T3) Ak prideme hranou prechádzanou prvýkrát do známeho vrcholu, tak hneď v nasledujúcom kroku sa touto hranou vraciame.

Pridaním tretieho pravidla (T3) k už spomínaným dvom Tarryho pravidlám máme zaručené, že v ľubovoľnom grafe, ktorý je reprezentáciou bludiska, nájdeme cestu z nami zvoleného vrcholu do ďalšieho ľubovoľného vrcholu. Tak ako pri Tarryho prieskume, aj pri Trémauxovom algoritme si musíme pamätať, ktorou hranou sme do daného

vrcholu prešli prvý raz. Pre jednotlivé hrany si tiež musíme pamätať, či sme danou hranou už išli. Ak sme túto hranu už použili, je potrebná aj informácia o smere. Pravidlo (T3) zaručí okamžitý návrat späť pri navštívení už známeho vrcholu, a to ho robí časovo efektívnejším. [22]

Na záver tejto kapitoly ponúkame niekoľko pohľadníc s bludiskami, ktoré môžu slúžiť na precvičenie Tarryho algoritmu.



Obr. 52: Pohľadnica: Bludisko. [48]



Obr. 53: Pohľadnica: Labyrint s dinosaurami, na precvičenie. [11]



Obr. 54: Pohľadnica: Bludisko so srdcom, na precvičenie. [29]

## Záver

V tejto práci sme ponúkli čitateľovi pozrieť sa na matematiku z trochu iného pohľadu, ako je bežné. Pre menej skúsených matematikov, či dokonca začiatočníkov, sme aj pomocou obrázkov a ilustrácií objasnili niekoľko zaujímavých pojmov a vyriešili príklady z matematických súťaží. Cieľom práce bolo nielen zaujať, ale najmä naučiť, že matematika má svoje miesto naozaj všade. Aj na pohľadniciach. Matematické olympiády a súťaže podobného charakteru sú pre mnohých postrachom. Spracovali sme teda niekoľko ukázkových príkladov s podrobným riešením, aby bolo vidno, že nič nie je nemožné. Predstavili sme najznámejšie fraktály - Kochovu vložku a Sierpinského trojuholník. Rovnako sme poskytli informácie ohľadom známej Mandelbrotovej množiny s podrobným návodom, ako takúto množinu vykresliť. V neposlednom rade sme ozrejmili, aké môže byť jednoduché nájsť cestu z bludiska a tiež, ako také bludisko celé preskúmať. Prínosom práce bolo predovšetkým zrozumiteľné vysvetlenie problematiky aj neskúsenému čitateľovi pomocou príkladov a obrázkov.

## Zoznam použitej literatúry

- [1] Alexanderson, G.L., Klosinski, L.F., Larson, L.C.: *The William Lowell Putnam Mathematical Competition Problems and Solutions 1965-1984*. The Mathematical Association of America, Washington, 1985.
- [2] Barnsley, M. F.: *Fractals Everywhere, Second Edition*. Morgan Kaufmann, Academic Press, 2000
- [3] Biography of John Wilder Tukey, dostupné na internete (9.2.2014):  
<ftp://cm.bell-labs.com/cm/stat/tukey/bio.html>
- [4] Carl Harald Cramer, dostupné na internete (9.2.2014):  
[http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cramer\\_Harald.html](http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cramer_Harald.html)
- [5] Cathédrale Notre-Dame de Chartres, dostupné na internete (26.11.2013):  
<http://www.cathedrale-chartres.org/fr/,121.html>
- [6] Chartres Labyrinth Pearl Dark Paths Postcard, dostupné na internete (4.3.2014):  
[http://www.zazzle.com/chartres\\_labyrinth\\_pearl\\_dark\\_paths\\_postcard-239810785638381489](http://www.zazzle.com/chartres_labyrinth_pearl_dark_paths_postcard-239810785638381489)
- [7] Chiffreller J.: *Tips & Tricks to Gothic Geometry*, študijné materiály, State College of Florida, 2002, dostupné na internete (28.2.2014):  
<http://faculty.scf.edu/condorj/256/presentations/Gothic%20Constructions.pdf>
- [8] Cohen, A.M., Cuypers, H., Sterk, H.: *Algebra Interactive!: Learning Algebra in an Exciting Way*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999.
- [9] Damiani, L.: osobná (mailová) komunikácia, Taliansko, 2013
- [10] Department of Mathematics, University of Illinois at Urbana - Champaign, dostupné na internete (5.2.2014):  
[http://www.math.uiuc.edu/People/princeton\\_photo.html](http://www.math.uiuc.edu/People/princeton_photo.html)
- [11] Dinosaurs labyrinth puzzle game postcard, dostupné na internete (30.3.2014):  
[http://www.zazzle.com/cute\\_cartoon\\_dinosaurs\\_labyrinth\\_puzzle\\_game\\_postcard-239968194741613323](http://www.zazzle.com/cute_cartoon_dinosaurs_labyrinth_puzzle_game_postcard-239968194741613323)

- [12] Encyclopaedia Britannica, dostupné na internete (22.2.2014):  
<http://www.britannica.com/EBchecked/topic/327066/labyrinth>
- [13] Encyclopaedia Britannica, dostupné na internete (12.5.2014):  
<http://www.britannica.com/EBchecked/topic/599686/topology>
- [14] Encyclopaedia Britannica, dostupné na internete (8.5.2014):  
<http://www.britannica.com/EBchecked/topic/958537/Waclaw-Sierpinski>
- [15] Ennio De Giorgi, dostupné na internete (22.5.2014):  
[http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/De\\_Giorgi.html](http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/De_Giorgi.html)
- [16] Fisher, A.: *Mazes and Labyrinths*. Shire, Princes Risborough, 2008.
- [17] Foley, J.D. et al.: *Computer Graphics: Principles and Practice, Second Edition in C*, Addison Wesley, New York, 1997
- [18] Fractal cauliflower postcard, dostupné na internete (18.4.2014):  
[http://www.zazzle.com/romanesco\\_broccoli\\_fractals\\_post\\_card-239734106909935024](http://www.zazzle.com/romanesco_broccoli_fractals_post_card-239734106909935024)
- [19] Gallian, J.A.: The Putnam Competition from 1938-2012, updated version of the article The first sixty-six years of the Putnam competition, *The American Mathematical Monthly* 111(2004), 733-735.
- [20] Gleason, A. M., Greenwood, R. E., Kelly, L. M.: *The William Lowell Putnam Mathematical Competition Problems and Solutions 1938-1964*. The Mathematical Association of America, Washington, 1980.
- [21] Gleick, J.: *Chaos - vznik nové vědy*. Ando Publishing, Brno, 1996
- [22] Híc, P., Pokorný, M.: *Vybrané problémy z teórie grafov*. MC Bratislava, 2004.
- [23] IMO: official website, dostupné na internete (16.12.2013):  
<http://www.imo-official.org/default.aspx>
- [24] IMOMath: Italy, dostupné na internete (9.2.2014):  
<http://www.imomath.com/index.php?options=Ita&mod=23&ttn=Italy>



- [25] Indiana University Home Pages, dostupné na internete (9.2.2014):  
<http://homepages.indiana.edu/011901/text/fastfacts.html>
- [26] Ivan, I.: *GeoComputation*, študijné materiály, Institut geoinformatiky, VŠB - TU Ostrava, 2013, dostupné na internete (10.12.2013):  
[http://gislinb.vsb.cz/~iva026/?page\\_id=805](http://gislinb.vsb.cz/~iva026/?page_id=805)
- [27] Klosinski, L.F., Alexanderson, G.L., Hillman, A.P.: The William Lowell Putnam Mathematical Competition, *The American Mathematical Monthly* 87 (1980), 634-640, dostupné na internete (4.12.2013):  
<http://www.jstor.org/stable/2320950>
- [28] Koch snowflakes postcard, dostupné na internete (16.4.2014):  
[http://www.zazzle.com/koch\\_snowflakes\\_printed\\_napkins-185992453395477194?pt=postcard-239210874851048220](http://www.zazzle.com/koch_snowflakes_printed_napkins-185992453395477194?pt=postcard-239210874851048220)
- [29] Labyrinth Heart Postcard, dostupné na internete (30.3.2014):  
[http://www.zazzle.com/labyrinth\\_heart\\_postcard-239595614144980402](http://www.zazzle.com/labyrinth_heart_postcard-239595614144980402)
- [30] Mandelbrot, B.: *The Fractal Geometry of Nature*. W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1982
- [31] Mathematical Association of America: official website, dostupné na internete (30.1.2014):  
<http://www.maa.org/programs/maa-awards/putnam-competition-individual-and-team-winners>
- [32] Mouse and Cheese Maze Postcard, dostupné na internete (4.3.2014):  
[http://www.zazzle.com/mouse\\_and\\_cheese\\_maze\\_post\\_card-239522398765002107](http://www.zazzle.com/mouse_and_cheese_maze_post_card-239522398765002107)
- [33] Nicolo Tartaglia, dostupné na internete (8.2.2014):  
<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Tartaglia.html>
- [34] Original Mandelbrot Set 03 - Fractal Postcard, dostupné na internete (12.5.2014):  
[http://www.zazzle.com/original\\_mandelbrot\\_set\\_03\\_fractal\\_postcard-239146111188713594](http://www.zazzle.com/original_mandelbrot_set_03_fractal_postcard-239146111188713594)

- [35] Orsucci, F. F., Sala, N.: *Developments in Chaos and Complexity Research*. Nova Science Publishers, Inc., New York, 2008
- [36] Plesník, J.: *Grafové algoritmy*. VEDA, vydavateľstvo Slovenskej akadémie vied, Bratislava, 1983.
- [37] Postcard: CA-86289, dostupné na internete (29.1.2014):  
<http://www.postcrossing.com/postcards/CA-86289>
- [38] Postcard: FI-607405, dostupné na internete (2.4.2014):  
<http://www.postcrossing.com/postcards/FI-607405>
- [39] Postcard: FR-81620, dostupné na internete (22.2.2014):  
<http://www.postcrossing.com/postcards/FR-81620>
- [40] Postcard: GB-146866, dostupné na internete (26.11.2013):  
<http://www.postcrossing.com/postcards/GB-146866>
- [41] Postcard: GB-383819, dostupné na internete (1.4.2014):  
<http://www.postcrossing.com/postcards/GB-383819>
- [42] Postcard: GR-30112, dostupné na internete (22.2.2014):  
<http://www.postcrossing.com/postcards/GR-30112>
- [43] Postcard: IT-104906, dostupné na internete (9.2.2014):  
<http://www.postcrossing.com/postcards/IT-104906>
- [44] Postcard: IT-71392, dostupné na internete (9.2.2014):  
<http://www.postcrossing.com/postcards/IT-71392>
- [45] Postcard: IT-87817, dostupné na internete (9.2.2014):  
<http://www.postcrossing.com/postcards/IT-87817>
- [46] Postcard: IT-91111, dostupné na internete (26.11.2013):  
<http://www.postcrossing.com/postcards/IT-91111>
- [47] Postcard: LV-93022, dostupné na internete (26.11.2013):  
<http://www.postcrossing.com/postcards/LV-93022>

- [48] Postcard Maze 1, dostupné na internete (30.3.2014):  
[http://www.zazzle.com/postcard\\_maze\\_1-239780323507152150](http://www.zazzle.com/postcard_maze_1-239780323507152150)
- [49] Postcard: RO-8462, dostupné na internete (29.1.2014):  
<http://www.postcrossing.com/postcards/RO-8462>
- [50] Postcard: US-1939423, dostupné na internete (29.1.2014):  
<http://www.postcrossing.com/postcards/US-1939423>
- [51] Postcard: US-689056, dostupné na internete (29.1.2014):  
<http://www.postcrossing.com/postcards/US-689056>
- [52] Prof. Václav Hlavatý: Život a dílo, dostupné na internete (9.2.2014):  
<http://www.mff.cuni.cz/fakulta/lib/hlavatdat.htm>
- [53] Progetto Olimpiadi della Matematica, dostupné na internete (9.2.2014):  
<http://olimpiadi.dm.unibo.it/>
- [54] Reiman I.: *International Mathematical Olympiad Volume 1: 1959 - 1999*. Anthem Science, Technology & Medicine, London, 2005.
- [55] Renteln, P., Dundes, A.: "*Foolproof: A Sampling of Mathematical Folk Humor.*", Notices American Mathematical Society 52 (2005), 24-34.
- [56] Sierpinski triangle postcard, dostupné na internete (2.4.2014):  
[http://www.zazzle.com/red\\_blue\\_but\\_not\\_khufu\\_keychains-146139131925193079?pt=postcard-239138035382040018](http://www.zazzle.com/red_blue_but_not_khufu_keychains-146139131925193079?pt=postcard-239138035382040018)
- [57] Singapore International Mathematical Olympiad (SIMO) Home Page, dostupné na internete (3.2.2014):  
<http://sms.math.nus.edu.sg/Simo/Simo.aspx>
- [58] The Sierpinski Triangle - Math is fun, dostupné na internete (9.5.2014):  
<http://www.mathsisfun.com/sierpinski-triangle.html>
- [59] The William Lowell Putnam Mathematical Competition and the Polya Problem-Solving Seminars 2013, dostupné na internete (3.2.2014):  
<http://math.stanford.edu/~ksound/Polya.html>

- [60] Tišnovský, P.: *Interaktivní editor afinních transformací*, diplomová práce, Vysoké učení technické, Fakulta elektrotechniky a informatiky, Ústav informatiky a výpočetní techniky, Brno, 1999, dostupné na internete (2.5.2014):  
<http://www.fit.vutbr.cz/~tisnovpa/publikace/diplomka/doc/ifscad.html>
- [61] Topological equivalence - animácia, dostupné na internete (16.5.2014):  
<http://visualizingmath.tumblr.com/post/54377596189/topological-equivalence-topology-is-the>
- [62] Topology, MathWorld - A Wolfram Web Resource, dostupné na internete (16.5.2014):  
<http://mathworld.wolfram.com/Topology.html>
- [63] Tuleja, S.: *Mandelbrotova množina*, interaktívne učebné materiály, Gymnázium arm. gen. L. Svobodu, Humenné, máj 2002, dostupné na internete (29.4.2014):  
<http://stuleja.org/vscience/materialy/mandelbrot/index.htm>
- [64] UNESCO, World Heritage Convention, dostupné na internete (23.2.2014):  
<http://whc.unesco.org/en/list/81>
- [65] von Koch, H.: *Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes*, Acta Mathematica Volume 30 (1906), Issue 1, 145-174, dostupné na internete (28.4.2014):  
<http://link.springer.com/article/10.1007%2FBF02418570#>
- [66] Weisstein, E. W.: *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics, Second Edition*, Chapman and Hall/CRC, 2010
- [67] William Lowell Putnam Mathematical Competition, dostupné na internete (29.1.2014):  
<http://math.scu.edu/putnam/>
- [68] Wolfram Mathematica free 30-day trial version, dostupné na internete (25.4.2014):  
<https://www.wolfram.com/mathematica/trial/>

- [69] Young, P.: *Mandelbrot*, študijné materiály k predmetu Computational Physics, University of California, Physics Department, Santa Cruz, dostupné na internete (2.5.2014):  
<http://physics.ucsc.edu/~peter/242/mandelbrot>
- [70] Záhradník P.: *Vzájomná poloha dvoch kružníc*, seminárna práca, Oddelenie didaktiky matematiky FMFI UK, 2005, dostupné na internete (28.2.2014):  
<http://www.ddm.fmph.uniba.sk/files/DSVM/seminarky/zahradnik/2Kruznice.htm>