

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



REŤAZOVÉ ZLOMKY A APROXIMÁCIA

BAKALÁRSKA PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

REŤAZOVÉ ZLOMKY A APROXIMÁCIA

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: RNDr. Dušan Krajčovič, CSc.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Dávid Izsák
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Reťazové zlomky a aproximácia / *Continued fractions and approximation*
Cieľ: Vytvorenie programu pre aproximáciu reálnych čísel pomocou reťazových zlomkov.

Vedúci: RNDr. Dušan Krajčovič, CSc.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania: 05.11.2013

Dátum schválenia: 14.11.2013
doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

PodĎakovanie Touto cestou sa chcem poďakovať svojmu vedúcemu bakalárskej práce RNDr. Dušanovi Krajčovičovi, CSc. za ochotu, pomoc, odborné rady a podnetné pripomienky, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce. Ďakujem aj svojej rodine a priateľom za ich trpezlivosť a podporu.

Abstrakt v štátnom jazyku

IZSÁK, Dávid: Reťazové zlomky a aproximácia [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: RNDr. Dušan Krajčovič, CSc., Bratislava, 2014, 45s.

V našej práci sa zaoberáme historickým vývojom, vlastnosťami a aplikáciou reťazových zlomkov. Po stručnom opise vývoja teórie reťazových zlomkov uvedieme niekoľko vlastností týchto zlomkov a rôzne spôsoby na ich aplikáciu. Zavedieme Euklidov algoritmus, ktorý použijeme pri rozklade racionálnych čísel na aritmetické reťazové zlomky. Ďalej skúmame Lagrangeovu metódu rozkladu niektorých funkcií na reťazové zlomky pomocou diferenciálnej rovnice. Pri riešení algebraických rovníc respektíve pri hľadaní jej reálnych koreňov použijeme tzv. maticovú metódu platnú pre ľubovoľný stupeň danej rovnice. Navyše pomocou tejto metódy môžeme aproximovať ľubovoľnú racionálnu odmocninu prirodzených čísel.

Kľúčové slová: Reťazové zlomky, Euklidov algoritmus, Diofantická rovnica, Diferenciálne rovnice, Algebraické rovnice

Abstract

IZSÁK, Dávid: Continued fractions and approximation [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: RNDR. Dušan Krajčovič, CSc., Bratislava, 2014, 45p.

In our work we deal with the historical development, characteristics and application of continued fractions. After briefly describing the development of the theory of continued fractions we list several properties of these fractions and various methods for their application. We introduce the Euclidean algorithm, which we use for the decomposition of rational numbers into arithmetic continued fractions. Furthermore, we investigate Lagrange's method of decomposition of certain functions into continued fractions using differential equations. To solve algebraic equations finding their real roots we use the so-called matrix method, which is suitable for any degree of an equation. Moreover using this method we can approximate any rational root of a natural number.

Keywords: Continued fractions, Euclidean algorithm, Diophantine equation, Differential equations, Algebraic equations

Obsah

Úvod	8
1 Vývoj teórie reťazových zlomkov	9
1.1 Počiatočné obdobie	9
1.1.1 Euklidov algoritmus	10
1.1.2 Aproximácie odmocnín a čísla π	11
1.1.3 Nedeterministické rovnice	13
1.2 Začiatky formovania teórie reťazových zlomkov	14
1.2.1 Vznik reťazových zlomkov	14
1.2.2 Začiatky teórie reťazových zlomkov	17
1.3 Zlatá doba reťazových zlomkov	18
2 Reťazové zlomky a ich použitie	22
2.1 Reťazové zlomky a ich základné vlastnosti	22
2.2 Rozklad niektorých funkcií na reťazové zlomky	26
2.2.1 Lagrangeova metóda a základná diferenciálna rovnica	26
2.2.2 Riešenia funkcií v tvare reťazových zlomkov	27
2.3 Maticové metódy pre reťazové zlomky	30
2.3.1 Nájdenie druhej odmocniny čísla pomocou štvorcovej matice druhého rádu	31
2.3.2 Riešenie kvadratickej rovnice pomocou matíc druhého rádu	33
2.3.3 Súvis maticovej metódy s teóriou reťazových zlomkov	35
2.3.4 Rozklad kvadratickej iracionálnosti na neperiodické reťazové zlomky pomocou matíc druhého rádu s premennými prvkami	37
2.3.5 Výpočet racionálnej odmocniny prirodzeného čísla pomocou matíc	38
2.3.6 Riešenie rovnice tretieho stupňa pomocou matíc	40
Záver	43
Zoznam použitej literatúry	44

Úvod

Človek sa už od nepamäti snažil pochopiť svoje okolie. Začalo sa to pračlovekom, ktorý musel správne uhádnuť vzdialenosť pri love zveri. Môžeme povedať, že to boli prvé *aproximácie*, ktoré človek použil. Neskôršie, keď sa človek začal zaoberať matematikou, sa vyskytli rôzne problémy a čísla, ktoré nevedel vysvetliť, nevedel vyjadriť pomocou vtedajších vedomostí. Popisoval ich ako hodnoty, ktoré sú menšie alebo väčšie ako už známe hodnoty, alebo ktoré ležia medzi dvomi známymi hodnotami. Bolo nevyhnutné, aby pre tieto hodnoty vytvoril nejaké metódy a spôsoby ako ich získať, ako ich aproximovať.

Jednou z odpovedí ako získať tieto požadované hodnoty boli *reťazové zlomky*. Podobné spôsoby ako reťazové zlomky používali už v Babylone, čiže môžeme povedať, že tento typ aproximácie je jedným z najstarších. Starovekí Gréci položili matematické základy dnešnej teórie reťazových zlomkov, ktorá sa postupne rozvíjala až do dnešnej podoby.

Dnešnou „úlohou“ reťazových zlomkov je čo najpresnejšie aproximovať rôzne iracionálne čísla, funkcie a rovnice. Na takéto aproximácie existujú rôzne metódy a spôsoby, z ktorých sa väčšina zrodila v období 17. až 19. storočia. Medzi ne patrí napríklad aproximácia extrapolačnou metódou, aproximácia pomocou diferenciálnych rovníc a aproximácia pomocou matíc, kde sa využívajú prostriedky metódy lineárnej algebry na výpočet približných riešení algebraických rovníc ľubovoľného stupňa. S poslednými dvomami metódami sa bude môcť čitateľ podrobnejšie stretnúť v druhej kapitole.

Cieľom tejto práce je oboznámiť čitateľa s reťazovými zlomkami, jednoducho sprístupniť čitateľovi teóriu reťazových zlomkov a opísať metódy, ktoré ovplyvnili vývoj teórie reťazových zlomkov a tiež ukázať, ako sa dá pomocou reťazových zlomkov ľahko zistiť približná hodnota niektorých iracionálnych čísel, špeciálnych funkcií, či riešenie algebraických rovníc, atď.

Úvodná časť, venovaná historickému vývoju reťazových zlomkov, je spracovaná podľa knihy [2]. Druhá kapitola sa zaoberá aplikáciou reťazových zlomkov pri riešení niektorých úloh matematiky a vychádzali sme z knihy [4].

1 Vývoj teórie reťazových zlomkov

Reťazové zlomky patria medzi najstaršie koncepcie matematiky. Prvé záznamy o rozklade čísla na reťazový zlomok sa datujú do 3. str. p.n.l. a súviselo to s Euklidovým algoritmom na výpočet najväčšieho spoločného deliteľa dvoch čísel. Neskôr reťazové zlomky upadli do zabudnutia a záujem o ne sa prebudil až začiatkom 16. storočia. V nasledujúcom období mnohí známi matematici a vedci využili reťazové zlomky vo svojich prácach, začali sa im aktívne venovať, vytvárala sa teória reťazových zlomkov a začali sa využívať v mnohých iných oblastiach matematiky. V tejto kapitole sa budeme venovať vývoju teórie reťazových zlomkov a ich aplikáciám, ktoré vytvárali priestor na vznik tejto časti matematiky.

Reťazovým zlomkom nazývame výraz

$$\begin{array}{c} q_0 + \frac{p_1}{\phantom{q_1 + \frac{p_2}{\phantom{q_2 + \frac{p_3}{\phantom{\ddots + \frac{p_{n+1}}{\ddots}}}}}}} \end{array}$$

Z dôvodu priestorových podmienok budeme používať ekvivalentné označenie (existuje viac typov označenia):

$$q_0 + \frac{p_1}{q_1 +} \frac{p_2}{q_2 +} \dots \frac{p_n}{q_n +} \dots$$

1.1 Počiatočné obdobie

Dedičstvo starovekých gréckych, perzských a indických matematikov je neoceniteľné. Boli zakladateľmi dnešnej algebry a geometrie, niektoré ich definície, vety, algoritmy, metódy sú dodnes na školách jadrom učiva. V tejto podkapitole sa budeme zaoberať starovekými prácami a problémami, ktoré boli dôvodom ku vzniku reťazových zlomkov.

1.1.1 Euklidov algoritmus

Euklidov algoritmus je jedným z najstarších algoritmov, ktorý používajú dodnes v rôznych oblastiach matematiky. Algoritmus je pomenovaný po tvorcovi Euklidovi (325 - 260 p.n.l.).

Nech $a, b \in \mathbb{N}$, pričom môžeme predpokladať, že $a > b$. Vytvoríme postupnosť $\{r_k\}$:

$$r_k = q_k r_{k+1} + r_{k+2}, \quad (1)$$

kde $k = 0, 1, \dots, n$, $r_0 = a$, $r_1 = b$ a platí $0 \leq r_{k+1} < r_k$, $q_i \in \mathbb{N}$ pre $\forall i = 0, 1, \dots$.

Postupnosť r_k je monotónne klesajúca, preto existuje také $n \in \mathbb{N}$, že $r_{n+2} = 0$, teda $r_n = q_n r_{n+1}$, t.j. r_{n+1} je najväčší spoločný deliteľ prirodzených čísel a , b . Ďalej platí

$$\frac{r_k}{r_{k+1}} = q_k + \frac{1}{r_{k+1} r_{k+2}},$$

pre $k=0, 1, \dots, n$. Ak tieto vzťahy aplikujeme na racionálne číslo $\frac{a}{b} \equiv \frac{r_0}{r_1} \in \mathbb{Q}$ dostaneme reťazový zlomok

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots \frac{1}{q_n}}}. \quad (2)$$

V staroveku sa viacero zaoberali geometriou, preto tento algoritmus popisovali tiež geometricky, ako je uvedené v knihe [2].

Nech máme dve úsečky, pričom dlhšiu označíme a , kratšiu b . Euklides zmeral dlhšiu úsečku a pomocou kratšej úsečky b . Zvyšok dlhšej úsečky, čo sa už nedalo zmerať pomocou kratšej úsečky b používal ako novú kratšiu úsečku c na zmeranie novej dlhšej úsečky b . A takto pokračoval, kým sa nedostal k poslednému nenulovému zvyšku, čo bol najväčší spoločný deliteľ úsečiek a , b .

V prípade, že táto metóda nevedie nikdy k nulovému zvyšku, t.j. je nekonečná, potom číslo $\frac{a}{b}$ je iracionálne. Avšak zistiť, či výpočet bude pokračovať do nekonečna je takmer nemožné. Ak sa dá ukázať, že výpočet bude periodický, t.j. ak podiel dvoch za sebou idúcich zvyškov je úmerný k podielu počiatkových úsečiek $\frac{a}{b}$, vtedy bude výpočet určite nekonečný.

Uvedená metóda sa nazýva *anthyphairesis*, podrobnejšie popisy tejto metódy môžeme nájsť v knihách [3] a [8]. Využívaním Euklidovho algoritmu v teórii reťazových zlomkov sa budeme podrobne zaoberať v druhej kapitole.

Gréci už koncom 5. storočia p.n.l. vedeli, že dva rovnaké podiely veličín produkujú rovnaké postupnosti čiastkových podielov bez ujmy na konečnosť, resp. nekonečnosť, pretože si boli vedomí toho, že postupnosť podielov môže byť nekonečná.

1.1.2 Aproximácie odmocnín a čísla π

Už v staroveku vedeli, že zápis iracionálnych čísel pomocou reťazových zlomkov je nekonečný, t.j. nedá sa vyjadriť v tvare zlomku ako racionálne číslo, preto vytvárali rôzne metódy na aproximáciu týchto iracionálnych čísel. Takou aproximáciou sú aj tzv. *zblížené zlomky* reťazového zlomku.

Výpočet týchto zblížených zlomkov ilustrujeme pomocou nasledujúceho príkladu: nech A je také prirodzené číslo, ktorého rozklad na reťazový zlomok je

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a+} \frac{r}{2a+} \dots,$$

kde a je najväčšie prirodzené číslo, pre ktoré platí $a^2 \leq A$. Týmto rozkladom sa budeme zaoberať v časti 1.2.1.

Čiastočná aproximácie pre číslo $\sqrt{A}$, t.j. zblížené zlomky daného reťazového zlomku sú nasledujúce:

$$\begin{aligned} C_0 &= a, \\ C_1 &= a + \frac{r}{2a} , \\ C_2 &= a + \frac{r}{2a+} \frac{r}{2a} , \\ C_3 &= a + \frac{r}{2a+} \frac{r}{2a+} \frac{r}{2a} , \\ &\vdots \end{aligned}$$

Historicky prvý záznam o podobnej metóde pochádza z 21. storočia p.n.l. z Babylonu. Táto metóda aproximovala číselnú hodnotu uhlopriečky d obdĺžnika so stranami s dĺžkami w a h , kde w je kratšia strana. Podľa uvedenej metódy $d \approx h + \frac{w^2}{2h}$. Rakúsky matematik a historik vedy Otto Eduard Neugebauer (1899 - 1990) predpokladal, že Babylončania už poznali Pytagorovu vetu a aproximáciu čísla $\sqrt{A} \approx a + \frac{r}{2a}$.

Z Babylonu tiež pochádza (19. až 17. st. p.n.l.) aproximácia čísla $\sqrt{2} \approx 1,24$ v šesťdesiatkovej sústave, kde $1 + \frac{24}{60} = 1 + \frac{1}{2+} \frac{1}{2}$. Šesťdesiatkovú sústavu využívali aj egyptskí matematici, napríklad Theon z Alexandrie (geometrická metóda aproximácie čísla $\sqrt{A}$), Ptolemaios (aproximácia čísel $\sqrt{3}$, $\pi \approx 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60^2}$).

Archimedes (287 - 212 p.n.l.) na získanie hodnoty čísla π používal hraničné aproximácie čísla $\sqrt{3}$:

$$\frac{265}{153} = \frac{1}{3}(5 + \frac{1}{5+} \frac{1}{10}) < \frac{31}{2} < \frac{1}{3}(5 + \frac{1}{5+} \frac{1}{10+} \frac{1}{5}) = \frac{1351}{780} .$$

Následne vytvoril postupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$, pre ktoré platia vzťahy

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + b_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ b_n &= \sqrt{a_n^2 + c^2}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad c \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Ak $a_0 = \sqrt{3}c$, potom platí

$$\frac{2^n c}{b_n} < \frac{\pi}{6} < \frac{2^n c}{a_n} .$$

Na určenie číselnej hranice pre číslo π vypočítal hodnoty postupností $\{a_n\}$ ako dolnej hranice a $\{b_n\}$ ako hornej hranice. Pomocou týchto postupností získal aproximácie čísla $\sqrt{3}$, zostrojil tabuľku hodnôt, a tým vymedzil hodnotu čísla π :

$$\frac{96 * 66}{2017 + 1/4} < \pi < \frac{96 * 153}{4673 + 1/2} .$$

Po úprave nerovností dostaneme tento vzťah do tvaru, v ktorom vystupujú reťazové zlomky:

$$3 + \frac{1}{7+} \frac{1}{10+} \frac{1}{3-} \frac{1}{37} < \pi < 3 + \frac{1}{7-} \frac{1}{111+} \frac{1}{2} .$$

Tento postup aproximácie čísla π a tabuľku hodnôt postupností môžeme nájsť v knihe [2] a v článku [11].

Prvú nekonečnú metódu, ktorá nadväzuje na rozšírenie odmocniny do tvaru reťazového zlomku uvádzal Proclus (410 - 485) v jeho výklade Platónovej knihy „Štát“ (VIII, zákon č. 546). Túto metódu môžeme nájsť v knihe [2].

Nech sú dané dva štvorce, prvý so stranami a_1 a uhlopriečkou d_1 , druhý so stranami $a_2 = a_1 + d_1$ a uhlopriečkou d_2 (podľa Pytagorovej vety $d_2 = 2a_1 + d_1$). Postupným opakovaním procesu (generovaním štvorcov) dostaneme postupnosti $\{a_n\}$ a $\{d_n\}$, $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = a_{n-1} + d_{n-1}, \tag{3}$$

$$d_n = 2a_{n-1} + d_{n-1}. \tag{4}$$

Táto metóda sa dá považovať ako *opačná anthyphairesis*, lebo tieto hodnoty sú obrátené. Úpravou (3) a (4) môžeme dostať rekurentné vzťahy

$$a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}, \quad (5)$$

$$d_{n+1} = 2d_n + d_{n-1}. \quad (6)$$

Theon zo Smyrny (2.st. p.n.l.) položil $a_1 = d_1 = 1$, $n = 1$ a pomocou (5), (6) vypočítal

$$d_0 = d_2 - 2d_1 = 3 - 2 = 1,$$

$$a_0 = a_2 - 2a_1 = 2 - 2 = 0.$$

Postupným výpočtom dostal hodnoty postupností $\{a_n\}$ a $\{d_n\}$:

$$\{a_n\} = 1, 2, 5, 12, 29, \dots,$$

$$\{d_n\} = 1, 3, 7, 17, 41, \dots$$

Z predchádzajúcich rekurentných vzťahov je jasné, že členy postupností $\left\{\frac{d_n}{a_n}\right\}$ sú jednotlivé zblížené zlomky reťazového zlomku čísla $\sqrt{2}$:

$$C_0 = \frac{d_1}{a_1} = \frac{1}{1},$$

$$C_1 = \frac{d_2}{a_2} = \frac{3}{2},$$

$$C_2 = \frac{d_3}{a_3} = \frac{7}{5},$$

$\vdots$

Theon tiež uviedol, že $d_n^2 - 2a_n^2 = -(d_{n-1}^2 - 2a_{n-1}^2)$, pričom $d_0^2 - 2a_0^2 = 1$. Z toho získal vzťah $d_n^2 - 2a_n^2 = (-1)^n$, t.j. táto metóda súvisí s riešením nedeterministickej rovnice $d^2 - 2a^2 = \pm 1$.

1.1.3 Nedeterministické rovnice

Staroveký problém, ktorý viedol k použitiu ekvivalentných reťazových zlomkov boli diofantické rovnice. Meno dostali po gréckom matematikovi Diophantusovi (3. st.), ktorý našiel celočíselné riešenie rovnice

$$ax \pm by = c, \quad (7)$$

kde a, b a c sú prirodzené čísla. Takéto rovnice sa objavovali napr. v astronómii, kde ich riešenia sú súviseli s objavom niektorých súhvezdí.

Indický matematik Aryabhata, ktorý študoval prácu Diophanta už uvažoval prípad dvoch rovníc s tromi neznámymi. Nedávne výskumy dokazujú, že ovládal Euklidov algoritmus, z toho vyplývajúcu rekurzívnu metódu pre výpočet zblížených zlomkov a rekurentný vzťah

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^n.$$

Ďalší typ nedeterministických rovníc je tzv. Pellova rovnica, ktorá je vlastne špeciálnym prípadom diofantických rovníc. Pomenovaná bola neskoršie po anglickom matematikovi John Pell (1611 - 1685). Pellova rovnica má tvar

$$x^2 - Dy^2 = q, \tag{8}$$

kde $q \in \mathbb{Z}$ a $D \in \mathbb{N}$, pričom $\sqrt{D} \notin \mathbb{N}$. Po úprave rovnice dostaneme

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - D = \frac{q}{y^2},$$

kde $\frac{x}{y}$ je aproximácia čísla $\sqrt{D}$. Hoci Gréci nenašli všeobecné riešenie tejto rovnice, Pythagoras udával riešenie pre $D = 2$, Archimedes pre $D = 3, 5, \dots$. Pellova rovnica a súvisiace problémy sa dostali do popredia až v 17. storočí.

1.2 Začiatky formovania teórie reťazových zlomkov

Miesto vzniku „dnešných“ reťazových zlomkov bolo severné Taliansko, kde boli založené prvé európske univerzity. Pôsobilo tu viac známych matematikov, medzi nimi Fibonacci, ktorý sa prvýkrát pokúsil všeobecne definovať reťazové zlomky. Významným príspevkom k tejto tematike bol algoritmus od Bombelliho pre aproximáciu odmocnín a Cataldiho práca, ktorá úzko súvisí s Bombelliho algoritmom. V druhej časti podkapitoly sa budeme zaoberať dedičstvom Wallisa a Brounckera, zakladateľmi teórie reťazových zlomkov a Huygensovou aproximáciou čísla π .

1.2.1 Vznik reťazových zlomkov

Ako sme spomenuli významnú úlohu vo vývoji reťazových zlomkov zohral algoritmus od Rafaela Bombelliho (1526 - 1572), ktorý bol tiež zakladateľom imaginárnych čísel.

Bombelli ako prvý vytvoril všeobecný algoritmus na aproximácie odmocniny pomocou reťazových zlomkov. Za konkrétny prípad si vzal číslo $\sqrt{13}$:

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6 + \dots}}$$

V tomto algoritme aproximácia prebieha pomocou upraveného rozdielu predchádzajúcej aproximácie odmocniny a čísla A pod odmocninou. Prvý rozdiel je rozdiel čísla pod odmocninou A a najväčšieho čísla a^2 , kde $a^2 < A$, $a \in \mathbb{N}$. Algoritmus po pár krokoch udáva aproximáciu s veľmi nízkou relatívnou chybou. Podrobnejší popis tohto algoritmu môžeme nájsť napríklad v knihe [10].

Talianský matematik Ettore Bortolotti (1866 - 1947), ktorý analyzoval prácu Bombelliho, udával popis jeho algoritmu v článku [1]. Ak platí rozklad čísla $\sqrt{A}$:

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + r} = a + x, \quad (9)$$

potom môžeme vyjadriť $r = 2ax + x^2$. Ak pri aproximácii zanedbáme x^2 , dostaneme $r = 2ax \Leftrightarrow x = \frac{r}{2a}$. Ak dosadíme predchádzajúci výraz do (9) za x , dostaneme aproximáciu čísla $\sqrt{A}$:

$$\sqrt{A} = a + x = a + \frac{r}{2a}.$$

Pre ďalšiu aproximáciu čísla $\sqrt{A}$ vyjadríme r z $x^2 = \frac{rx}{2a}$:

$$r = 2ax + \frac{rx}{2a} = \left(2a + \frac{r}{2a}\right)x \Rightarrow x = \frac{r}{2a + \frac{r}{2a}}.$$

Novú aproximáciu pre x dosadíme do (9):

$$\sqrt{A} = a + x = a + \frac{r}{2a + \frac{r}{2a}}.$$

Ak proces postupne zopakujeme, dostaneme nekonečný reťazový zlomok:

$$\sqrt{A} = a + \frac{r}{2a + \frac{r}{2a + \dots}} \quad (10)$$

Iný spôsob, ako vysvetliť, ako mohol Bombelli získať svoju metódu a rozklad (10) je vyjadriť $r = A - a^2 = (\sqrt{A} + a)(\sqrt{A} - a)$, z toho číslo $\sqrt{A} = a + \frac{r}{a + \sqrt{A}}$. Ak nahradíme $\sqrt{A}$ v menovateli celou pravou stranou, potom dostaneme už uvedený nekonečný reťazový zlomok.

Ak Bombelli bol prvý v tej dobe, ktorý sa zaoberal reťazovými zlomkami, podľa historikov skutočným objaviteľom teórie reťazových zlomkov bol Pietro Antonio Cataldi (1548 - 1626). Cataldi pokračoval v práci Bombelliho. Bol tiež prvým kodifikátorom symboliky pre reťazové zlomky a naznačil niekoľko ich vlastností.

Bortolotti využil výsledky Cataldiho v článku [1]. Podľa neho Cataldi uviedol rekurentný vzťah reťazových zlomkov, dokázal konvergenciu po sebe idúcich zblížených zlomkov kvadratickej iracionality, a tiež, že tieto zblížené zlomky sú striedavo väčšie a menšie než hodnota reťazového zlomku. Vyhodnotil chybu aproximácie a porovnal rýchlosť konverencie reťazového zlomku s podobnými vyjadreniami.

Podľa Bortolottiho Cataldi konštatoval, že aproximácia $a + \frac{r}{2a}$ čísla $\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + r}$ je väčšia, pričom aproximácia $a + \frac{r}{2a+1}$ toho istého čísla je menšia, preto hľadal takú aproximáciu $a + \frac{r}{2a+x}$, kde $0 \leq x \leq 1$.

Cataldi tiež uvádza nasledujúci vzťah:

$$\left(a + \frac{r}{2a+x}\right)^2 - (a^2 + r) = \frac{r\left(\frac{r}{2a+x} - x\right)}{2a+x}. \quad (11)$$

Na ľavej strane v (11) je rozdiel druhej mocniny aproximácie a čísla A (rozdiel ≈ 0). Z pravej strany dostaneme

$$x = \frac{r}{2a+x} = \frac{A - a^2}{2a+x},$$

prídeme k rozkladu čísla $\sqrt{A}$ na reťazový zlomok

$$\sqrt{A} = a + x = a + \frac{r}{2a+x} = \dots$$

Cataldi uviedol aj niektoré iné vlastnosti reťazových zlomkov. Napríklad

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{r}{2a+} \frac{r}{2a+} \dots \frac{r}{2a} \Leftrightarrow \frac{p_n}{q_n} = \frac{r}{2a + \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}},$$

a z tohto vzťahu odvodil rekurentné vzťahy:

$$p_n = r q_{n-1} \Leftrightarrow p_n = 2a p_{n-1} + r p_{n-2},$$

$$q_n = 2a q_{n-1} + p_{n-1} \Leftrightarrow q_n = 2a q_{n-1} + r q_{n-2}.$$

Tiež odvodil formulu na výpočet zblíženého zlomku $m + n$ -tého rádu pomocou n -tého, m -tého a $m - 1$ -ého:

$$\frac{p_{n+m}}{q_{n+m}} = \frac{r}{2a+} \dots \frac{r}{2a + \frac{p_n}{q_n}} \Leftrightarrow \frac{p_{n+m}}{q_{n+m}} = \frac{q_n p_m + p_n p_{m-1}}{q_n q_m + p_n q_{m-1}}.$$

1.2.2 Začiatky teórie reťazových zlomkov

Anglický matematik John Wallis (1616 - 1703) a William Brouncker (1620 - 1684) sa tiež venovali tejto problematike a často ich uvádzajú ako na zakladateľov teórie reťazových zlomkov.

Teraz uvidíme ich spôsob pre výpočet čísla $\frac{4}{\pi}$, ktorý získal Wallis z integrálu $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ interpolačnou metódou. Snažil sa dostať hodnotu uvedeného integrálu, aby vyriešil problém kvadratury kruhu, ale dostal iba nekonečný súčin čísla $\frac{4}{\pi}$:

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 * 3 * 5 * 5 * 7 * 7 * \dots}{2 * 4 * 4 * 6 * 6 * 8 * \dots}.$$

Požiadaval o pomoc Brounckera, ktorý prepísal problém pomocou funkcie

$$f(\lambda) = 1 / \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{\lambda}{2}} dx, \lambda \in \mathbb{N}. \quad (12)$$

Brouncker zaznamenal, že (12) sa dá vyjadriť pomocou špeciálnej funkcie $\Phi(\cdot)$:

$$f(\lambda) = \frac{2}{\pi} \frac{2}{\Phi(1)} \frac{4}{\Phi(3)} \dots \frac{2\lambda+2}{\Phi(2\lambda+1)}, \lambda \in \mathbb{N}, \quad (13)$$

pričom pre funkciu $\Phi(x)$ platí: $\Phi(x-1)\Phi(x+1) = x^2, \forall x > 0$. Brouncker zistil, že $\Phi(x)$ sa dá napísať v tvare reťazových zlomkov:

$$\Phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1^2}{2x+} \frac{3^2}{2x+} \dots \frac{(2n-1)^2}{2x+} \right). \quad (14)$$

Z (13) a (14) pre $\lambda = 0$ platí $f(0) = \frac{2}{\pi} \frac{2}{\Phi(1)} = 1$, z čoho

$$\frac{4}{\pi} = \Phi(1) = 1 + \frac{1^2}{2+} \frac{3^2}{2+} \dots$$

Tento postup zverejnil Wallis v knihe (??), kde prvýkrát používa názov reťazový zlomok. Uviedol aj základný rekurentný vzťah zblížených zlomkov, ktorý uvidíme v druhej kapitole.

Dánsky matematik a astronóm Christiaan Huygens (1629 - 1695) tiež prispel k tejto tematike. Vypočítal hodnotu čísla π pomocou extrapoláčnej metódy (čím obohatil aj numerickú analýzu). Dostal

$$T'_n = n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) < \pi < n \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right) = T_n.$$

Ak neskôr n nahradil číslom $\frac{1}{h}$, potom dostal

$$T_n = T(h) = \frac{\operatorname{tg}(h\pi)}{h} = \pi + \frac{\pi^3 h^2}{3} + \frac{2\pi^5 h^4}{15} + \dots$$

V roku 1654 upravil túto metódu na presnejší výpočet hodnoty π :

$$T_1(h) = \frac{4T(\frac{h}{2}) - T(h)}{3} = \pi - \frac{\pi^5 h^4}{480} - \frac{5\pi^7 h^6}{16 * 7!} - \dots$$

Pre $h = 2^{-30}$ získal hodnotu čísla π s presnosťou na 35 desatinných miest. Tento postup pre výpočet čísla π ako aj iné jeho práce a astronomické výpočty sú uvedené v [2] a [13].

1.3 Zlatá doba reťazových zlomkov

18. storočie sa nazýva zlatou dobou reťazových zlomkov. Takí známi matematici sa zaoberali teóriou reťazových zlomkov ako Euler, Lambert a Lagrange (všetci traja patrili k Pruskej akadémii vied). Teraz uvedieme iba niektoré časti ich tvorby, ktorou obohatili teóriu reťazových zlomkov.

Najväčším prispievateľom k teórii reťazových zlomkov bol Leonhard Euler (1707 - 1783). Jeho prvý článok o reťazových zlomkách je [6]. Euler dokázal, že každé racionálne číslo sa dá rozvinúť do konečného reťazového zlomku, každé iracionálne číslo do nekonečného reťazového zlomku a periodické reťazové zlomky sa dajú vyjadriť ako riešenie kvadratickej rovnice.

Napríklad vyjadril tiež pomocou reťazových zlomkov nasledujúce iracionálne čísla:

$$e = 2 + \frac{1}{1+} \frac{1}{2+} \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \frac{1}{4+} \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \frac{1}{6+} \dots,$$

$$\frac{e+1}{e-1} = 2 + \frac{1}{6+} \frac{1}{10+} \frac{1}{14+} \dots,$$

$$\frac{e-1}{2} = \frac{1}{1+} \frac{1}{6+} \frac{1}{10+} \frac{1}{14+} \dots$$

Euler získal tieto rozklady pomocou Riccatiho diferenciálnej rovnice dvoma spôsobmi, integrovaním nekonečného reťazového zlomku a priemerom exponenciálnych funkcií, pričom tieto riešenia sa rovnali. Euler týmto spôsobom dostal hodnoty výrazov $e^{\frac{1}{a}}$ a $\frac{e^{\frac{1}{a}}+1}{e^{\frac{1}{a}}-1}$. Pri rozklade $\frac{e-1}{2}$ predpokladal, že čiastkové menovatele sa vždy zvyšujú o 4

(od predchádzajúceho), teda reťazový zlomok bude nekonečný. Hoci dôkazy nedokončil dôsledne, dokázal iracionalitu čísel e a e^2 . Ďalšie informácie o jeho tvorbe sú dostupné v knihách [2] a [7], ako napríklad vzťah medzi radmi a reťazovými zlomkami a už spomenuté riešenie kvadratických rovníc periodickými reťazovými zlomkami.

Euler uviedol ako sa dá reťazový zlomok prepísať na nekonečný rad. (Udával aj rekurentný vzťah reťazových zlomkov bez odvolávky na Wallisa.)

Nech $C_n = q_0 + \frac{p_1}{q_1} \cdots \frac{p_n}{q_n}$ je n -tým zblíženým zlomkom reťazového zlomku čísla C . Euler odvodil nasledujúci vzorec na výpočet rozdielu dvoch susedných zblížených zlomkov:

$$C_n - C_{n-1} = (-1)^{n-1} \frac{p_1 \cdots p_n}{Q_{n-1} Q_n}. \quad (15)$$

Potom reťazový zlomok čísla C vyjadril ako súčet čísla q_0 a sumy nekonečného radu:

$$C = q_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{p_1 \cdots p_i}{Q_{i-1} Q_i}.$$

Tento vzťah platí aj opačne, t.j. nekonečný rad sa dá prepísať do tvaru reťazového zlomku, ktorého zblížené zlomky sú identické s čiastočnými súčtami radu

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} c_i = \frac{c_1}{1+} \frac{c_2}{c_1 - c_2 +} \cdots \frac{c_{n-2} c_n}{c_{n-1} - c_n +} \cdots$$

Tiež ukázal, že niektoré reťazové zlomky odvodené z mocninových radov konvergujú mimo oboru konverencie radu. To platí napríklad pre rad

$$x - 1!x^2 + 2!x^3 - 3!x^4 + \dots \quad (16)$$

a tiež pre divergentný rad

$$1 - mx + m(m+n)x^2 - m(m+n)(m+2n)x^3 + \dots$$

Podarilo sa mu tiež dokázať, že rad (16) spĺňa diferenciálnu rovnicu $x^2 y'' + y = x$, z čoho dostal integrálne riešenie v tvare

$$y(x) = \int_0^1 \frac{x e^{-t}}{1 + xt} dt.$$

Takto získal spôsob na sčítanie divergentného radu, rad (16) prepísal do tvaru reťazového zlomku $\frac{x}{1+} \frac{x}{1+} \frac{x}{1+} \frac{2x}{1+} \frac{2x}{1+} \frac{3x}{1+} \frac{3x}{1+} \cdots$ a použil to na výpočet hodnoty divergentného radu $1! - 2! + 3! - 4! + \dots$

Zaoberal sa aj otázkou týkajúcou sa niektorých periodických reťazových zlomkov, napr. ak $c = \frac{1}{2+} \frac{1}{2+} \dots$, potom $c = \frac{1}{2+c} \Leftrightarrow c^2 + 2c = 1$, teda $c = \sqrt{2} - 1$. Na základe tohto príkladu odvodil Bombelliho metódu na výpočet hodnoty odmocniny prirodzeného čísla a všeobecnú metódu pre riešenie kvadratickej rovnice pomocou reťazových zlomkov (podrobne v kapitole 2).

Starodávnym problémom bola kvadratura kruhu, t.j. konštrukcia štvorca a kruhu s rovnakou plochou. Johan Heinrich Lambert (1728 - 1777) sa venoval tejto problematike a bol prvým, kto vyslovil zápornú odpoveď na túto otázku.

Trigonometrické funkcie boli často vyjadrené v tvare nekonečných radov, avšak konvergencia týchto radov bola pomalá alebo interval konvergence bol malý. Lambert hľadal všeobecnú metódu, ktorá by prekonala takéto problémy. Odpoveď na túto otázku našiel v reťazových zlomkoch. Teraz uvedieme Lambertov postup, ktorý môžeme nájsť aj v knihe [2].

Nech S je konvergentný rad. Zovšeobecnením Euklidovým algoritmom je možné premeniť rad na reťazový zlomok, ktorý konverguje k tej istej limite ako rad S . Pri ľubovoľných p_i a q_i je možné zvoliť také r_i , že platia vzťahy $S = q_0 + \frac{p_1}{r_1}$ a $r_i = q_i + \frac{p_{i+1}}{r_{i+1}}$, $\forall i = 1, 2, \dots$, t.j. $S = q_0 + \frac{p_1}{q_1 + \frac{p_2}{q_2 + \dots}}$

Touto metódou je možné vyjadriť napríklad $\operatorname{tg}(x) = \frac{S_{\sin}}{S_{\cos}}$ pomocou reťazového zlomku, kde

$$S_{\sin} = \sin(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}, \quad (17)$$

$$S_{\cos} = \cos(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!}. \quad (18)$$

Lambert položil nasledujúce hodnoty: $b_0 = 0$, $b_1 = x^{-1}$, $a_1 = 1$, $a_i = -1$, $b_i = (2i-1)x^{-1}$, potom z (17) a (18) dostal rozklad $\operatorname{tg}(x)$ na reťazový zlomok:

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{1/x -} \frac{1}{3/x -} \frac{1}{5/x -} \dots$$

Ukázal tiež, že $\operatorname{tg}(x)$ je iracionálne číslo, ak premenná x je nenulové racionálne číslo. Použitím tej istej metódy dokázal, že

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{1}{2/x +} \frac{1}{6/x +} \frac{1}{10/x +} \dots = \frac{1}{i} \operatorname{tg}\left(\frac{ix}{2}\right).$$

Tieto reťazové zlomky získal aj Euler (1737) a Lagrange (1776) inými metódami (viď 2.2.2).

Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813) bol tretím najvýznamnejším matematikom, ktorý prispel k teórii reťazových zlomkov.

Lagrange v [9] udával metódu pre aproximáciu koreňa polynómu pomocou reťazových zlomkov. Napríklad ukázal postup riešenia rovnice $x^3 - 7x + 7 = 0$, ktorej koreň x sa nachádza medzi 1 a $\frac{3}{2}$. Ak $x = 1 + \frac{1}{y}$, potom rovnica nadobúda tvar $y^3 - 4y^2 + 3y + 1 = 0$. Táto rovnica má koreň y medzi 1 a 2. Potom položil $y = 1 + \frac{1}{z}$ a rovnicu vyjadril v tvare $z^3 - 2z^2 - z + 1 = 0$. Zopakovaním tohto procesu dostal reťazový zlomok

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}$$

Lagrange poukázal aj na to, že rozklad čísla $\sqrt{D}$ v tvare reťazového zlomku, kde $D \in \mathbb{N}$, $\sqrt{D} \notin \mathbb{N}$ je periodický (počiatočným členom reťazového zlomku je číslo q_0) a má jeden z nasledujúcich tvarov:

- $\frac{1}{q_1 +} \dots \frac{1}{q_n +} \frac{1}{q_n +} \dots \frac{1}{q_1 +} \frac{1}{q_0},$
- $\frac{1}{q_1 +} \dots \frac{1}{q_n +} \frac{1}{k +} \frac{1}{q_n +} \dots \frac{1}{q_1 +} \frac{1}{q_0}, k \in \mathbb{N}.$

Ak číslo $\sqrt{D}$ bude mať rozklad prvého tvaru a ak pre $\frac{x}{y}$ ($x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$) platí vzťah

$$\frac{x}{y} = q_0 + \frac{1}{q_1 +} \frac{1}{q_2 +} \dots \frac{1}{q_1 +} \frac{1}{q_0 +} \frac{1}{q_1 +} \frac{1}{q_2 +} \dots \frac{1}{q_1}, \quad (19)$$

potom je to najmenšie riešenie Pellovej rovnice (8) tvaru: $x^2 - Dy^2 = 1$.

Ak $\sqrt{D}$ nadobúda druhý tvar, pričom $\frac{x}{y}$ ($x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$) spĺňa podmienku

$$\frac{x}{y} = q_0 + \frac{1}{q_1 +} \dots \frac{1}{q_n +} \frac{1}{q_k +} \frac{1}{q_n +} \dots \frac{1}{q_1},$$

potom tento rozklad bude najmenším riešením Pellovej rovnice $x^2 - Dy^2 = 1$.

Ak Pellova rovnica má tvar $x^2 - Dy^2 = -1$ riešenie existuje iba vtedy, ak rozklad čísla $\sqrt{D}$ spĺňa (19).

2 Reťazové zlomky a ich použitie

V predchádzajúcej časti sme oboznámili čitateľa s reťazovými zlomkami, niekoľkými ich vlastnosťami, rôznymi spôsobmi ich využitia pri aproximácii čísel a funkcií, ale aj postupným vývojom týchto metód. V 1.3 sme ukázali sofistikovanejšie využitie reťazových zlomkov, napríklad ich súvis s radmi. Túto kapitolu sme vypracovali na základe [4] a rozdelili sme na tri časti:

- v prvej časti uvidíme základné definície a vlastnosti reťazových zlomkov a ich využitie v praxi,
- v druhej časti ukážeme ako sa dajú rozložiť niektoré funkcie pomocou Lagrangeovej metódy na reťazové zlomky,
- v tretej časti sa budeme zaoberať maticovou metódou, jej využitím v teórii reťazových zlomkov pri výpočte koreňov algebraických rovníc.

2.1 Reťazové zlomky a ich základné vlastnosti

Definícia 2.1. *Nekonečným reťazovým zlomkom (všeobecného typu) nazývame výraz*

$$\begin{array}{c} q_0 + \frac{p_1}{q_1 + \frac{p_2}{q_2 + \frac{p_3}{\ddots + \frac{p_{n+1}}{q_n + \frac{\ddots}{\ddots}}}}} \end{array} \quad (20)$$

kde $p_i \in \mathbb{Z}$ pre $\forall i \in \mathbb{N}$ a $q_j \in \mathbb{Z}$ pre $\forall j \in \mathbb{N}_0$.

Poznámka: výraz (20) a

$$q_0 + \frac{p_1}{q_1 +} \frac{p_2}{q_2 +} \dots \frac{p_n}{q_n +} \dots \quad (21)$$

sú ekvivalentné označenia toho istého reťazového zlomku.

Definícia 2.2. *Konečný reťazový zlomok*

$$\frac{P_n}{Q_n} \equiv q_0 + \frac{p_1}{q_1 +} \frac{p_2}{q_2 +} \dots \frac{p_n}{q_n} \quad (22)$$

nazývame n -tým zblíženým zlomkom reťazového zlomku (21).

Definícia 2.3. *Ak položíme $P_0 = b_0$, $Q_0 = 1$, $P_{-1} = 1$, $Q_{-1} = 0$, potom vzťahy*

$$P_n = q_n P_{n-1} + p_n P_{n-2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (23)$$

$$Q_n = q_n Q_{n-1} + p_n Q_{n-2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

nazývame základnými rekurentnými vzťahmi reťazového zlomku.

Napríklad pomocou základných rekurentných vzťahov (23) môžeme rozložiť odmocninu prirodzeného čísla na reťazový zlomok, ak poznáme celú časť tejto odmocniny.

PRÍKLAD 1. Uvedieme rozklad čísla $\sqrt{5}$ na reťazový zlomok. Pretože celá časť čísla $\sqrt{5}$ je 2, dostaneme

$$\sqrt{5} = 2 + (\sqrt{5} - 2) = 2 + \frac{1}{4 + \sqrt{5}} = 2 + \frac{1}{4 +} \frac{1}{4 +} \dots$$

Lema 2.4. *Rozdiel medzi susednými zblíženými zlomkami je daný vzťahom:*

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = (-1)^{n-1} \frac{p_1 \dots p_n}{Q_{n-1} Q_n}. \quad (24)$$

Poznámka: (2.4) uviedol prvýkrát Euler [viď (15)].

Lema 2.5. *Rozdiel medzi zblíženými zlomkami, v ktorých sa indexy líšia o dva je daný vzťahom:*

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = (-1)^{n-1} \frac{p_1 \dots p_n q_{n+1}}{Q_{n-1} Q_{n+1}}. \quad (25)$$

Poznámka: Ak indexový rozdiel dvoch zblížených zlomkov (toho istého reťazového zlomka) je väčšie než 2, na základe vzťahov (24) a (25) vieme odvodiť vzťah pre jeho výpočet.

Dôsledok 2.6. Z Lemy 2.5 vyplýva, že ak všetky prvky reťazového zlomku sú kladné, tak jeho zblížené zlomky štvrtého rádu vytvárajú monotónne rastúcu postupnosť, ktorá je ohraničená zhora číslom $q_0 + \frac{p_1}{q_1}$ a má limitu, t.j. existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n}}{Q_{2n}}$. Tiež platí, že ak všetky prvky reťazového zlomku sú kladné, tak jej zblížené zlomky iného ako štvrtého rádu vytvárajú postupnosť, ktorá je monotónne klesajúca, ohraničená zdola číslom q_0 a má limitu $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}}$. Hodnota reťazového zlomku, ktorého všetky prvky sú kladné (ak takáto hodnota existuje) je vždy väčšia ako hodnota ľubovoľného zblíženého zlomku štvrtého rádu a vždy menšia ako hodnota ľubovoľného zblíženého zlomku iného ako štvrtého rádu. Hodnotou ľubovoľného reťazového zlomku (21) je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n}$.

Definícia 2.7. Reťazový zlomok (20), ktorý má všetky čiastkové čitatele p_i rovné jednotke a všetky čiastkové hodnoty q_i sú prirodzené čísla, nazývame aritmetickým reťazovým zlomkom. Tento typ reťazového zlomku zvykneme označovať

$$[q_0; q_1 \dots q_n \dots] \equiv q_0 + \frac{1}{q_1 +} \dots \frac{1}{q_n} \dots \quad (26)$$

Dôsledok 2.8. Z Lemy 2.4 vyplýva, že žiadny zblížený zlomok k aritmetickému reťazovému zlomku nie je možné krátiť.

Lema 2.9. Aritmetické reťazové zlomky majú takú vlastnosť, že ak spravíme rozklad ľubovoľného reálneho čísla C na aritmetický reťazový zlomok, pričom $\frac{P_n}{Q_n}$ je jeho zblížený zlomok n -tého rádu, potom tento zblížený zlomok je najlepšou racionálnou aproximáciou čísla C v tom zmysle, že neexistuje presnejší racionálny zlomok menovateľom nie vyšším ako Q_n , ktorý aproximuje číslo C . Platí vzťah

$$\left| C - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{1}{Q_n Q_{n-1}} .$$

V časti (1.1.1) sme uviedli Euklidov algoritmus, ktorý slúži na výpočet najväčšieho spoločného deliteľa dvoch prirodzených čísel. V teórii reťazových zlomkov pomocou tohto algoritmu môžeme ľubovoľné racionálne číslo rozložiť na aritmetický reťazový zlomok.

PRÍKLAD 2. Uvedieme rozklad čísla $\frac{243}{65}$ na aritmetický reťazový zlomok pomocou Euklidovho algoritmu:

$$\begin{aligned} 243 &= 3 * 65 + 48 \\ 65 &= 1 * 48 + 17, \\ 48 &= 2 * 17 + 14, \\ 17 &= 1 * 14 + 3, \\ 14 &= 4 * 3 + 2, \\ 3 &= 1 * 2 + 1, \\ 2 &= 2 * 1 + 0, \end{aligned}$$

t.j. dostaneme postupnosť $[3; 1, 2, 1, 4, 1, 2]$.

V prvej kapitole sme zaviedli diofantické rovnice (7). Nech je daná diofantická rovnica $ax + by = c$. Často je potrebné nájsť iba celočíselné riešenia pre x, y . Nech a, b a c sú celé čísla, pričom c je deliteľné najväčším spoločným deliteľom čísel a, b , potom celočíselné riešenie rovnice je nasledujúce:

$$\begin{aligned} x &= (-1)^{n-1}cQ_{n-1} + tQ_n, \\ y &= (-1)^n - cP_{n-1} + tP_n, \end{aligned}$$

kde $t \in \mathbb{Z}$, P_{n-1} je čitateľ, Q_{n-1} je menovateľ predposledného zblíženého zlomku v rozklade čísla $\frac{a}{b}$, pričom $\frac{a}{b} \equiv \frac{P_n}{Q_n}$.

PRÍKLAD 3. Daná je rovnica $43x - 37y = 21$.

Euklidovým algoritmom dostaneme, že $\frac{43}{37} = [1; 6, 6]$, čiže v tomto prípade $P_{n-1} = 7$, $Q_{n-1} = 6$. Potom dostaneme riešenia

$$x = 37t - 126, \quad y = 147 - 43t, \quad \text{kde } t \in \mathbb{Z}.$$

Definícia 2.10. *Aritmetický reťazový zlomok (26) sa nazýva periodickým, ak postupnosť jej čiastkových hodnôt je periodická, t.j. opakujú sa čísla $q_0, q_1, \dots, q_{n-1}$ od i -tého člena aritmetického reťazového zlomku, kde $0 \leq i < n$.*

$$[q_0; q_1, \dots, q_{i-1}, \overline{q_i, \dots, q_{n-1}}],$$

kde čiara nad číslami vyjadruje poradie opakovania číslíc.

Poznámka: Analogicky môžeme definovať pojem periodických reťazových zlomkov aj pre reťazové zlomky všeobecného typu, ale v teórii čísel predmetom skúmania sú hlavne aritmetické reťazové zlomky.

V teórii čísel významnú úlohu hrá *Lagrangeova veta* tvrdiaca, že každú kvadratickú iracionalitu možno rozložiť na periodické reťazové zlomky.

PRÍKLAD 4. Napríklad: $\frac{1+\sqrt{7}}{2} = [1; \overline{1, 4, 1, 1}]$, $\sqrt{13} = [3; \overline{1, 1, 1, 6}]$.

Za poznámku stojí rozklad čísla $\sqrt{13}$ na reťazový zlomok všeobecného typu

$$\sqrt{13} = 3 + (\sqrt{13} - 3) = 3 + \frac{2}{3+} \frac{1}{3+} \frac{1}{3+} \frac{1}{3+} \cdots,$$

ktorý je jednoduchší a konverguje rýchlejšie ako jeho rozklad na aritmetický reťazový zlomok. Z tohto dôvodu rozklad kvadratickej iracionality na aritmetický reťazový zlomok je zaujímavý skôr z teoretického než praktického pohľadu.

2.2 Rozklad niektorých funkcií na reťazové zlomky

V prvej časti podkapitoly uvedieme Lagrangeovu metódu a aplikujeme ju na základnú diferenciálnu rovnicu, čím získame rozklad riešenia tejto rovnice na reťazový zlomok. V druhej časti vlastne túto zovšeobecnenú metódu využijeme na rozklad mocninových, logaritmických a exponenciálnych funkcií a $\operatorname{tg}(\cdot)$, $\operatorname{th}(\cdot)$, $\operatorname{arctg}(\cdot)$.

2.2.1 Lagrangeova metóda a základná diferenciálna rovnica

Lagrange navrhol nasledujúci spôsob riešenia diferenciálnych rovníc pomocou reťazových zlomkov.

Nech je daná diferenciálna rovnica s premennými x, y . Ak položíme $y \approx \xi_0$ a predpokladáme, že $|x| \approx 0$, potom platí, že $y = \frac{\xi_0}{1+y_1}$ a ak dosadíme y do pôvodnej rovnice, potom dostaneme novú diferenciálnu rovnicu s premennými x, y_1 . Potom položíme $y_1 \approx \xi_1$ a predpokladáme, že $|x| \approx 0$, vyjadríme $y_1 = \frac{\xi_1}{1+y_2}$ a dosadíme do diferenciálnej rovnice. Ak celý tento proces zopakujeme, dostaneme sa k riešeniu pôvodnej diferenciálnej rovnice v tvare reťazového zlomku $\left[\frac{\xi_n}{1+} \right]_1^\infty$, pričom premennú ξ_n môžeme hľadať v tvare $a_n x^{v_n}$, kde $v_n \geq 0$.

Týmto spôsobom je možné vyriešiť mnoho diferenciálnych rovníc, avšak býva problémom nájsť závislosť ξ_n od indexu n , a n -tého člena reťazového zlomku.

Nech je daná diferenciálna rovnica

$$(\alpha + \alpha'x)xy' + (\beta + \beta'x)y + \gamma y^2 = \delta x, \quad y(0) = 0, \quad (27)$$

kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sú racionálne čísla. Na (27) aplikujeme vyššie opísanú Lagrangeovu metódu, t.j. položíme $y = \frac{\delta x}{\alpha + \beta + y_1}$ a transformujeme ju, dostaneme

$$(\alpha + \alpha'x)xy' + [\alpha + \beta - (\alpha + \beta')x]y + y_1^2 = [(\alpha + \beta)(\alpha' + \beta') + \gamma\delta]x.$$

Ak zopakujeme tento proces, dostaneme nasledujúci reťazový zlomok pre premennú y :

$$\begin{aligned} y = & \frac{\delta x}{(\alpha + \beta) +} \frac{[(\alpha + \beta)(\alpha' + \beta') + \gamma\delta]x}{(2\alpha + \beta) +} \frac{[\alpha\alpha' - \alpha\beta' + \alpha'\beta + \gamma\delta]x}{(3\alpha + \beta) +} \dots \\ & \dots \frac{[(n\alpha + \beta)(n\alpha' + \beta') + \gamma\delta]x}{(2n\alpha + \beta) +} \frac{[n^2\alpha\alpha' - n\alpha\beta' + n\alpha'\beta + \gamma\delta]x}{[(2n + 1)\alpha + \beta] +} \dots \end{aligned} \quad (28)$$

Skoro všetky diferenciálne rovnice, ktorých riešenia boli rozložené do tvaru reťazových zlomkov Lagrangeom, Eulerom a ďalšími matematikmi sú špeciálnym (aj (27)) prípadom základnej diferenciálnej rovnice:

$$(\alpha + \alpha'x^k)xy' + (\beta + \beta'x^k)y + \gamma y^2 = \delta x^k, \quad y(0) = 0. \quad (29)$$

Na riešenie základnej diferenciálnej rovnice môžeme veľmi ľahko prísť na základe (28):

$$\begin{aligned} y = & \frac{\delta x^k}{(k\alpha + \beta) +} \frac{[(k\alpha + \beta)(k\alpha' + \beta') + \gamma\delta]x^k}{(2k\alpha + \beta) +} \frac{[k^2\alpha\alpha' - k\alpha\beta' + k\alpha'\beta + \gamma\delta]x}{(3k\alpha + \beta) +} \dots \\ & \dots \frac{[(nk\alpha + \beta)(nk\alpha' + \beta') + \gamma\delta]x}{(2nk\alpha + \beta) +} \frac{[n^2k^2\alpha\alpha' - nk\alpha\beta' + nk\alpha'\beta + \gamma\delta]x}{[(2n + 1)k\alpha + \beta] +} \dots \end{aligned} \quad (30)$$

2.2.2 Riešenia funkcií v tvare reťazových zlomkov

Mocninová funkcia

Nech je daná mocninová funkcia $y = (1 + x)^v$, $v \in \mathbb{R}$, ktorej diferenciálnu rovnicu môžeme dostať v tvare $(1 + x)y' = vy$, $y(0) = 1$. Položme $y = 1 + \frac{vx}{1+z}$, potom diferenciálnu rovnicu môžeme transformovať na

$$(1 + x)xz' + [1 - (1 - v)x]z^2 + z = -(1 - v)x, \quad z(0) = 0,$$

čo je špeciálnym prípadom (29), v ktorom platí $k = \alpha = \alpha' = \beta = \gamma = 1$, $\beta' = -(1-v)$ a $\delta = 1 - v$. Potom z (30) dostaneme rozklad riešenia mocnínovej funkcie na reťazový zlomok:

$$(1+x)^v = 1 + \frac{vx}{1+} \frac{(1-v)x}{2+} \frac{(1+v)x}{3+} \dots \frac{(n-v)x}{2+} \frac{(n+v)x}{(2n+1)+} \dots \quad (31)$$

Tento rozklad získal Lagrange. Na základe uvedených podmienok konvergenzie rozklad konverguje v celej komplexnej rovine, okrem častí reálnej osi od $-\infty$ do -1 . Mocninový rad, v ktorom sa nachádza funkcia $y = (1+x)^v$ konverguje v otvorenom kruhu s polomerom 1 a stredom v nulovom bode. To znamená, že rozklad uvedenej funkcie na reťazový zlomok konverguje v omnoho širšej oblasti ako rozklad tej istej funkcie do mocninového radu.

PRÍKLAD 5. Nech $x = 2$, $v = \sqrt{2}$. Potom ak dosadíme do (31) dostaneme

$$3^{\sqrt{2}} = 1 + \frac{2\sqrt{2}}{1+} \frac{2(1-\sqrt{2})}{2+} \frac{2(1+\sqrt{2})}{3+} \dots \frac{2(n-\sqrt{2})}{2+} \frac{2(n+\sqrt{2})}{(2n+1)+} \dots$$

Logaritmická funkcia

Rozklad (31) môžeme prepísať do tvaru

$$\frac{(1+x)^v - 1}{v} = \frac{x}{1+} \frac{(1-v)x}{2+} \frac{(1+v)x}{2+} \dots \frac{(n-v)x}{2+} \frac{(n+v)x}{(2n+1)+} \dots$$

Ak položíme $v = 0$, a pritom $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{(1+x)^v - 1}{v} = \ln(1+x)$, potom dostaneme rozklad prirodzeného logaritmu na reťazový zlomok:

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1+} \frac{x}{2+} \frac{x}{3+} \frac{2x}{2+} \frac{2x}{5+} \dots \frac{nx}{2+} \frac{nx}{(2n+1)+} \dots \quad (32)$$

Tento rozklad a spôsob jeho získania uviedol Lagrange. Rozklad konverguje v komplexnej rovine s výnimkou častí reálnej osi od $-\infty$ do -1 .

PRÍKLAD 6. Nech $x = 2$. Potom dosadením do (32) dostaneme rozklad čísla $\ln(3)$:

$$\ln(3) = \frac{2}{1+} \frac{2}{2+} \frac{2}{3+} \dots \frac{2n}{2+} \frac{2n}{(2n+1)+} \dots$$

Exponenciálna funkcia

Ak v rozklade (31) nahradíme x za $\frac{x}{v}$, potom reťazový zlomok bude mať nasledujúci tvar:

$$(1 + \frac{x}{v})^v = 1 + \frac{x}{1+} \frac{\frac{1-v}{v}x}{2+} \frac{\frac{1+v}{v}x}{3+} \dots \frac{\frac{n-v}{v}x}{2+} \frac{\frac{n+v}{v}x}{(2n+1)+} \dots$$

Z matematickej analýzy poznáme vzťah $\lim_{v \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{v}\right)^v = e^x$, t.j. ak $v \rightarrow \infty$ dostaneme rozklad

$$e^x = 1 + \frac{x}{2-} \frac{x}{2+} \frac{x}{3-} \frac{x}{2+} \cdots \frac{x}{2+} \frac{x}{(2n+1)-} \cdots$$

Tento rozklad získal Lagrange. Pomocou vzťahu

$$q_0 + \frac{p_1}{q_1+} \cdots \frac{p_n}{q_n+} \cdots = \quad (33)$$

$$q_0 + \frac{p_1 q_2}{(q_1 q_2 + a_2)-} \frac{p_2 p_3 q_4}{[(q_2 q_3 + a_3) q_4 + q_2 a_4]-} \cdots \frac{p_{2n-2} p_{2n-1} q_{2n-4} q_{2n}}{[(q_{2n-2} q_{2n-1} + a_{2n-1}) q_{2n-2} + q_{2n-2} a_{2n}]-} \cdots$$

môžeme previesť Lagrangeov rozklad e^x na Eulerov rozklad e^x :

$$e^x = 1 + \frac{2x}{(2-x)+} \frac{x^2}{6+} \frac{x^2}{6+} \cdots \frac{x^2}{[2(2n+1)]+} \cdots$$

Obe rozklady e^x konvergujú v celej komplexnej rovine.

Rozklady funkcií $\operatorname{tg}(\cdot)$, $\operatorname{th}(\cdot)$, $\operatorname{arctg}(\cdot)$

Diferenciálna rovnica pre funkciu $y = \operatorname{tg}(x)$ má tvar $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$. Ak položíme $y = \frac{x}{1+z}$ diferenciálna rovnica sa transformuje na

$$xz' + z + z^2 = -x^2,$$

čo je špeciálny prípad diferenciálnej rovnice (29): $\alpha = \alpha' = \beta = \gamma = \delta = 1$, $\beta' = -1$, $k = 2$. Potom na základe (30) $\operatorname{tg}(x)$ bude mať nasledujúci rozklad do reťazového zlomku:

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{x}{1-} \frac{x^2}{3-} \cdots \frac{x^2}{(2n+1)-} \cdots \quad (34)$$

Tento rozklad objavil Lambert. Rozklad konverguje na celej komplexnej rovine okrem tých bodov, v ktorých $\operatorname{tg}(x)$ nie je definovaný (kde $\operatorname{tg}(x) = \pm\infty$).

PRÍKLAD 7. Nech $x = \frac{\pi}{4}$. Číslo 1 na základe (34) môžeme zapísať pomocou reťazového zlomku

$$1 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi/4}{1-} \frac{(\pi/4)^2}{3-} \cdots \frac{(\pi/4)^2}{(2n+1)-} \cdots$$

Rozklad funkcie $\operatorname{th}(x)$ dostaneme z rozkladu $\operatorname{tg}(x)$, a to tak, že x nahradíme za $\frac{x}{i}$ a celú rovnicu vynásobíme s i :

$$\operatorname{th}(x) = \frac{x}{1+} \frac{x^2}{3+} \cdots \frac{x^2}{(2n+1)+} \cdots$$

Rozklad funkcie $\operatorname{arctg}(x)$ dostaneme podobne ako $\operatorname{tg}(x)$. Diferenciálna rovnica pre $\operatorname{arctg}(x)$ je $y' = \frac{1}{1+y^2}$, $y(0) = 0$. Nech $y = \frac{x}{1+z}$, potom rovnica sa stáva špeciálnym prípadom rovnice (29), kde $\alpha = \alpha' = \beta = \delta = 1$, $\beta' = -1$, $k = 2$:

$$(1+x^2)xz' + (1-x^2)z + z^2 = x^2.$$

Podľa (30) rozklad nadobúda tvar:

$$\operatorname{arctg}(x) = \frac{x}{1+z} = \frac{x}{1+} \frac{x^2}{3+} \frac{4x^2}{5+} \cdots \frac{n^2x^2}{(2n+1)+} \cdots \quad (35)$$

Tento rozklad tiež uviedol Lambert. Rozklad konverguje v komplexnej rovine výmin-kou dvoch oblastí na imaginárnej osi: od $-\infty$ do $-i$ a od i do ∞ , teda konvergenčná oblasť tohto rozkladu je omnoho širšia ako mocninového radu funkcie $\operatorname{arctg}(x)$, ktorý konverguje vnútri kruhu jednotkového polomeru so stredom v nulovom bode.

PRÍKLAD 8. Nech $x = 1$, potom rozklad iracionálneho čísla $\frac{\pi}{4}$ na základe (35) je

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}(1) = \frac{1}{1+} \frac{1}{3+} \frac{4}{5+} \cdots \frac{n^2}{(2n+1)+} \cdots$$

2.3 Maticové metódy pre reťazové zlomky

Teória reťazových zlomkov je vytvorená pomocou základných rekurentných vzťahov (23). Je prirodzené vyšetriť zovšeobecnenie reťazových zlomkov, založené na iných lineárnych rekurentných vzťahoch, ktoré platia medzi čitateľom a menovateľom susedných zblížených zlomkov.

Takéto lineárne rekurentné vzťahy môžeme napísať v tvare:

$$P_n = \alpha_n P_{n-1} + \beta_n Q_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (36)$$

$$Q_n = \gamma_n P_{n-1} + \delta_n Q_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

kde α_n , β_n , γ_n a δ_n sú celé čísla. Tieto vzťahy zapísané v maticovej forme sú

$$\begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{n-1} \\ Q_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (37)$$

2.3.1 Nájdenie druhej odmocniny čísla pomocou štvorcovej matice druhého rádu

Pre vzťahy (36), (37) položíme $\alpha_n = a$, $\beta_n = u$, $\gamma_n = 1$, $\delta_n = a$, potom tieto vzťahy dostaneme v nasledujúcom tvare:

$$\begin{aligned} P_n &= aP_{n-1} + tQ_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ Q_n &= P_{n-1} + aQ_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

respektívne

$$\begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & t \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{n-1} \\ Q_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ak $a = 0$ proces nekonverguje (prípád singulárnej matice), preto predpokladáme, že $a \neq 0$. Ak $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n}$ existuje, tak je rovná $\sqrt{t}$ alebo $-\sqrt{t}$. Z toho vyplýva, že pri $t < 0$ reťazový zlomok nekonverguje (v $\mathbb{R}$). Označme:

$$x_+ = \sqrt{t} \quad \text{a} \quad x_- = -\sqrt{t}.$$

Potom máme štyri konvergenčné prípady v závislosti od čísla a

- ak $x_+ < a$, potom

$$x_+ < \frac{P_n}{Q_n} < \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \quad (38)$$

- ak $0 < a < x_+$, potom

$$\frac{P_{2n-2}}{Q_{2n-2}} < \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} < x_+ < \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} < \frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}} \quad (39)$$

- ak $x_- < a < 0$, potom

$$\frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}} < \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} < x_- < \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} < \frac{P_{2n-2}}{Q_{2n-2}} \quad (40)$$

- ak $a < x_-$, potom

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} < \frac{P_n}{Q_n} < x_- \quad (41)$$

V prípade, že $a > 0$, t.j. pre (38) a (39) platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} = x_+ = \sqrt{t}$, kým
v prípade, kde $a < 0$, čiže pre (40) a (41) platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} = x_- = -\sqrt{t}$.

PRÍKLAD 9. Na základe uvedenej teórie zostrojíme ukážkový príklad.

- Nech $\sqrt{t} = \sqrt{31}$, $a = 6$, potom nastáva prípad (38) a matica má tvar $\begin{pmatrix} 6 & 31 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$.

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{6}{1}, \frac{P_1}{Q_1} = \frac{67}{12}, \frac{P_2}{Q_2} = \frac{774}{139}, \frac{P_3}{Q_3} = \frac{8.953}{1608}, \frac{P_4}{Q_4} = \frac{103.566}{18.601}, \dots$$

$$\sqrt{31} < \frac{103.566}{18.601} \left(\frac{P_4}{Q_4} \right) < \frac{8.953}{1.608} \left(\frac{P_3}{Q_3} \right)$$

$$\approx 5,567764363 \quad \approx 5,567765174 \quad \approx 5,56778607$$

- Nech $\sqrt{t} = \sqrt{39}$, $a = 6$, potom nastáva prípad (39) a matica má tvar $\begin{pmatrix} 6 & 39 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$.

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{6}{1}, \frac{P_1}{Q_1} = \frac{75}{12}, \frac{P_2}{Q_2} = \frac{918}{147}, \frac{P_3}{Q_3} = \frac{11.241}{1.800}, \frac{P_4}{Q_4} = \frac{137.646}{22.041}, \frac{P_5}{Q_5} = \frac{1.685.475}{269.892}, \dots$$

$$\frac{918}{147} \left(\frac{P_2}{Q_2} \right) < \frac{137.646}{22.041} \left(\frac{P_4}{Q_4} \right) < \sqrt{39} < \frac{1.685.475}{269.892} \left(\frac{P_5}{Q_5} \right) < \frac{11.241}{1.800} \left(\frac{P_3}{Q_3} \right)$$

$$\approx 6,2449 \quad \approx 6,24499796 \quad \approx 6,244997998 \quad \approx 6,244997999 \quad \approx 6,245$$

- Nech $\sqrt{t} = \sqrt{39}$, $a = -6$, potom nastáva prípad (40) a matica má tvar $\begin{pmatrix} -6 & 39 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$.

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{-6}{1}, \frac{P_1}{Q_1} = \frac{75}{-12}, \frac{P_2}{Q_2} = \frac{-918}{147}, \frac{P_3}{Q_3} = \frac{11.241}{-1.800}, \frac{P_4}{Q_4} = \frac{-137.646}{22.041}, \dots$$

$$-\frac{11.241}{1.800} \left(\frac{P_3}{Q_3} \right) < -\frac{1.685.475}{269.892} \left(\frac{P_5}{Q_5} \right) < -\sqrt{39} < -\frac{137.646}{22.041} \left(\frac{P_4}{Q_4} \right) < -\frac{918}{147} \left(\frac{P_2}{Q_2} \right)$$

$$\approx -6,245 \quad \approx -6,244997999 \quad \approx -6,244997998 \quad \approx -6,24499796 \quad \approx -6,2449$$

- Nech $\sqrt{t} = \sqrt{31}$, $a = -6$, potom nastáva prípad (41) a matica má tvar $\begin{pmatrix} -6 & 31 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$.

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{-6}{1}, \frac{P_1}{Q_1} = \frac{67}{-12}, \frac{P_2}{Q_2} = \frac{-774}{139}, \frac{P_3}{Q_3} = \frac{8.953}{-1.608}, \frac{P_4}{Q_4} = \frac{-103.566}{18.601}, \dots$$

$$-\frac{8.953}{1.608} \left(\frac{P_3}{Q_3} \right) < -\frac{103.566}{18.601} \left(\frac{P_4}{Q_4} \right) < -\sqrt{31}$$

$$\approx -5,56778607 \quad \approx -5,567765174 \quad \approx -5,567764363$$

2.3.2 Riešenie kvadratickej rovnice pomocou matic druhého rádu

Predpokladajme, že platí $\alpha_n = a$, $\beta_n = -q$, $\gamma_n = 1$, $\delta_n = a + p$. Potom pre vzťahy (36) dostaneme

$$P_n = aP_{n-1} + (-q)Q_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$Q_n = P_{n-1} + (a + p)Q_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

čo v maticovom podobe nadobudne tvar

$$\begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -q \\ 1 & a + p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{n-1} \\ Q_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ak $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n}$ existuje, potom bude koreňom kvadratickej rovnice $x^2 + px + q = 0$. Pri $D = p^2 - 4q < 0$ proces nekonverguje, pretože v tomto prípade korene kvadratickej rovnice sú komplexné a postupnosť s reálnymi členmi nemôže dať komplexnú limitu. Označme:

$$x_+ = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad \text{a} \quad x_- = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Pre $\frac{x_+ + x_-}{2}$ reťazový zlomok nekonverguje. Budeme mať štyri prípady konvergencií (v závislosti od čísla a)

- ak $x_+ < a$, potom

$$x_+ < \frac{P_n}{Q_n} < \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \quad (42)$$

- ak $\frac{x_+ + x_-}{2} < a < x_+$, potom

$$\frac{P_{2n-2}}{Q_{2n-2}} < \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} < x_+ < \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} < \frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}} \quad (43)$$

- ak $x_- < a < \frac{x_+ + x_-}{2}$, potom

$$\frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}} < \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} < x_- < \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} < \frac{P_{2n-2}}{Q_{2n-2}} \quad (44)$$

- ak $a < x_-$, potom

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} < \frac{P_n}{Q_n} < x_- \quad (45)$$

V prípade, že $a > \frac{x_+ + x_-}{2}$, platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} = x_+ = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$, ale

v prípade, že $a < \frac{x_+ + x_-}{2}$, platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} = x_- = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$.

PRÍKLAD 10. Nech je daná rovnica $x^2 - 4x + 2 = 0$ ($p = -4, q = 2$), ktorá má korene $x_+ = 2 + \sqrt{2}$ a $x_- = 2 - \sqrt{2}$.

- Nech $a = 4$, potom nastáva prípad (42) a matica nadobúda tvar $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{4}{1}, \frac{P_1}{Q_1} = \frac{14}{4}, \frac{P_2}{Q_2} = \frac{48}{14}, \frac{P_3}{Q_3} = \frac{164}{48}, \frac{P_4}{Q_4} = \frac{560}{164}, \frac{P_5}{Q_5} = \frac{1.912}{560}, \dots$$

$$2 + \sqrt{2} < \frac{1.912}{560} \left(\frac{P_5}{Q_5} \right) < \frac{560}{164} \left(\frac{P_4}{Q_4} \right)$$

$$\approx 3,41421 < \approx 3,41429 < \approx 3,41463$$

- Nech $a = 3$, potom nastáva prípad (43) a matica nadobúda tvar $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{3}{1}, \frac{P_1}{Q_1} = \frac{7}{2}, \frac{P_2}{Q_2} = \frac{17}{5}, \frac{P_3}{Q_3} = \frac{41}{12}, \frac{P_4}{Q_4} = \frac{99}{29}, \frac{P_5}{Q_5} = \frac{239}{70}, \dots$$

$$\frac{17}{5} \left(\frac{P_2}{Q_2} \right) < \frac{99}{29} \left(\frac{P_4}{Q_4} \right) < 2 + \sqrt{2} < \frac{239}{70} \left(\frac{P_5}{Q_5} \right) < \frac{41}{12} \left(\frac{P_3}{Q_3} \right)$$

$$= 3,4 < \approx 3,41379 < \approx 3,41421 < \approx 3,41429 < \approx 3,41667$$

- Nech $a = 1$, potom nastáva prípad (44) a matica nadobúda tvar $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{1}{1}, \frac{P_1}{Q_1} = \frac{-1}{-2}, \frac{P_2}{Q_2} = \frac{3}{5}, \frac{P_3}{Q_3} = \frac{-7}{-12}, \frac{P_4}{Q_4} = \frac{17}{29}, \frac{P_5}{Q_5} = \frac{-41}{-70}, \dots$$

$$\frac{7}{12} \left(\frac{P_3}{Q_3} \right) < \frac{41}{70} \left(\frac{P_5}{Q_5} \right) < 2 - \sqrt{2} < \frac{17}{29} \left(\frac{P_4}{Q_4} \right) < \frac{3}{5} \left(\frac{P_2}{Q_2} \right)$$

$$\approx 0,58333 < \approx 0,58571 < \approx 0,58579 < \approx 0,58621 < = 0,6$$

- Nech $a = 0$, potom nastáva prípad (45) a matica nadobúda tvar $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{0}{1}, \frac{P_1}{Q_1} = \frac{-2}{-4}, \frac{P_2}{Q_2} = \frac{8}{14}, \frac{P_3}{Q_3} = \frac{-28}{-48}, \frac{P_4}{Q_4} = \frac{96}{164}, \frac{P_5}{Q_5} = \frac{-328}{-560}, \dots$$

$$\frac{96}{164} \left(\frac{P_4}{Q_4} \right) < \frac{328}{560} \left(\frac{P_5}{Q_5} \right) < 2 - \sqrt{2}$$

$$\approx 0,58537 < \approx 0,58571 < \approx 0,58579$$

2.3.3 Súvis maticovej metódy s teóriou reťazových zlomkov

Hľadáme také podmienky, pri ktorých z rovníc (36) môžeme dostať základné rekurentné vzťahy (23). Kvôli tomu zameníme v (36) indexy o jedno nižšie (n na $n-1$) a aplikujeme na nich základné rekurentné vzťahy. Získame:

$$\begin{aligned} P_n &= \left(\alpha_n + \delta_{n-1} \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} \right) P_{n-1} - \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} (\alpha_{n-1} \delta_{n-1} - \beta_{n-1} \gamma_{n-1}) P_{n-2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ Q_n &= \left(\frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}} \delta_{n-1} + \delta_n \right) Q_{n-1} - \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}} (\alpha_{n-1} \delta_{n-1} - \beta_{n-1} \gamma_{n-1}) Q_{n-2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (46)$$

Zo vzťahoch (46) vyplýva, že P_n môžeme považovať za čitateľa a Q_n za menovateľa n -tého zblíženého zlomka v tom prípade, ak platia nasledujúce vzťahy:

$$\frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}} \alpha_{n-1} + \delta_n = \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} \delta_{n-1} + \alpha_n, \text{ pre } n \geq 2,$$

$$\frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}} = \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}}, \text{ pre } n \geq 2,$$

ktoré môžeme transformovať na tvar:

$$\frac{\alpha_n - \gamma_n}{\beta_n} = \frac{\alpha_{n-1} - \gamma_{n-1}}{\beta_{n-1}} = \dots = \frac{\alpha_1 - \gamma_1}{\beta_1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (47)$$

$$\frac{\beta_n}{\gamma_n} = \frac{\beta_{n-1}}{\gamma_{n-1}} = \dots = \frac{\beta_1}{\gamma_1}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

Potom maticu (37) môžeme napísať ako

$$\begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \frac{\gamma_1}{\beta_1} \beta_n & \alpha_n - \frac{\gamma_1 - \delta_1}{\beta_1} \beta_n \end{pmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (48)$$

a bude ekvivalentná reťazovému zlomku, ktorého čitatele p_n a menovatele q_n dostaneme pomocou vzťahov

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} (\beta_{n-1} \gamma_{n-1} - \alpha_{n-1} \delta_{n-1}), \quad n \geq 2, \\ q_n &= \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} \delta_{n-1} + \alpha_{n-1}, \quad n \geq 2, \end{aligned} \quad (49)$$

Zo vzťahov

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \gamma_0 & \delta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (50)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 q_0 + \beta_1 \\ \gamma_1 q_0 + \delta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 q_1 + p_1 \\ q_1 \end{pmatrix}$$

nájdeime nultý a prvý člen reťazového zlomku. Takýmto spôsobom matica (48) spolu s maticou $\begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ 1 & \delta_0 \end{pmatrix}$ dáva reťazový zlomok

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1 \alpha_0 + \beta_1 - \alpha_0 (\gamma_1 \alpha_0 + \delta_1)}{(\gamma_1 \alpha_0 + \delta_1) +} \frac{\frac{\beta_2}{\beta_1} (\beta_1 \gamma_1 - \alpha_1 \delta_1)}{\left(\frac{\beta_2}{\beta_1} \delta_1 + \alpha_2 \right) +} \dots \frac{\frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} (\beta_{n-1} \gamma_{n-1} - \alpha_{n-1} \delta_{n-1})}{\left(\frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} \delta_{n-1} + \alpha_n \right) +} \dots \quad (51)$$

PRÍKLAD 11. Nech je daná matica $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Na základe (51) číslo $\sqrt{2}$ môžeme zapísať ak reťazový zlomok

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+} \frac{1}{2+} \frac{1}{2+} \dots$$

V teórii reťazových zlomkov takýto spôsob dostaneme pomocou pomerne zložitého vzorca (33). Pri našom spôsobe je to oveľa ľahšie, pretože stačí postupne umocňovať maticu na druhú, na tretiu, atď.

PRÍKLAD 12.

Nech je daná matica z predchádzajúceho príkladu. Vypočítame jej druhú mocninu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nultý a prvý prvok reťazového zlomku dostaneme na základe (50) bezprostredne, ak poznáme prvé zblížené zlomky počiatočného rozkladu čísla $\sqrt{2}$. Ďalšie členy reťazového zlomku môžeme vypočítať pomocou vzťahov (49), v tomto prípade: $a_n = 2 * 4 - 3 * 3 = -1$, $b_n = 3 + 3 = 6$. Potom

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{2}{5-} \frac{1}{14-} \frac{1}{14-} \dots$$

PRÍKLAD 13. Ak umocníme maticu z Príkladu 11. na tretiu, dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 7 \end{pmatrix},$$

Na základe predchádzajúceho príkladu potom rozklad čísla $\sqrt{2}$ je

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{5}{12+} \frac{1}{14+} \frac{1}{14+} \dots$$

2.3.4 Rozklad kvadratickej iracionálnosti na neperiodické reťazové zlomky pomocou matíc druhého rádu s premennými prvkami

Na základe predchádzajúcej časti môžeme dostať nekonečno veľa rozkladov kvadratickej iracionálnosti na neperiodické reťazové zlomky.

PRÍKLAD 14. Nech je daná matica $\begin{pmatrix} 1 & 2(n+1) \\ n+1 & 1 \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}_0$, ktorá vyhovuje podmienkam (47). Pomocou vzťahu (37) môžeme dostať n -tý zblížený zlomok aproximovaného čísla

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1} + 2(n+1)Q_{n-1}}{(n+1)P_{n-1} + Q_{n-1}} \quad (52)$$

Ak $n \rightarrow \infty$ platí: $P_n \approx P_{n-1}$ a $Q_n \approx Q_{n-1}$. Po úprave rovnice (52) dostaneme

$$P_n [(n+1)P_n + Q_n] = [P_n + 2(n+1)Q_n] Q_n, \text{ ak } n \rightarrow \infty.$$

$\Downarrow$

$$\left(\frac{P_n}{Q_n}\right)^2 = 2, \text{ ak } n \rightarrow \infty,$$

z čoho $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} = \sqrt{2}$, t.j. matica rozloží číslo $\sqrt{2}$ na základe (51) na nasledujúci reťazový zlomok:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{2}{3+} \frac{21}{5+} \frac{136}{7+} \dots \frac{(n^2-1)(2n^2-1)}{(2n+1)+} \dots$$

PRÍKLAD 15. Na základe predchádzajúceho príkladu pre maticu $\begin{pmatrix} n & 2(n+1) \\ n+1 & n \end{pmatrix}$ dostávame $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} = \sqrt{2}$. Rozklad $\sqrt{2}$ v tomto prípade má tvar:

$$\sqrt{2} = \frac{4}{1+} \frac{21}{7+} \dots \frac{(n^2-1)(n^2+2n-1)}{(2n^2+1)+} \dots$$

2.3.5 Výpočet racionálnej odmocniny prirodzeného čísla pomocou matíc

TRETIA ODMOCNINA ČÍSLA

Nech máme postupnosti $\{P_n\}$, $\{Q_n\}$ a $\{R_n\}$, ktorých členy sú navzájom previazané vzťahmi:

$$P_n = aP_{n-1} + tQ_{n-1} + tR_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (53)$$

$$Q_n = P_{n-1} + aQ_{n-1} + tR_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$R_n = P_{n-1} + Q_{n-1} + aR_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tieto vzťahy môžeme vyjadriť pomocou matíc:

$$\begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \\ R_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & t & t \\ 1 & a & t \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{n-1} \\ Q_{n-1} \\ R_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (54)$$

Ak existujú limity $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{R_n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_n}{R_n}$ a sú konečné, potom platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{R_n} = \sqrt[3]{t^2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_n}{R_n} = \sqrt[3]{t}.$$

PRÍKLAD 16. Nech je daná matica tretieho rádu $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, ktorá spĺňa vzťah (54), t.j. $a = 1$, $t = 3$ a existujú tri postupnosti $\{P_n\}$, $\{Q_n\}$ a $\{R_n\}$ pomocou ktorých aproximujeme čísla $\sqrt[3]{9}$ a $\sqrt[3]{3}$.

Ak položíme $P_{-1} = 1$, $Q_{-1} = 1$, $R_{-1} = 1$, po šiestej iterácii dostaneme $P_6 = 61.234$, $Q_6 = 42.470$, $R_6 = 29.442$.

Potom platí:

$$\frac{61.234}{29.442} \approx 2,079818 \quad \text{a} \quad \frac{42.470}{29.442} \approx 1,442497.$$

Tabuľkové hodnoty sú:

$$\sqrt[3]{9} \approx 2,080084 \quad \text{a} \quad \sqrt[3]{3} \approx 1,44225.$$

Ak umocníme počiatočnú maticu na druhú, na tretiu alebo na n -tú, môžeme takýmto spôsobom zrýchliť konvergenciu procesu.

ŠTVRTÁ ODMOCNINA ČÍSLA

Zovšeobecnením vzťahov (53) môžeme získať vzťahy na výpočet štvrtej odmocniny prirodzeného čísla t :

$$\begin{aligned} P_n &= aP_{n-1} + tQ_{n-1} + tR_{n-1} + tS_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ Q_n &= P_{n-1} + aQ_{n-1} + tR_{n-1} + tS_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ R_n &= P_{n-1} + Q_{n-1} + aR_{n-1} + tS_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ S_n &= P_{n-1} + Q_{n-1} + R_{n-1} + aS_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{55}$$

Tieto vzťahy vyjadríme pomocou matíc nasledovne

$$\begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \\ R_n \\ S_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & t & t & t \\ 1 & a & t & t \\ 1 & 1 & a & t \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{n-1} \\ Q_{n-1} \\ R_{n-1} \\ S_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{56}$$

Tak isto ako v predchádzajúcom časti metóda funguje len vtedy, ak limity $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{S_n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_n}{S_n}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n}{S_n}$ existujú a sú konečné. Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{S_n} = \sqrt[4]{t^3}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_n}{S_n} = \sqrt[4]{t^2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n}{S_n} = \sqrt[4]{t}.$$

n -TÁ ODMOCNINA ČÍSLA

Na základe (54) a (56) môžeme odvodiť štvorcovú maticu na výpočet n -tej odmocniny prirodzeného čísla:

$$\begin{pmatrix} a & t & \cdots & t \\ 1 & a & \cdots & t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Táto matica umožňuje získať približnú hodnotu pre $\sqrt[n]{t^{n-1}}, \sqrt[n]{t^{n-2}}, \dots, \sqrt[n]{t}$, kde n je ľubovoľné racionálne číslo.

KONVERGENCIA EULEROVHO ALGORITMU

Metódu výpočtu odmocniny ľubovoľného racionálneho stupňa pomocou matíc prvýkrát uviedol Euler (aj keď nie v maticovej podobe). Podmienky jeho konverencie skúmal Eskin [5], ktorý dokázal, že Euklidov algoritmus konverguje pri ľubovoľnom $t > 1$, ak vhodným spôsobom vyberieme nulové priblíženie. Navyše algoritmus konverguje aj pri komplexných t , čo umožňuje získať približné hodnoty odmocnín komplexných čísel.

2.3.6 Riešenie rovnice tretieho stupňa pomocou matíc

Z matice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (57)$$

môžeme dostať rovnice

$$\begin{aligned} x &= \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}, \\ y &= \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}. \end{aligned} \quad (58)$$

Ak eliminuje x z týchto rovníc dostaneme rovnice tretieho stupňa vzhľadom na premennú y . Z toho vyplýva, že matica (57) v prípade konverencie procesu slúži na výpočet približnej hodnoty jedného reálneho koreňa rovnice tretieho stupňa. Z rovníc (58) získame rovnice

$$x = y + \frac{(a_{11} - a_{21})x + (a_{12} - a_{22})y + a_{13} - a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}},$$

$$y = 1 + \frac{(a_{21} - a_{31})x + (a_{22} - a_{32})y + a_{23} - a_{33}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}.$$

Pre konvergenciu je potrebné, aby platilo $y^2 = x$. Stačí (vzhľadom na konvergenciu), aby získané rovnice mali tvar:

$$x = y + \frac{a_{23} - a_{33}x}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}},$$

$$y = 1 + \frac{a_{23} - a_{33}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}.$$

Ak položíme $a_{21} = a_{31}$, $a_{22} = a_{32}$, $a_{11} = a_{21}$, $a_{13} = a_{23}$, $a_{12} - a_{22} = a_{23} = a_{33}$ matrica (57) nadobudne tvar

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} + a_{13} - a_{33} & a_{13} \\ a_{11} & a_{22} & a_{13} \\ a_{11} & a_{22} & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (59)$$

To nás privádza k rovnici tretieho stupňa

$$a_{11}y^3 + (a_{22} - a_{11})y^2 + (a_{33} - a_{22})y - a_{13} = 0 \quad (60)$$

Ak vezmeme špeciálny prípad $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{33} - 1 = p$ a $a_{13} = -q$ z matice (59) dostaneme maticu

$$\begin{pmatrix} 1 & -p - q & -q \\ 1 & 1 & -q \\ 1 & 1 & p + 1 \end{pmatrix}, \quad (61)$$

čo nás privedie k neúplnej kubickej rovnici

$$y^3 + py + q = 0. \quad (62)$$

PRÍKLAD 17. Nech je daná rovnica tretieho stupňa (62): $y^3 - y - 3 = 0$.

Zostrojíme maticu na základe matice (61): $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, pomocou ktorého dostaneme aproximáciu jediného reálneho koreňa rovnice. Ak položíme štartovací vektor

$\vec{x}_0 = (1, 1, 1)$, po piatich iteráciách dostaneme $\vec{x}_5 = (13.423, 8.026, 4.798)$.

Potom pre reálny koreň dostaneme nasledujúce aproximácie:

$$\frac{13.423}{8.026} \approx 1,67245957 \text{ a}$$

$$\frac{8.026}{4.798} \approx 1,67278025.$$

$$\text{MathLab: } \approx 1,67169988.$$

Táto metóda konverguje rýchlo iba vtedy, ak daná rovnica nemá dva korene, ktoré by boli navzájom blízke v absolútnej hodnote.

Poznámka: ak položíme $p = 0$, $q = -t$ matica (61) nadobudne tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & t & t \\ 1 & 1 & t \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Táto matica umožňuje aproximovať tretiu odmocninu čísla t (viď. časť 2.3.5).

Poznámka: Podobne ako v predchádzajúcich prípadoch, môžeme zostrojiť maticu n -tého rádu, ktorá bude slúžiť na približný výpočet jedného reálneho koreňa rovnice n -tého stupňa. Napríklad matica

$$\begin{pmatrix} k & la_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & la_n & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & la_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & la_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k & 0 & la_n \\ -la_0 & -la_1 & -la_2 & \cdots & -la_{n-4} & -la_{n-3} & k - la_{n-1} & -la_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & la_n & k \end{pmatrix}_{n \times n}$$

v prípade konvergentného procesu, môže slúžiť na približný výpočet reálneho koreňa rovnice

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 = 0.$$

Záver

V tejto práci sme sledovali dva ciele. Prvým cieľom bolo sprístupniť širšej čitateľskej verejnosti teóriu reťazových zlomkov. Zo stručného historického prehľadu vývoja tejto teórie, ktorý je predmetom prvej kapitoly, vyplýva, že reťazové zlomky zohrali v rozvoji matematiky významnú úlohu, hlavne v teórii čísel, ale aj v iných jej oblastiach. Mnohí známi matematici prispeli k tejto tematike. Stačí len spomenúť také zvučné mená ako Euklid, Euler a Lagrange (alebo zo súčasných čias významného ruského matematika Vladimira Igorevicha Arnolda), ktorí posúvali túto teóriu stále vpred a pomocou reťazových zlomkov sa im podarilo vyriešiť mnohé dovtedy nevyriešené problémy, z ktorých zopár takéto riešenie je súčasťou prvej časti tejto práce.

Druhý cieľ, ktorý sme sledovali (a ktorý je dôležitejší ako ten prvý), bol okrem iného naučiť sa približne riešiť algebraické rovnice, t.j. nájsť reálne korene polynómu ľubovoľného stupňa pomocou geometrických metód. Reťazové zlomky sa dajú vyjadriť nielen ako postupnosti celých čísel, ale aj pomocou istých špeciálnych matíc. Výhodou tejto metódy je skutočnosť, že rozklad toho istého reálneho čísla na reťazový zlomok môžeme vyjadriť pomocou viacerých matíc, čoho dôsledkom je zmena rýchlosti konvergencie zblížených reťazových zlomkov k danému riešeniu. Bohužiaľ, nezostal dostatočný priestor na to, aby sme mohli porovnať takéto metódy s inými približnými metódami riešenia algebraických rovníc. To môže byť produktom ďalšej práce.

Prínosom práce pre autora bolo prehĺbenie vedomostí o teórii reťazových zlomkov. Taktiež prínosom bola práca v editore L^AT_EX a písanie samotnej bakalárskej práce ako vedeckej práce.

Túto prácu odporúčam záujemcom matematiky, ktorí radi spoznávajú nové spôsoby a postupy riešení algebraických rovníc a niektorých špeciálnych funkcií.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Bortolotti, E.: *La scoperta delle frazioni continue*, Boll. della Mathesis, A, 11 (1919), 101-123
- [2] Brezinski, C., *History of continued fractions and Padé approximants*, Springer-Verlag, 1991
- [3] Cohen, M.R., Drabkin I. E.: *A source book in Greek science*, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1958
- [4] Danilov, V.L., et al.: *Matematičeskij analiz: funkcii, predely, rjady, cepnye drobi*, Fizmatgiz, Moskva, 1961
- [5] Èskin, L. D. *Ob algoritme Èjlera dlja izvlečeniya kornej*, Kazan. Gos. Univ. Uchen. Zap., volume 115, 14 (1955), 139–143, dostupné na internete (30.05.2014):
<http://www.mathnet.ru/links/9ed082d2814238e1988851c920b81a9f/uzku429.pdf>
- [6] Euler, L.: *De fractionibus continuis dissertatio*, Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 9 (1744), 98-137
- [7] Euler, L.: *Introductio in analysin infinitorum*, 1748
- [8] Heath, T.: *The thirteen books of Euclid's elements*, Cambridge University Press, Cambridge, 1908
- [9] Lagrange, J. L.: *Sur la résolution des équations numériques*, Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-lettres de Berlin, t. XIII, Œuvres complètes, tome 2 (1769), 539-578, dostupné na internete (30.05.2014):
http://math-doc.ujf-grenoble.fr/cgi-bin/oeitem?id=OE_LAGRANGE__2_539_0
- [10] Smith, D.E.: *A source book in mathematics*, Mc Graw Hill, 1929
- [11] Tannery, P.: *Sur la mesure du cercle d'Archimède*, Mém. Soc. Sc. Phys. Nat. Bordeaux, 2è sér., 4 (1882), 313-337

[12] Wallis, J.: *Arithmetica infinitorum*, 1656, dostupné na internete (28.05.2014):

http://books.google.sk/books?id=Z5w_AAAAcAAJ

[13] Yoder, J. G.: *A catalogue of the manuscripts of Christiaan Huygens, including a concordance with his Oeuvres complètes*, BRILL, 2013