

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



ÚVOD DO TEÓRIE DIGITÁLNYCH FILTROV - LOW PASS
FILTER

BAKALÁRSKA PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**ÚVOD DO TEÓRIE DIGITÁLNYCH FILTROV - LOW PASS
FILTER**

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: Mgr.Soňa KILIANOVÁ, PHD.



ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

- Meno a priezvisko študenta:** Andrej Jakubovič
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský
- Názov:** Úvod do teórie digitálnych filtrov - Low Pass Filter
Introduction to the theory of digital filters - Low Pass Filter
- Cieľ:** Naštudovanie a prehľadné spracovanie úvodu do teórie digitálnych filtrov, so zameraním na základný Low-Pass Filter.
- Vedúci:** Mgr. Soňa Kilianová, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
- Dátum zadania:** 18.10.2013
- Dátum schválenia:** 14.11.2013
doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Abstrakt v štátnom jazyku

JAKUBOVIČ, Andrej: Úvod do teórie digitálnych filtrov - Low Pass Filter [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Mgr. Soňa Kilianová, PhD., Bratislava, 2014, 47 s.

Cieľom našej práce je prehľadné spracovanie úvodu do teórie digitálnych filtrov so zameraním na najjednoduchší filter dolnej priepuste (low-pass filter). Práca je rozdelená do troch kapitol. V Kapitole 1 definujeme signál ako fyzikálny pojem, akým spôsobom ho získame, čo môže spôsobiť znižovanie kvality záznamu informácie. Ďalej poskytujeme definíciu pojmu filter a venujeme sa rozdielom medzi filterami reálneho sveta a tými digitálnymi. Pre najjednoduchší filter dolnej priepuste vypočítame tromi spôsobmi frekvenčnú odozvu a pomocou násobku amplitúdy a fázového posunu filtra podrobne analyzujeme filtrovacie vlastnosti pre daný filter pri ľubovoľnej frekvencii. V Kapitole 2 podrobne uvádzame vlastnosti digitálnych filtrov, medzi ktoré patria linearita, časová nemennosť, koeficienty diferenčnej rovnice, impulzná odozva filtra, transformačná funkcia, frekvenčná odozva, póly a nulové body filtrov a stabilita. Následne v záverečnej kapitole aplikujeme poznatky o správaní a vlastnostiach filtrov na štyri základné filtre, pomocou ktorých sa dajú skonštruovať všetky ostatné lineárne a časovo nemenné filtre.

Kľúčové slová: Signál, Digitálny filter, Najjednoduchší filter dolnej priepuste, Frekvenčná odozva, Násobok amplitúdy

Abstract

JAKUBOVIČ, Andrej: Introduction to the theory of digital filters - Low Pass Filter [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Mgr. Soňa Kilianová, PhD., Bratislava, 2014, 47p.

The objective of our work is an informative procession of introduction to the theory of digital filters, focusing the low-pass filter. The paper is divided into three chapters. In the Chapter 1 we define signal as a physical phenomenon, in which way we can obtain it, what can cause lowering quality of recording. In addition, we provide definition of a filter, we look at difference between real world filters and digital filters. For the simplest low-pass filter we compute frequency response in three different ways and using amplitude response and phase delay we analyze filtering features for given filter with any frequency, in detail. In Chapter 2 we introduce general characteristics of digital filters, which includes linearity, time-invariance, coefficients of difference equations, impulse response of filter, transformation function, frequency response, poles and zeros of a filter, and stability. Subsequently, in the final Chapter we apply knowledge about filter features on four basic filters, from which we can construct any other linear time-invariant filter.

Keywords: Signal, Digital Filter, Simplest Low-Pass Filter, Frequency response, Amplitude response

Obsah

Úvod	8
1 Signály a filtre	9
1.1 Signál	9
1.2 Spracovanie signálu	10
1.3 Spojité a diskkrétne signály	11
1.4 Analógové signály	11
1.5 Digitálne signály	13
1.6 Filtre	14
1.7 Najjednoduchší filter dolnej priepuste	15
1.7.1 Definícia filtra	16
1.8 Hľadanie frekvenčnej odozvy	17
1.8.1 Hľadanie frekvenčnej odozvy pomocou komplexných čísiel	22
2 Vlastnosti digitálnych filtrov	25
2.1 Linearita a časová nemennosť	25
2.2 Reprezentácia digitálneho filtra	28
2.2.1 Diferenčná rovnica	28
2.2.2 Impulzná odozva a konvolúcia	29
2.2.3 Transformačná funkcia	33
2.2.4 Frekvenčná odozva	35
2.3 Póly a nulové body	36
3 Príklady filtrov	38
3.1 Filter s jedným nulovým bodom	38
3.2 Jednopolový filter	40
3.3 Dvopolový filter	41
3.4 Filter s dvomi nulovými bodmi	44
Záver	46
Zoznam použitej literatúry	47

Úvod

V elektronike, vo výpočtovej technike a v matematike digitálny filter vykonáva matematické operácie na vzorke diskkrétne určeného signálu, aby zoslabil alebo zosilnil zvolené aspekty daného signálu. Filter dolnej pásmovej priepuste (angl. „low pass filter“) je filter, ktorý prepúšťa nízko frekvenčné signály a utlmuje signály s frekvenciou vyššou ako je limitný kmitočet. Prvá zmienka v literatúre o digitálnych filtroch je ešte zo 60. rokov 20. storočia. Odvtedy s dramatickými pokrokmi v digitálnych technológiach digitálne filtre začali ponúkať realizovateľné riešenia problémov filtrovania, ktoré sa v minulosti riešili pomocou analógových filtrov. Od tých čias bolo vymyslených veľa druhov filtrov ako napríklad nerekurzívne, rekurzívne, prispôsobiteľné filtre, filtre hornej, dolnej a pásovej priepuste, hrebeňový filter, šumový filter, filtre s oneskorením.

Hlavným cieľom tejto bakalárskej práce je podrobne spracovať teóriu digitálnych filtrov s hlavným zameraním na filter dolnej priepuste. Čitateľ tejto práce sa môže systematicky vzdelávať v danej problematike, rýchlo a efektívne, bez potreby znalosti anglického jazyka.

Bakalárska práca je rozdelená na 3 časti. Všetky tri sú teoretické. V prvej kapitole podrobne rozoberieme signály a filtre, ich základné vlastnosti a aplikujeme ich na najjednoduchší filter dolnej priepuste. V druhej kapitole čitateľa oboznámime so základnými vlastnosťami filtrov ako napríklad, linearitu a časovú nemennosť. Na záver v tretej časti podrobne rozoberieme štyri základne druhy filtrov, ich princípy a fungovanie. Všetko je nakoniec zhrnuté v Závere bakalárskej práce.

1 Signály a filtre

Prvá kapitola obsahuje podrobný opis vlastností signálov a filtrov. Načrtne úvod do spracovania signálu a rozdelenie signálov podľa jednotlivých vlastností. Následne je rozvinutý úvod do teórie digitálnych filtrov, ich najzákladnejších vlastností a dané poznatky sú aplikované na najjednoduchší filter dolnej priepuste. V častiach 1.1 až 1.5 sme čerpali najmä z [2], [8] a [10].

1.1 Signál

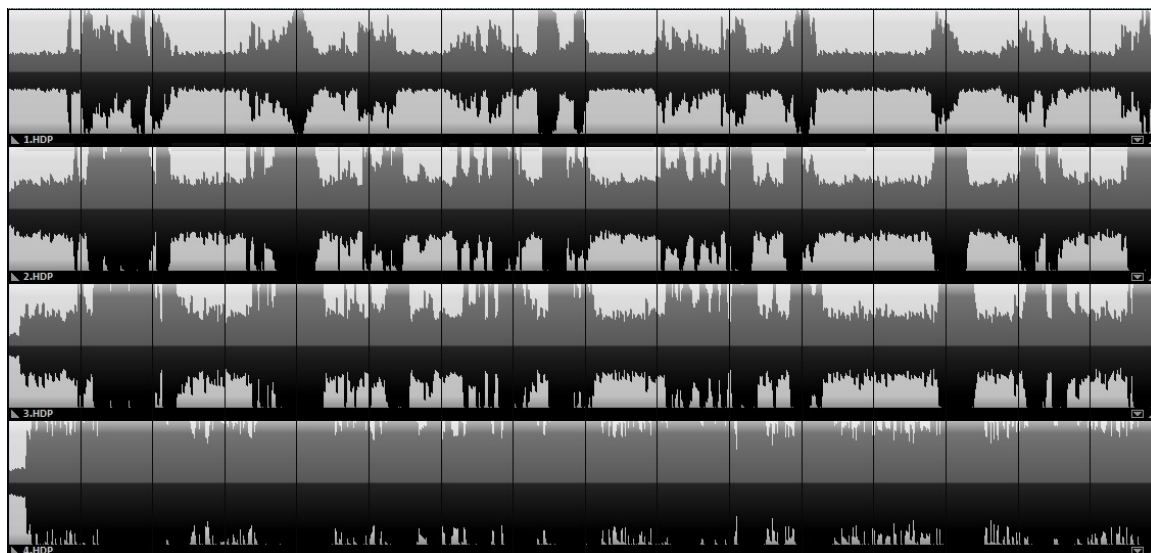
Signál podľa komunikačných systémov a elektrického inžinierstva je funkcia, ktorá vyjadruje informáciu o správaní alebo povahe nejakého fyzikálneho fenoménu. Vo svete, opísanom zákonmi fyziky, rôzne množstvo vykazujúce zmenu v čase alebo v priestore (napríklad obraz) je potenciálny signál, ktorý by mohol poskytnúť informáciu o stave fyzikálneho systému, ako aj dopraviť informáciu medzi dvoma pozorovateľmi.

Medzi najznámejšie signály patrí reč, sonar, radar, hudba, video, dopravná signalizácia.

Vo všeobecnosti, každý záznam o zmene javu je signál. Ďalšie príklady signálov sú napríklad záznam o teplote, burzové indexy, alebo pH meter, ktorý vyjadruje informáciu o kyslosti daného roztoku. Zvyčajne sú signály zachytené pomocou senzoru a často je pôvodná forma signálu konvertovaná na inú formu energie pomocou prevodníka. Napríklad mikrofón konvertuje zvukový signál na elektrický, reproduktor opačne.

Informácia v signále je často sprevádzaná šumom (angl. „noise“). Termín šum zvyčajne znamená nežiadúce náhodné rušenie, ale často sa jeho definícia rozširuje aj o nechcené signály prekrývajúce sa so chceným signálom. Na Obrázku 1 je znázornené postupné znižovanie kvality zvukovej stopy hlasu autora tejto práce, ktorá bola opakovaně nahrávaná pomocou nekvalitného nahrávacieho zariadenia. V prvej časti Obrázka 1 je znázornený signál nahrávky zachytenej pomocou interného mikrofónu počítača. Nasledne bola táto nahrávka reprodukována reproduktorom a súčasne znovu nahrávaná. Nový signál je znázornený v druhej časti Obrázka 1. Tento spôsob reprodukcie a nahrávania zvuku je v praxi nedostatočný, ale pre ukážku nárastu šumu poslúži dokonale. Takýmto spôsobom sa vytvorí z druhej nahrávky tretia a následne z tretej

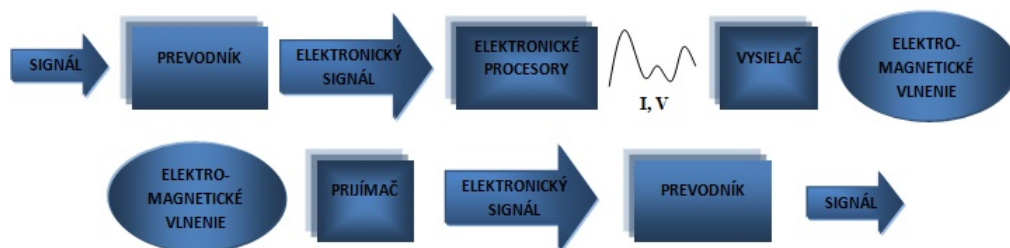
štvrtá. Obrázok 1 teda pozostáva zo štyroch signálov jednej nahrávky, ktorá bolo viackrát nahrávaná. Ani pre „laické oko“ nie je problém vidieť ako postupne narastá „miera zašumenia“ a ako sa postupne stráca informácia sprostredkovaná signálom. Nástroj, ktorý sa používa na odstránenie nežiadúcich zložiek signálu, sa nazýva **filter**.



Obr. 1: Nárast šumu pri opakovanom nahrávaní zvukovej stopy.

1.2 Spracovanie signálu

Spracovanie signálu (angl. „signal processing“) je časť systémového inžinierstva, elektronického inžinierstva a aplikovanej matematiky, ktorá sa zaoberá analyzovaním alebo operáciami na analógovom ako aj digitálnom signáli, ktorý reprezentuje časovo-menné alebo priestorovo-menné fyzikálne veličiny. Bežným príkladom je prenos signálu medzi vzdialenými pozíciami. Stelesnenie signálu v elektronickej forme je vytvorené prevodníkom, ktorý konvertuje signál z jeho pôvodnej formy na tvar vlnenia vyjadreného ako prúd (I), napätie (V) alebo ako elektromagnetické vlnenie. Medzi najznámejšie príklady patrí optický signál, alebo rádiový prenos. Už vyjadrený ako elektrický signál, je signál prístupný na ďalšie spracovanie elektronickými zariadeniami, ako sú elektronické zosilňovače a elektronické filtre, a môže byť prenesený na vzdialené miesto elektronickými vysielačmi a prijatý pomocou elektronických prijímačov. Schéma tohto prenosu je znázornená na Obrázku 2.



Obr. 2: Prenos signálu na diaľku. Zdroj: [1].

1.3 Spojité a diskrétné signály

Podľa [8] **spojitý** reálny (alebo komplexný) **signál** (angl. „continuous-time signal“) je každý signál, ktorý nadobúda hodnotu v každom bode definičného oboru, ktorým je najčastejšie nekonečný interval.

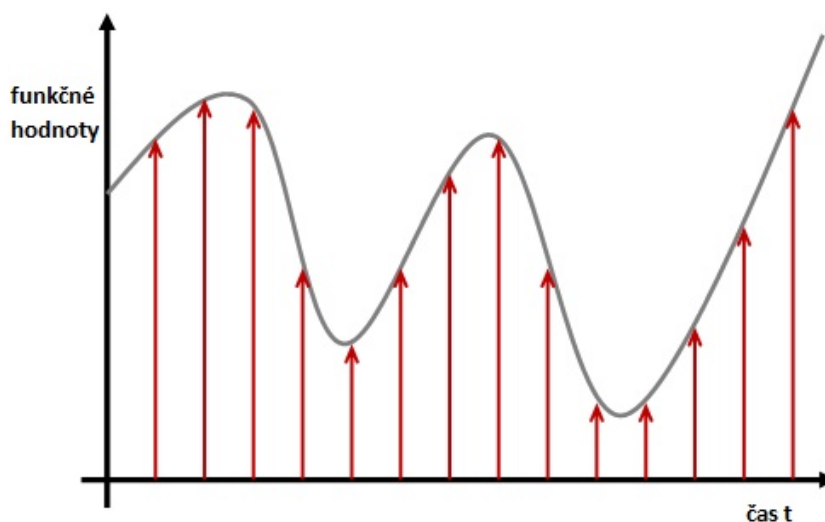
Ak sú pre signál definované veličiny v konečnom počte bodov, takýto signál nazývame **diskrétny signál** (angl. „discrete-time signal“). Najčastejšie spôsoby, akými sa tvoria diskrétné signály, sú vzorkovanie spojitého signálu a aproximácie signálu postupnosťou jeho hodnôt v konkrétnych časových okamihoch.

Na diskrétny reálny (alebo komplexný) signál sa môžeme pozeráť ako na funkciu množiny (podmnožiny) celých čísiel (index označujúci časovú os) zobrazujúcu sa na množinu reálnych (alebo komplexných) čísiel (hodnoty funkcie v daných okamihoch). Na Obrázku 3 je zobrazený spojité signály sivou čiarou a pomocou červených šípok je znázornená metóda vzorkovania. Rozdiel medzi dvoma šípkami určuje vzorkovací interval. Diskrétny signál sa následne vytvorí z postupnosti hodnôt analógového signálu v jednotlivých bodoch.

1.4 Analógové signály

Analógový signál (angl. „analog signal“) podľa [8] je každý spojité signál, ktorého zložka meniac sa v čase (premenná) je reprezentovaná veličinou meniacou sa v čase. Napríklad v analógovom signáli zvuku okamžité napätie spojitou závisí od tlaku zvukových vln. Odlišuje sa od digitálneho signálu, v ktorom je spojitá veličina reprezentovaná diskretnou funkciou, ktorá dokáže nadobúdať iba konečný počet hodnôt.

Analógový signál využíva vlastnosti prostredia na sprostredkovanie informácie. Napríklad aneroidový barometer funguje na princípe plastickej deformácie príjmovej časti



Obr. 3: Vytvorenie diskretného signálu zo spojitého vzorkovaním.

vplyvom zmien tlaku vzduchu. V elektronickom signáli sa využívajú variácie napätia, prúdu a frekvencie na vyjadrenie informácie.

Každá informácia môže byť vyjadrená analógovým signálom. Často je takýto signál meranou odozvou na zmenu fyzikálneho fenoménu, ako napríklad zvuku, svetla, teploty, pozície alebo tlaku. Fyzikálna veličina je konvertovaná na analógový signál pomocou prevodníka. Napríklad pri nahrávaní hudby, kolísanie tlaku vo vzduchu (čo je vlastne zvuk) naráža na membránu mikrofónu, ktorý indukuje zodpovedajúci kolísajúci prúd vytvorený cievkou v elektromagnetickom mikrofóne, alebo zodpovedajúce kolísajúce napätie vytvorené kondenzátorovým mikrofónom.

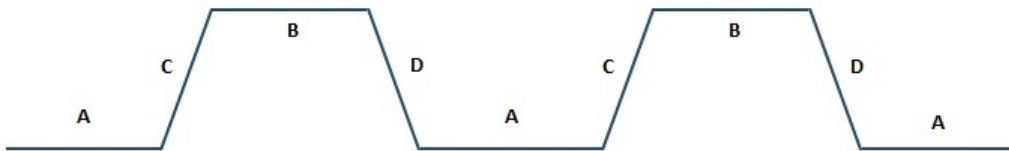
Analógový signál môže mať v teoretickej rovine nekonečné rozlíšenie. V praxi je však sprevádzaný elektronickým šumom a je skreslený komunikačnými kanálmi a spracovaním signálu, ktoré dokážu postupne znižovať pomer signálu ku šumu (angl. „signal-to-noise ratio“). Na rozdiel od nich digitálne signály majú konečné rozlíšenie. Konvertovanie analógového signálu na digitálnu formu je sprevádzané konštantným šumom na nízkej úrovni, nazývaným kvantizačný šum. Ale ďalej, už v digitálnej forme, signál môže byť spracovaný alebo vysielaný bez pridávania šumu alebo iného skreslenia. Preto akonáhle spracovanie analógových signálov sa stáva komplexnejším, strácajú svoje rozlíšenie do takej miery, že ich kvalita je prekonaná digitálnymi signálmi. Toto vysvetľuje rozšírené používanie digitálnych signálov v modernej technológii. V analógových systémoch je ťažké zistiť, kedy nastáva degradácia. Avšak pri digitálnych systémoch je

degradácia nielen detekovateľná, ale dá sa aj odstrániť.

1.5 Digitálne signály

Digitálny signál môže byť každý signál so spojitým priebehom používaný v digitálnej komunikácii, reprezentujúci prúd bitov alebo inú postupnosť diskretných hodnôt. V tejto podkapitole čerpáme z [5].

V počítačovej architektúre a v ďalších digitálnych systémoch je priebeh, ktorý prepína medzi dvoma stupňami napätia, reprezentujúce dva stavy tzv. „Boolean“ hodnôt (0 a 1) nazývaný digitálny signál, a to aj napriek tomu, že to je analógový priebeh napätia, ktorý je vyjadrený len dvoma úrovňami.



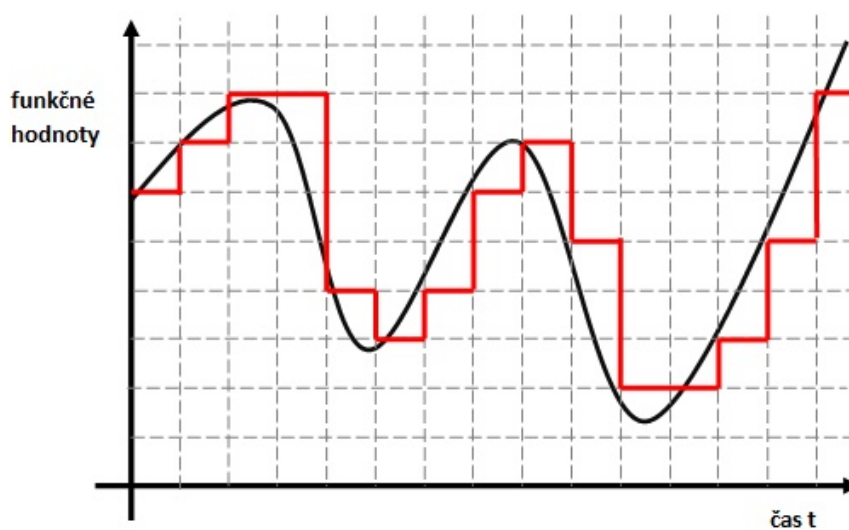
Obr. 4: Priebeh digitálneho signálu. A - nízka úroveň, B - vysoká úroveň, C - nábežná hrana, D - zostupná hrana. Zdroj: [3] .

Hodinový signál (angl. „clock signal“), alebo hodinový impulz je špeciálny digitálny signál, ktorý sa používa na synchronizovanie digitálnych obvodov. Obrázok 4 môže byť považovaný za hodinový signál. Logické zmeny sú spustené buď nábežnou hranou, alebo zostupnou hranou:

- nábežná hrana: prechod z nízkej úrovne (A) napätia na vysokú (B);
- zostupná hrana: prechod z vysokej úrovne (B) napätia na nízku (A).

Hoci vo veľmi zjednodušenom a idealizovanom modeli digitálneho obvodu si prajeme, aby tieto prechody nastávali okamžite, v reálnom svete neexistuje obvod s nulovým odporom, a preto žiadny obvod nedokáže zmeniť úroveň napätia okamžite. To znamená, že za veľmi krátky čas prechodu výstup nemusí zodpovedať vstupu a naozaj nemusí zodpovedať ani vysokej, ani nízkej úrovni napätia.

Obrázok 5 znázorňuje vytváranie digitálneho signálu z analógového. Keďže je podľa definície digitálny signál vyjadrený pomocou diskretných hodnôt (napríklad prirodzených čísiel), hodnoty analógového signálu aproximujeme na žiadané diskkrétne hodnoty. Mriežka na Obrázku 5 reprezentuje diskkrétne hodnoty, ktoré môže digitálny signál nadobudnúť. V momente, keď krivka analógového signálu pretne zvislú prerušovanú čiaru mriežky, hodnota signálu sa zaokrúhli na najbližšiu diskkrétne hodnotu. Táto sa stane hodnotou digitálneho signálu až po ďalší moment stretu krivky analógového signálu so zvislou časťou mriežky, kedy sa proces zopakuje.



Obr. 5: Aproximovanie digitálneho signálu z analógového.

1.6 Filtre

Hudobníci využívajú filtre tisícky rokov na to, aby tvarovali plody ich umenia rôznymi spôsobmi. Príkladom môže byť evolúcia fyzikálnych veličín huslí predstavuje evolúciu v dizajne filtrov. Výber dreva, tvar výrezov, geometria mostíka a všetko čo ovplyvňuje rezonanciu, toto všetko má účasť na tom, ako husle filtrujú signál indukovaný na mostíku vibrujúcimi strunami. Akonáhle sa zvuk šíri vzduchom, ďalšie filtrovanie je spôsobené prostredím, ušnicou poslúchača a pre každého jednotlivca je aj subjektívny proces spracovania zvuku. V častiach 1.6 až 1.8 sme čerpali z [9].

Každý objekt v blízkosti zvukovej vlny môže byť považovaný za filter. Avšak, zvyčajne nepovažujeme za filter objekt, ktorý nedokáže nejakým citelným spôsobom ovplyvniť zvuk. Napríklad kábel reproduktora sa nepovažuje za filter, za to reproduktor sa

motný áno. Samohlásky v reči sú tvorené prevažne zmenou tvaru ústnej dutiny, ktorá mení rezonancie a tým pádom filtruje vlastnosti hlasu. Ovládanie hlasitosti zvuku v klasickom autorádiu, basy, ovládanie vokálov, grafické ekvalizéry, ozvenové zariadenia, fázový posun, to všetko sú príklady užitočných filtrov. Ďalej sú tu príklady nežiadúceho filtrovania, akým je napríklad nerovnomerné šírenie niektorých frekvencií v miestnosti so „zlou akustikou“. Jeden známy génius v poli filtrov raz povedal: „Keď sa nad tým tak zamyslíte, v podstate všetko je filter.“

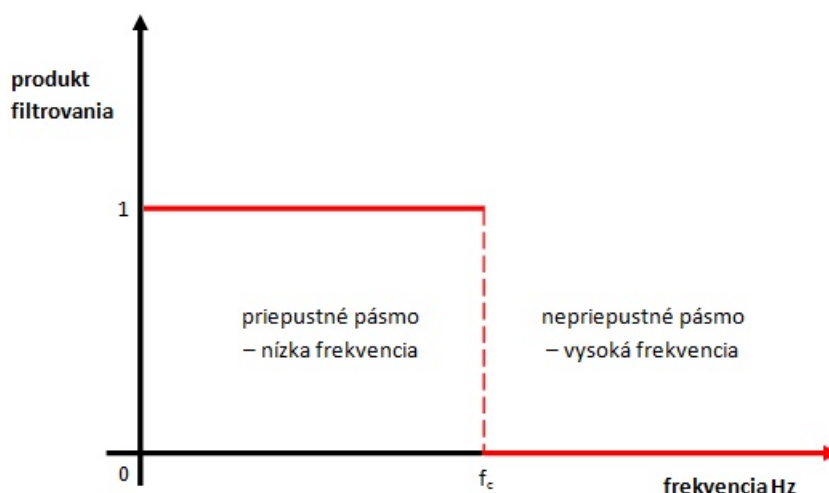
Digitálny filter (angl. „digital filter“) slúži na filtrovanie digitálnych signálov. Je to výpočet, ktorý vezme postupnosť čísiel (vstup) a z nej vytvorí novú (výstup). Všetky hore uvedené filtre nie sú digitálne lebo operujú na analógových signáloch. Je dôležité si uvedomiť, že digitálny filter nedokáže filtrovať rovnako ako dokážu filtrovať filtre „reálneho sveta“. Digitálny filter je len vzorec, ktorý pracuje s digitálnymi signálmi. Na digitálny filter sa dá pozeráť ako na „čiernú skrinku“, do ktorej vchádza na jednej strane vstupný signál a na druhej strane sa objaví nový výstupný signál pozmenený vlastnosťami tejto skrinky. Tento princíp je schématicky zobrazený Obrázku 6.



Obr. 6: Diagram znázorňujúci ľubovoľný filter.

1.7 Najjednoduchší filter dolnej priepuste

Táto sekcia poskytuje najjednoduchší príklad k pochopeniu toho, aký efekt má digitálny filter na digitálny signál. Obrázok 7 opisuje najjednoduchší filter dolnej priepuste (angl. „low-pass filter“), ktorý nemá žiadny efekt na nízke frekvencie a neprepúšťa vysoké. Produktom ideálneho filtra dolnej priepuste je multiplikačná konštanta (napríklad „1“) pre frekvencie medzi 0 Hz a **hraničnou frekvenciou** f_c Hz a 0 pre všetky zvyšné frekvencie. Následný výstup sa získa vynásobením vstupu a k nemu danému produktu filtra. To znamená, že po prefiltrovaní sa signál s frekvenciou f z intervalu $[0, f_c]$ nezmení a signál, ktorý má frekvenciu ležiacu v intervale $[f_c, \frac{f_s}{2}]$ sa celý prenásobí nulou a tým prakticky zanikne.



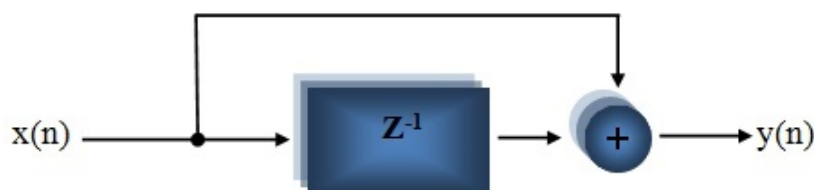
Obr. 7: Ideálny filter dolnej priepuste.

1.7.1 Definícia filtra

Najjednoduchší filter dolnej priepuste sa dá vyjadriť pomocou nasledujúcej diferenčnej rovnice:

$$y(n) = x(n) + x(n-1), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

kde $x(n)$ je vstupná hodnota signálu v čase alebo vo vzorke n a $y(n)$ je výstupná hodnota v čase n . Vývojový diagram tohto filtra je znázornený na Obrázku 8. Symbol „ z^{-1} “ znamená časový posun o jednu jednotku času n na intervale, to znamená, že $z^{-1}x(n) = x(n-1)$. Symbol \oplus reprezentuje súčet vstupov.

Obr. 8: Systémový diagram pre filter $y(n) = x(n) + x(n-1)$.

Pri práci so vstupom digitálneho filtra podľa [9] je dôležité konvertovať dĺžku kroku intervalu na sekundy, ktoré sú dohodou považované za východiskovú pozíciu (pri viacerých rôznych filtroch by inak nastali problémy). Teda, ďalší spôsob, ako napísať rovnicu

najjednoduchšieho filtra s dolnou priepustou, je

$$y(nT) = x(nT) + x((n-1)T), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

kde T je vzorkovací interval (ak by bolo n pôvodného filtra nastavené na minúty, vzorkovací interval T by mal hodnotu 60). Podľa [9] pri spracovaní digitálneho signálu je bežné vynechať túto konštantu (dosadiť ju s hodnotou $T = 1$), ale vždy, pri pracovaní so signálmi je nutné upraviť n , aby sa čas medzi dvoma vzorkami rovnal jednej sekunde pomocou nT .

Dá sa predpokladať, keďže (1) je najjednoduchší filter dolnej priepuste, tak je aj istým spôsobom najhorší. Na otázky, akým spôsobom je nedostatočný a prečo práve filter (1) je filtrom dolnej priepuste, dáva odpoveď **frekvenčná odozva** filtra (angl. „frequency response“). Frekvenčná odozva pozostáva z dvoch častí:

- násobok G amplitúdy vstupu (podiel amplitúd výstupu A_2 a vstupu A_1);
- fázový posun θ (rozdiel fázy výstupu ϕ_2 a vstupu ϕ_1).

Frekvenčna odozva pozostáva z dvoch významných vlastností filtrov, ktoré sú fundamentálne pri analýze filtrov. Existuje niekoľko metód na exaktné zistenie frekvenčnej odozvy.

1.8 Hľadanie frekvenčnej odozvy

O filtri vyjadrenom pomocou (1) sa dá uvažovať ako o „čiernej skrinke“, ktorá je znázornená na Obrázku 6. Pre poznanie efektu tohto filtra na spektre $x(n)$, kde $x(n)$ reprezentuje celý vstupný signál, môžeme filter otestovať na každej frekvencii osobitne. Takýto postup sa nazýva **harmonická analýza** (angl. „sine-wave analysis“). Na Obrázku 9 je znázornený vstupno-výstupný pár pre filter (1) s frekvenciou $f = \frac{f_s}{4}$ Hz, kde f_s je rozsah frekvenčnej vzorky. Daný príklad uvádzame podľa [9].

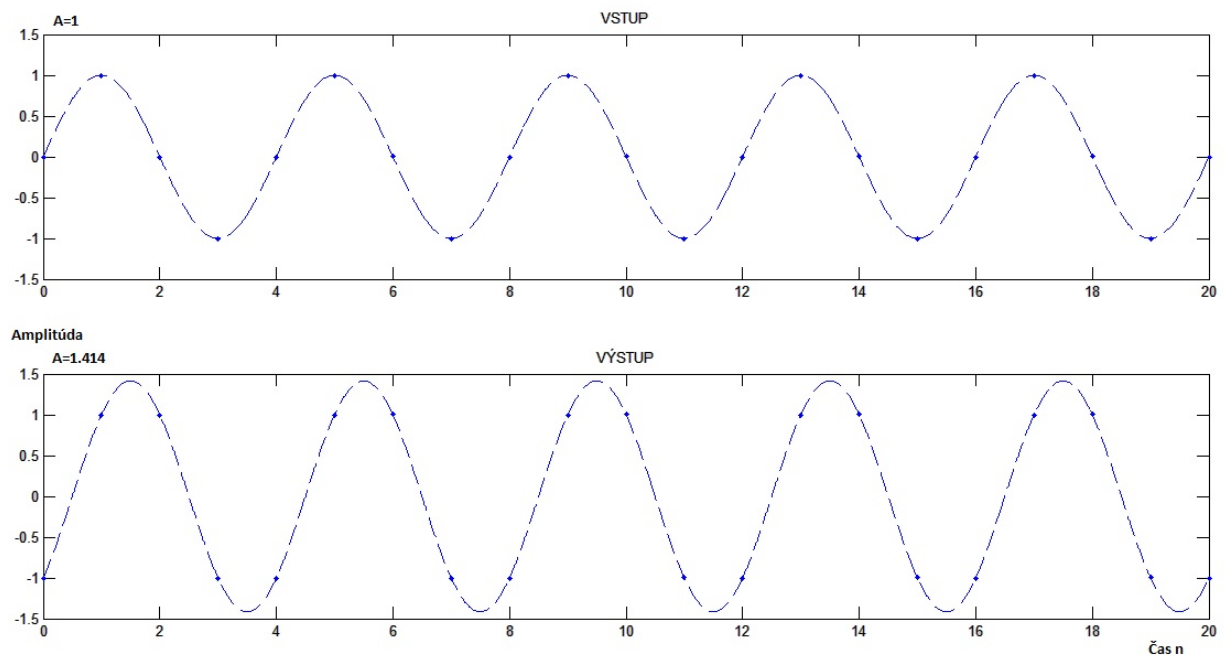
Obr. 9 pozostáva zo vstupu a výstupu filtra (1) pre špeciálny prípad vstupnej frekvencie:

- Vstupný signál $x(n) = A_1 \sin(\omega nT + \phi_1)$ s amplitúdou $A_1 = 1$, s frekvenciou $\omega = 2\pi f_s/4$ a s fázou $\phi_1 = 0$;

Z Obrázka 9 je zrejmé, že násobok amplitúdy G pre frekvenciu $f = \frac{f_s}{4}$ je $\sqrt{2}$. Podľa Obrázka 9 pre (1) fázový posun θ pri frekvencii $f = \frac{f_s}{4}$ sa rovná $-\frac{\pi}{4}$ (vstup má fázou $\phi = 0$, to znamená že sínusoida vstupu začína v bode $[0,0]$). Výstup je posunutý na osi frekvencie práve o $-\frac{\pi}{4}$, a preto môžeme písať:

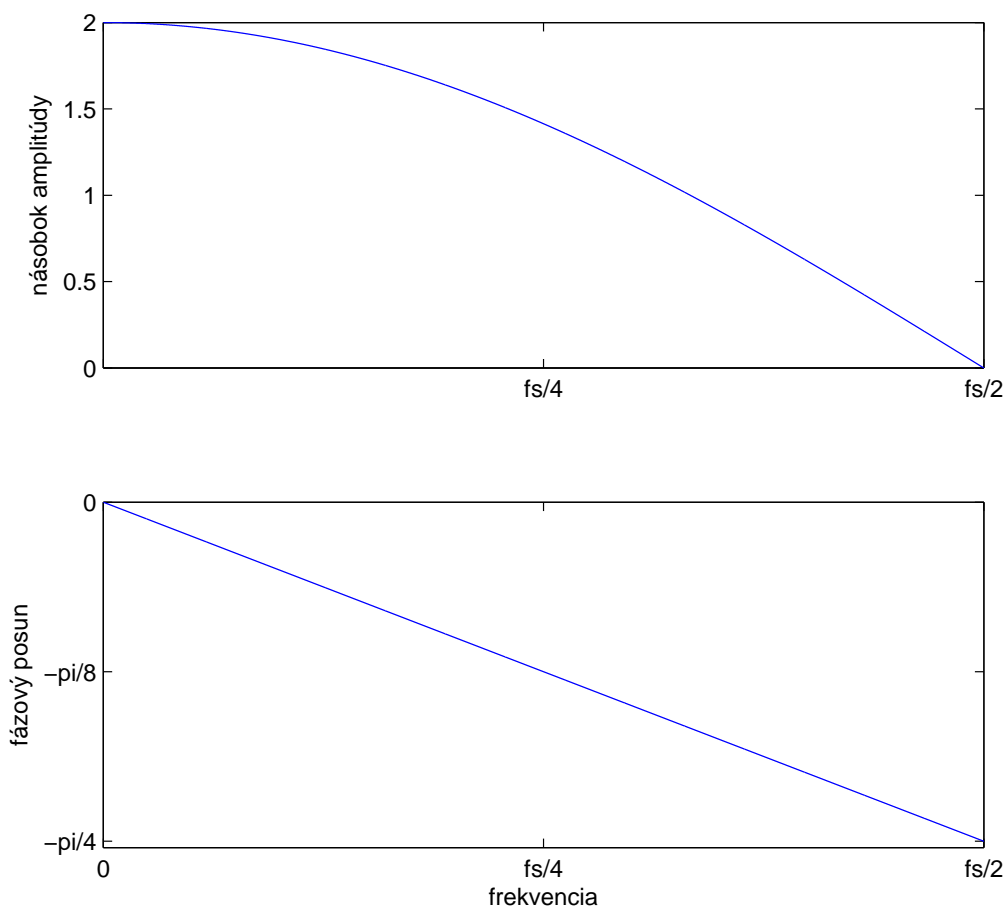
- Výstupný signál $y(n) = A_2 \sin(\omega nT + \phi_2)$ s amplitúdou $A_2 = \sqrt{2}$, s frekvenciou $\omega = 2\pi f_s/4$ a s fázou $\phi_2 = -\pi/4$.

Takýmto spôsobom sa dá pokračovať s každou frekvenciou f z intervalu 0 až $\frac{f_s}{2}$, podobne vyšetriť vstupné a výstupné vlny a urobiť pre ne graf ako na Obrázku 9. Výsledné grafy znázornené na Obrázku 10 znázorňujú frekvenčnú odozvu filtra (1). Z násobku amplitúdy G je zrejmé, že filter (1) má vlastnosti filtra dolnej priepuste, pretože ako frekvencia narastá (z 0 na $\frac{f_s}{2}$) násobok amplitúdy klesá (z 2 na 0).



Obr. 9: Vstupné a výstupné signály pre filter $y(n) = x(n) + x(n-1)$. Vstupný signál $x(n) = \sin(2\pi f_s nT/4)$. Výstupný signál $y(n) = \sqrt{2} \sin(2\pi f_s nT/4 - \pi/4)$.

Harmonická analýza sa používa iba pre filtre, ktoré sú lineárne a časovo-nemenné. Lineárny filter je daný lineárnou rovnicou a spôsob akým filtruje časovo-nemenný filter sa nemení v čase. Takéto filtre vytvárajú zo sínusoidy sínusoidu s rovnakou frekvenciou. Vyššie spomenutá metóda hľadania frekvenčnej odozvy zahŕňa fyzické meranie amplitúdy a fázového posunu vstupných sínusoid pre každú frekvenciu. Táto metóda



Obr. 10: Frekvenčná odozva pre filter $y(n) = x(n) + x(n - 1)$: a) násobok amplitúdy G ; b) fázová odozva θ .

je praktická pri reálnych filtroch, ale len ťažko sa dá využiť pri dizajne nových filtrov. Existuje niekoľko spôsobov ako vytvoriť vzorec pre filter (1) na výpočet frekvenčnej odozvy. Prvý spôsob je analogický ku harmonickej analýze. Na niekoľkých príkladoch vypočítame fázovú odozvu a amplitúdu sínusoid rozličných frekvencií po spracovaní filtrom (1).

Jednosmerný prúd (angl. „direct current“) má frekvenciu 0 Hz. Preto sa dá jeho sínusoida napísať ako $x(n) = A \cos(2\pi f n T + \phi)$, kde $f = 0$. To znamená, že $x(n) = A \cos(\phi)$. Vstupný signál je konštantný na celom sprektre. Je zrejmé, že výstupný signál sa rovná $y(n) = x(n) + x(n - 1) = A \cos(\phi) + A \cos(\phi) = 2A \cos(\phi)$ pre všetky n . A teda násobok amplitúdy pre frekvenciu $f = 0$ je 2 (podiel výstupu a vstupu $\frac{2A \cos(\phi)}{A \cos(\phi)} = 2$). Fáza signálu s frekvenciou 0 Hz je rovnaká pri vstupe aj výstupe. Fázový posun pre

jednosmerný prúd je teda nulový.

Ďalšiou z frekvencií, pre ktorú nie je obtiažné vyrátať frekvenčnú odozvu, je polovica frekvenčnej škály $f = \frac{f_s}{2} = \frac{1}{2T}$. Pre túto frekvenciu môže byť vstup $x(n)$ charakterizovaný nasledovne:

$$\begin{aligned}
 x(n) &= A \cos\left(2\pi \frac{f_s}{2} nT + \phi\right) \\
 &= A \cos\left(2\pi \frac{1}{2T} nT + \phi\right) \\
 &= A \cos(\pi n + \phi) \\
 &= A \cos(\pi n) \cos(\phi) - A \sin(\pi n) \sin(\phi) \\
 &= A \cos(\pi n) \cos(\phi) \\
 &= A(-1)^n \cos(\phi), \quad n = 0, 1, 2, \dots \\
 &= \{A \cos(\phi), -A \cos(\phi), A \cos(\phi), -A \cos(\phi), \dots\}.
 \end{aligned}$$

Pre výstup $y(n)$ následne platí:

$$\begin{aligned}
 y(n) &= x(n) + x(n-1) \\
 &= A(-1)^n \cos(\phi) + A(-1)^{(n-1)} \cos(\phi) \\
 &= A(-1)^n \cos(\phi) - A(-1)^n \cos(\phi) \\
 &= 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Filter (1) má teda násobok amplitúdy G rovný 0 pre $f = \frac{f_s}{2}$. Určenie fázového posunu θ pre vstup $x(n)$ s frekvenciou $f = \frac{f_s}{2}$ nie je jednoduché určiť.

Doteraz sme frekvenčnú odozvu určovali pre konkrétny vstup $\{x(n), n = 0, 1, 2, \dots\}$ so špeciálnymi frekvenciami $f = 0, \frac{f_s}{4}, \frac{f_s}{2}$. Na zistenie povahy frekvenčnej odozvy pre ľubovoľnú frekvenciu f vypočítame podľa [9] násobok amplitúdy a fázový posun všeobecne pre vstup:

$$x(n) = A \cos(2\pi f nT + \phi). \quad (3)$$

Výstup $y(n)$ dostáva tvar:

$$y(n) = A \cos(2\pi f nT + \phi) + A \cos(2\pi f(n-1)T + \phi). \quad (4)$$

Na zistenie frekvenčnej odozvy sa dá všeobecná rovnica (3) zjednodušiť dosadením za fázu $\phi = 0$ a násobok amplitúdy $A = 1$. Využiť sa to dá kvôli tomu, že (1) je lineárny

časovo invariantný filter. Tieto vlastnosti zaručujú, že frekvenčná odozva filtra bude rovnaká pre ľubovoľné A a ϕ . Následne vstup $x(n) = A \cos(2\pi f n T + \phi)$, dostáva tvar:

$$\begin{aligned} x(n) &= \cos(2\pi f n T) \\ &= \cos(\omega n T), \end{aligned}$$

kde $\omega = 2\pi f$. Rovnica výstupu $y(n)$ dostáva tvar:

$$\begin{aligned} y(n) &= \cos(\omega n T) + \cos(\omega(n-1)T) \\ &= \cos(\omega n T) + \cos(\omega n T) \cos(-\omega T) - \sin(\omega n T) \sin(-\omega T) \\ &= \cos(\omega n T) + \cos(\omega n T) \cos(\omega T) + \sin(\omega n T) \sin(\omega T) \\ &= (1 + \cos(\omega T)) \cos(\omega n T) + \sin(\omega n T) \sin(\omega T) \\ &= a(\omega) \cos(\omega n T) + b(\omega) \sin(\omega n T), \end{aligned}$$

kde $a(\omega) = (1 + \cos(\omega T))$ a $b(\omega) = \sin(\omega T)$. Vhodný tvar výstupu, z ktorého ľahko uvidíme násobok amplitúdy a fázový posun je:

$$y(n) = G(\omega) \cos(\omega n T + \theta(\omega)),$$

kde $G(\omega)$ je násobok amplitúdy závislý od frekvencie a $\theta(\omega)$ je fázový posun filtra závislý od frekvencie. Tento výraz sa dá rozšíriť na:

$$y(n) = G(\omega) \cos(\omega n T) - G(\omega) \sin(\theta(\omega)) \sin(\omega n T),$$

to znamená:

$$\begin{aligned} a(\omega) &= G(\omega) \cos(\theta(\omega)), \\ b(\omega) &= -G(\omega) \sin(\theta(\omega)). \end{aligned}$$

Odvodenie násobku amplitúdy $G(\omega)$ má tvar:

$$\begin{aligned} a^2(\omega) + b^2(\omega) &= G^2(\omega) \cos^2(\theta(\omega)) + G^2(\omega) \sin^2(\theta(\omega)) \\ &= G^2(\omega) (\cos^2(\theta(\omega)) + \sin^2(\theta(\omega))) \\ &= G^2(\omega). \end{aligned}$$

Následne sa $G(\omega)$ dá zjednodušiť na:

$$\begin{aligned} G^2(\omega) &= a^2(\omega) + b^2(\omega) = (1 + \cos(\omega T))^2 + \sin^2(\omega T) \\ &= 1 + 2 \cos(\omega T) + \cos^2(\omega T) + \sin^2(\omega T) \\ &= 2 + 2 \cos(\omega T) = 4 \cos^2\left(\frac{\omega T}{2}\right) \\ &= 2 \left| \cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) \right| = 2 \cos(\pi f T), \quad |f| \leq \frac{f_s}{2}. \end{aligned}$$

Fázový posun $\theta(\omega)$ sa dá vyjadriť z pôvodnej rovnice ako tangens:

$$\begin{aligned} \tan(\theta(\omega)) &= -\frac{b(\omega)}{a(\omega)} \\ &= -\frac{\sin(\omega T)}{1 + \cos(\omega T)} = -\frac{2 \sin(\omega T/2) \cos(\omega T/2)}{1 + \cos^2(\omega T/2) - \sin^2(\omega T/2)} \\ &= -\frac{2 \sin(\omega T/2) \cos(\omega T/2)}{2 \cos^2(\omega T/2)} \\ &= -\frac{\sin(\omega T/2)}{\cos(\omega T/2)} = -\tan(\omega T/2) = \tan(\omega T/2). \end{aligned}$$

To znamená, že fázový posun sa rovná:

$$\theta(\omega) = -\omega T/2 = -\pi f T.$$

Filter (1) so vstupom v sínusovom tvare

$$x(n) = A \cos(2\pi f n T + \phi)$$

produkuje výstup

$$y(n) = 2A \cos(\pi f T) \cos(2\pi f n T + \phi - \pi f T).$$

To znamená, že násobok amplitúdy pre tento filter je $G(\omega) = 2 \cos(\pi f T)$ a fázový posun je presne $\theta(\omega) = -\pi f T$ radiánov. Úplna frekvenčná odozva pre filter (1) je znázornená na Obrázku 10.

1.8.1 Hľadanie frekvenčnej odozvy pomocou komplexných čísiel

Našťastie existujú aj jednoduchšie metódy hľadania multiplikátora a fázovej odozvy filtra, teda prvkov potrebných na zistenie celej frekvenčnej odozvy. Pre pochopenie jednej z týchto metód je treba porozumieť komplexným číslam a operáciami s nimi. Základným vzťahom komplexných čísiel je „Eulerova identita“ (angl. „Euler’s identity“):

$$e^{i\omega nT} = \cos(\omega nT) + i \sin(\omega nT), \quad i = \sqrt{-1}. \quad (5)$$

S poznatkami o komplexných číslach sa dá nová metóda aplikovať na najjednoduchší filter dolnej priepuste (1). Na získanie frekvenčnej odozvy sa filter otestuje pre vstup $x(n) = Ae^{i(2\pi fnT + \phi)}$ s frekvenciou f . Znova kvôli časovej nemennosti a linearite filtra frekvenčná odozva nebude závislá od ϕ a od A , preto je možné dosadiť za $\phi = 0$ a za $A = 1$. Odozva filtra (1) so vstupom s frekvenciou $\omega/2\pi$ Hz, kde $\omega = 2\pi f$ je daná ako:

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) + x(n-1) \\ &= e^{i\omega nT} + e^{i\omega(n-1)T} \\ &= e^{i\omega nT} + e^{i\omega nT} e^{-i\omega T} \\ &= (1 + e^{-i\omega T}) e^{i\omega nT} \\ &= (1 + e^{-i\omega T}) x(n) \\ &= H(e^{i\omega T}) x(n). \end{aligned} \quad (6)$$

Toto odvodenie je očividne jednoduchšie ako trigonometrický prístup, z ktorého je niekedy len veľmi ťažké odvodiť výsledok. Čo je ale trochu mäťúce je výstup, ktorý pripomína komplexný násobok vstupu závislý od frekvencie. Frekvenčná odozva sa však dá jednoducho odvodiť z výrazu $H(e^{i\omega T})$ v polárnych súradniciach: $H(e^{i\omega T}) = G(\omega)e^{i\theta(\omega)}$. Násobok amplitúdy je vyjadrený absolútnou hodnotou výrazu H a fázová odozva filtra je komplexným vyjadrením uhlu H (v polárnych súradniciach). A teda rovnica pre zistenie násobka amplitúdy $G(\omega)$ je:

$$G(\omega) = |H(e^{i\omega T})|,$$

a pre fázový posun je

$$\theta(\omega) = \angle H(e^{i\omega T}),$$

kde symbol \angle znamená uhol v polárnych súradniciach. Konkrétny výpočet pre vstup $x(n)$ má tvar:

$$\begin{aligned} H(e^{i\omega T}) &= (1 + e^{-i\omega T}) \\ &= (e^{i\omega T/2} + e^{-i\omega T/2}) e^{-i\omega T/2} \\ &= 2 \cos(\omega T/2) e^{-i\omega T/2}. \end{aligned}$$

Potom sa už ľahko dá vyjadriť násobok amplitúdy $G(\omega)$ a fázový posun $\theta(\omega)$ ako:

$$\begin{aligned} G(\omega) &= |2 \cos(\omega T/2) e^{-i\omega T/2}| \\ &= 2 |\cos(\omega T/2)| \\ &= 2 \cos(\omega T/2), \quad |f| \leq \frac{f_s}{2}, \\ \theta(\omega) &= -\omega T/2, \quad |f| \leq \frac{f_s}{2}. \end{aligned}$$

Tieto výsledky sa zhodujú s výsledkami, ktoré vyšli pri metóde s použitím trigonometrických vzťahov (3). Násobok amplitúdy filtra (1) sa mení podľa funkcie kosínusu, ktorý klesá z 1 na 0, keď frekvencia rastie z 0 na polovicu frekvenčného rozhrania. Inými slovami amplitúda signálu sa periodicky vyvíja z 1 na 0, keď ωT sa mení z 0 na π . Je veľmi logické nazývať tento filter filtrom dolnej priepuste, ale z daných výsledkom sa len ťažko dá určiť hraničná frekvencia f_c . Redukcia amplitúdy je len veľmi pomalá s narastajúcou frekvenciou. Príčina tejto nedokonalosti filtra (1) je jeho prílišná jednoduchosť. Fázový posun $\theta(\omega) = -\omega T/2$ je lineárny vzhľadom na frekvenciu f , a preto fázová zmena výstupu filtra (1) sa konštantne mení s narastajúcou frekvenciou.

2 Vlastnosti digitálnych filtrov

V tejto Kapitole sú podrobnejšie analyzované implikácie linearity a časovej nemennosti. Ďalej sú uvedené štyri základne reprezentácie digitálnych filtrov: koeficienty diferenčnej rovnice, impulzná odozva, transformačná funkcia a frekvenčná odozva. Nakoniec sú analyzované vlastnosti nulových bodov a pólov filtra.

2.1 Linearita a časová nemennosť

Takmer všetky filtre, ktoré sa využívajú v praxi sú **lineárne**. Linearita je extrémne dôležitá z viacerých príčin. Z hľadiska teórie systémov je len málo vytvorených užitočných analýz pre nelineárne filtre. Z hľadiska spracovania zvuku je linearita dôležitá, pretože znamená nepridávanie žiadnych nových spektrálnych komponentov, teda častí signálu s úplne inou frekvenciou ako je tá vstupná. Výnimka pri lineárnom filtri by nastala jedine v prípade lineárneho filtra, ktorého filtrovanie sa však extrémne mení v čase, čo by mohlo vytvoriť zmeny v spektre. Týmto prípadom sa v tejto práci nezaobráame. Nelineárne filtre môžu produkovať nové komponenty signálu pri ľubovoľnom vstupe s ľubovoľnou frekvenciou. Nové komponenty znamenajú nežiadúce skreslenie signálu. Skutočne lineárny filter nespôsobuje žiadne nežiadúce skreslenie. V Kapitole 2 sme čerpali hlavne z [9]. Fakt, že filter je lineárny v bežných podmienkach znamená, že:

- amplitúda výstupu sa rovná G -násobku amplitúdy vstupu, kde G je násobok amplitúdy filtra (Vid' Kap. 1.7.1). Táto vlastnosť bude ďalej ako označená (V1).
- výstup filtrovania súčtu dvoch jednotlivých signálov je rovný súčtu výstupov filtrovania daných dvoch signálov filtrovaných samostatne. Táto vlastnosť bude ďalej označená ako (V2).

Vlastnosť (V2) je známa ako skladanie (angl. „superposition“). Znamená, že odozva lineárneho systému na sumu vstupných signálov sa rovná sume odozviev jednotlivých vstupných signálov. Individuálne signály, ktoré boli sčítané na vstupe, sú spracované nezávisle filtrom, to znamená, že sa jednotlivo vrstvia a neprekrývajú sa (sčítanie dvoch signálov, vzorka po vzorke, sa dá chápať ako konvertovanie stereo hudby na mono rov-

nomerným zmiešaním oboch kanálov dokopy). Podľa [4] príkladom prostredia, v ktorom sa šíria signály lineárne, je zemská atmosféra. Pri pôsobení dvoch zvukových vln súčasne vo vzduchu sa kolísanie tlaku, ktoré jednotlivé signály vyjadruje, jednoducho sčíta. Frekvencia sa pri sčítaní nijakým spôsobom nezmení. Keďže každý konečný spojité signál môže byť opísaný pomocou súčtu rôznych sínusoid, môžeme výstup filtra pre daný vstupný signál získať pomocou výstupov filtra použitého na jednotlivé zastupené vstupné sínusoidy.

Zatiaľ čo dôsledky linearity sú ďalekosiahle, matematická definícia je jednoduchá. Všeobecná rovnica pre lineárny časovo-menný filter je:

$$y(n) = T_n(x), \quad (7)$$

kde x je celý vstupný signál, $y(n)$ je výstupný signál a T_n reprezentuje filter vyjadrený pomocou funkcie pre každé n . Dolný index n pri T_n znamená výber n -tej výstupovej vzorky filtra. Vo všeobecnosti, každá vzorka výstupu môže byť funkciou niekoľkých, dokonca aj všetkých vstupných vzoriek. Kvôli tejto vlastnosti sa v (7) nepíše $x(n)$, ale x , aby bolo jasné, že výstup sa nevytvára spravidla len z jednej vzorky vstupu $x(n)$. Pre filter (1) máme $y(n) = T_n(x) = T_n(x(n), x(n-1)) = x(n) + x(n-1)$. V prípade časovej nemennosti funkcia T_n môže byť iná pre každé n . Teraz, pre ľubovoľné signály x_1 a x_2 a pre ľubovoľné reálne číslo α majú vlastnosti lineárneho časovomenného filtra nasledovný tvar:

$$T_n(\alpha x_1) = \alpha T_n(x_1) \quad (V1) \quad (8)$$

$$T_n(x_1 + x_2) = T_n(x_1) + T_n(x_2) \quad (V2),$$

pre všetky n .

V bežných podmienkach časovo nemenný filter filtruje rovnakým spôsobom nezávisle od meniaceho sa času. Symbolicky môžeme túto vlastnosť napísať ako $y(n) = T(x(n))$. Ak by sme mali dva vstupy, ktoré by sa neodlišovali nijakým iným spôsobom iba tým, že jeden by bol o N vzoriek posunutý od druhého ($x_1(n) = x_2(n-N)$ pre všetky n), potom by platilo aj pre výstupy časovo nemenného filtre, ktoré prislúchajú ku jednotlivým vstupom x_1 a x_2 , že sa odlišujú len tým, že sú navzájom posunuté ($y_1(n) = y_2(n-N)$ pre všetky n). Na lepšie pochopenie sa dá filter zobrazit ako veľký mozog, ktorý pri spracovaní vstupu vyšle ku každej jednej vzorke z x jedno nervové zakončenie. Pre

časovo menný filter mozog vysielá pre každú jednotku času nové nervové zakončenia pre všetky vzorky z x . Tieto jednotlivé sady nervových zakončení však nemusia byť rovnaké, a preto napr. vstupy, ktoré sú rovnaké v čase $n = 1$ a $n = 5$, môžu po prefiltrovaní dávať iné výstupy. Pre časovo nemenný výstup mozog pracuje s jednou sadou nervových zakončení, ktoré sa iba vždy keď čas n narastie o jednu jednotku posunú o jednu vzorku doprava (dopredu) a znova vyšlú informáciu rovnakým spôsobom ďalej.

Časovú nemennosť definujeme ako

$$T_n(x_{-N}) = T_{n-N}(x) = y(n - N), \quad (9)$$

kde x_{-N} je signál „oneskorený“ o N vzoriek.

Jednoduchý príklad nelineárneho filtrovania je kompresia (angl. „compression“). Kompresia funguje na princípe zvyšovania hlasitosti (násobku amplitúdy), keď je priemerná amplitúda nízka, a znižovania hlasitosti, keď je priemerná amplitúda vysoká, aby sa dosiahla hlasitosť na takmer konštantnej úrovni. Kompresia je nelineárna, pretože násobok amplitúdy G pri nej závisí od amplitúdy vstupného signálu. Deje sa to kvôli tomu, že filter musí odhadnúť výšku amplitúdy, aby ju mohol normalizovať. A teda kompresia má formu

$$y(n) = G(x)x(n),$$

kde $G(x)$ znamená násobok amplitúdy, ktorý je závislý od amplitúdy celého vstupného signálu. Vo všeobecnosti

$$G(x_1 + x_2)(x_1(n) + x_2(n)) \neq G(x_1)x_1(n) + G(x_2)x_2(n),$$

a tým pádom kompresia nespĺňa vlastnosť (V2) linearitu. Je zrejmé, že ani vlastnosť (V1) nie je splnená, pretože amplitúda výstupu nie je priamo úmerná amplitúde vstupu.

Vo všeobecnosti skoro každá operácia so signálom zahrňujúca násobenie dvoch komponentov, pri ktorom oba závisia od vstupného signálu, je nelineárna. Avšak násobok amplitúdy G sa môže meniť nezávislo od vstupu, aby mal filter vlastnosti lineárneho časovo menného filtra. V tomto prípade platí rovnica

$$G(n)(\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)) = \alpha(G(n)x_1(n)) + \beta(G(n)x_2(n)),$$

ktorá ukazuje, že platí (V1) aj (V2). Jednoduchý príklad lineárneho časovo menného filtra je tremolo filter, ktorý je vyjadrený pomocou násobku amplitúdy závislého od

času: $y(n) = G(n)x(n)$. Za násobok amplitúdy môže byť dosadený napríklad člen $G(n) = 1 + \cos(2\pi fnT)$, kde $f = 4$, ktorý vytvorí hlboké tremolo so štyrmi zvlneniami za sekundu. Ako plynie čas, násobok amplitúdy tohto tremola sa pohybuje v intervale $[0,2]$, a tým pádom sa výsledná amplitúda periodicky vyvíja od 0 (úplne stíšenie) po 2 (dvojnásobné zhlásenie).

Všetky ďalšie filtre, ktoré sú spomenuté v tejto práci, majú vlastnosti linearitu a časovej nemennosti. Ďalej budú označené ako „LTI filtre“ (angl. „linear time-invariant filters“).

2.2 Reprezentácia digitálneho filtra

Pre lineárne časovo nemenné (LTI) filtre, ako aj pre signály, existujú dve základné oblasti, ktorými sa dajú reprezentovať: v časovej oblasti (angl. „time domain“) a vo frekvenčnej oblasti (angl. „frequency domain“). Avšak pre každú z daných dvoch oblastí existujú aspoň dva spôsoby, akými sa dajú vyjadriť a pre všetky tieto reprezentácie platí, že je možné konvertovať ich výstupy z jednej reprezentácie na druhú. Dve reprezentácie v časovej oblasti, ktoré sú opísané v tejto práci, sú koeficienty diferenčnej rovnice a impulzná odozva. Dve reprezentácie vo frekvenčnej oblasti opísané v tejto práci sú transformačná rovnica a frekvenčná odozva.

2.2.1 Diferenčná rovnica

Diferenčná rovnica je reprezentovaná časovou oblasťou, pretože určuje predpis, ako vyrábať výstupnú vzorku z vstupných vzoriek (jedna výstupná vzorka pre jednu jednotku času). Všeobecný tvar diferenčnej rovnice má tvar podľa [9]:

$$\begin{aligned} y(n) = & a_0x(n) + a_1x(n-1) + \dots + a_Mx(n-M) \\ & - b_1y(n-1) - \dots - b_Ny(n-N), \end{aligned} \tag{10}$$

kde x je vstupný signál, y je výstupný signál a konštanty $\{a_i, i = 0, 1, 2, \dots, M\}$, $\{b_j, j = 0, 1, 2, \dots, N\}$ sa nazývajú koeficienty diferenčnej rovnice, alebo jednoduchšie koeficienty filtra. Pokiaľ sú všetky koeficienty a_i a b_j reálne čísla, tak potom aj filter je reálny. Všetky filtre, ktoré sa nachádzajú v tejto práci, sú reálne.

Napríklad, diferenčná rovnica

$$y(n) = 0.01x(n) + 0.002x(n-1) + 0.99y(n-1)$$

špecifikuje operáciu digitálneho filtrovania a koeficienty reprezentujúce filter nastavuje na $\{0.01, 0.002\}$ a $\{0.99\}$. V tomto príklade $N = M = 1$.

Rovnica (10) nie je úplne všeobecná, pretože reprezentuje iba „bežné“ (angl. „casual“) (LTI) filtre. „Bežným“ filtrom je označený filter, ktorého výstup nezávisí od žiadnych budúcich vstupných členov. Napríklad, filter $y(n) = x(n+1)$ nie je „bežný“ filter, pretože výstup závisí od budúceho člena vstupu. Obmedzenie „bežných“ filtrov je vcelku prirodzené, pokiaľ filter pracuje so vstupom v reálnom čase. Lenže mnoho digitálnych filtrov je realizovaných v prostredí počítačov, kde je čas reprezentovaný indexom radu, a preto nie je problém v tomto prostredí pracovať s filtermi, ktoré nemajú vlastnosť „bežných“ filtrov. Táto vlastnosť však nijakým spôsobom nemení analýzu filtra, ktorá je rovnaká ako pri „bežných“ filtroch, a preto sa týmto obmedzením v tejto práci nezaobráame.

Maximálny rozsah časového intervalu, použitého na výpočet vzoriek výstupného signálu, sa nazýva **rád filtra** (angl. „order of the filter“). V prípade filtra (10) je rád filtra určený pomocou väčšieho z čísiel N a M . Napríklad, rovnica $y(n) = x(n) - x(n-1) - 2y(n-1) + y(n-2)$ určuje filter druhého rádu.

Pokiaľ sú N a M obmedzené konečnosťou, čo je vlastne nutné pre použiteľnosť filtra v praxi, potom filter (10) reprezentuje „bežný“ LTI filter konečného rádu.

Filter (10) používa na vyjadrenie aktuálneho výstupu výstupy minulé (ako napríklad $y(n-1)$). Takýto spôsob vyjadrovania výstupu sa nazýva **spätná väzba** (angl. „feedback“). Každý filter, ktorý využíva aspoň jednu spätnú väzbu ($N > 0$), sa nazýva **rekurzívny** (angl. „recursive“).

Filter (10) môže byť vyjadrený odlišným, ale úplne ekvivaletným spôsobom ako

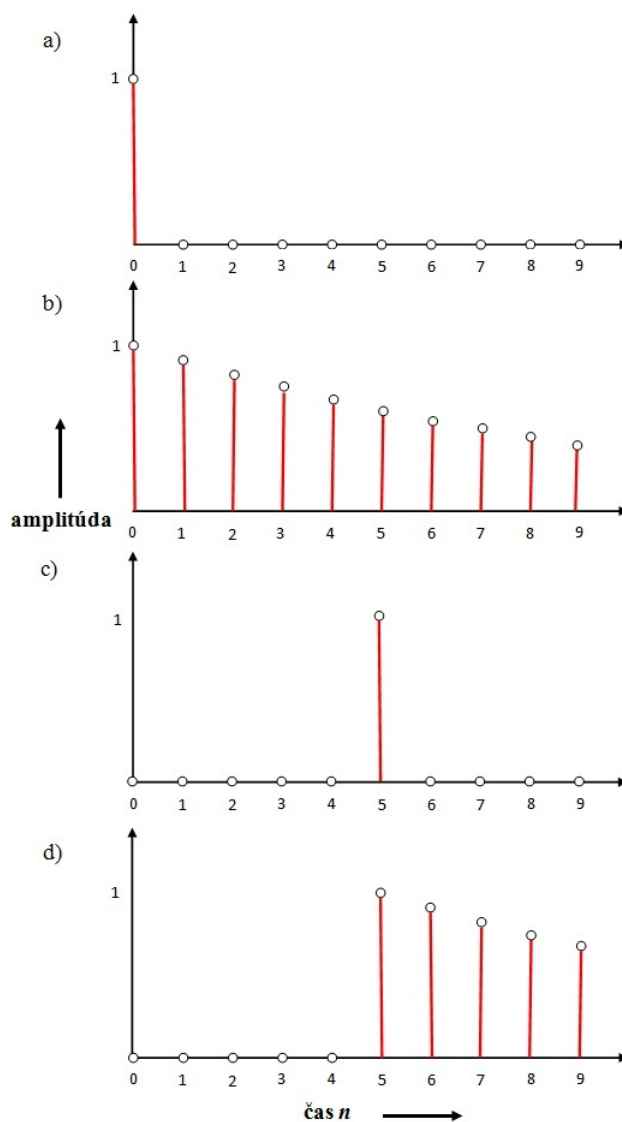
$$y(n) = \sum_{i=0}^M a_i x(n-i) - \sum_{j=0}^N b_j y(n-j). \quad (11)$$

2.2.2 Impulzná odozva a konvolúcia

Okrem diferenčnej rovnice sa dá každý LTI filter reprezentovaný v časovej oblasti vyjadriť pomocou odozvy na špecifický signál, nazývaný **impulz**. Impulz je označený $\delta(n)$

a definovaný je ako

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{ak } n = 0 \\ 0 & \text{ak } n \neq 0. \end{cases}$$



Obr. 11: Vstupné a výstupné signály pre filter $y(n) = x(n) + 0.9y(n-1)$; a) vstupný impulz $\delta(n)$; b) výstupná impulzná odozva $h(n)$; c) „oneskorený“ vstupný impulz $\delta(n-5)$; d) „oneskorená“ výstupná impulzná odozva $h(n-5)$.

Zobrazenie $\delta(n)$ je na Obrázku 11a. V reálnom živote sa dá impulzný signál približne opísať napríklad pomocou rýchleho úderu kladiva v čase 0 a následného okamžitého ticha.

Pre označenie odozvy filtra na impulzný signál sa používa

$$h(n) = T_n(\delta), \quad (12)$$

ktoré inými slovami označuje odozvu filtra na impulzný signál v čase $n = 0$. V tejto podkapitole pracujeme iba s filtermi, ktoré majú vlastnosť takú, že ako sa čas n blíži nekonečnu, impulzná odozva $h(n)$ sa blíži k nule. Filter s takouto vlastnosťou sa nazýva **stabilný**. Interpretácia tejto vlastnosti v reálnom živote je jednoduchá: pri prieniku padajúceho kameňa pokojnou hladinou jazera očakávame, že vytvorené vlny tohto prieniku sa budú časom zmenšovať až zaniknú. Ak by neplatila stabilita, vlny by časom nem nezaničili, alebo dokonca by mohli narastať.

Príklad impulznej odozvy pre rekurzívny filter prvého rádu

$$y(n) = x(n) + 0.9y(n-1) \quad (13)$$

je znázornený na Obrázku 11b. Impulzná odozva je jednoduchý geometrický pokles $\{1, 0.9, 0.81, 0.73, \dots\}$, alebo formálnejšie

$$h(n) = \begin{cases} 0.9^n & \text{pre } n = 0 \\ 0 & \text{pre } n \neq 0. \end{cases}$$

Dôvod, prečo sa žiadna informácia nestratí pri reprezentovaní konkrétneho LTI filtra pomocou impulznej odozvy, spočíva v tom, že impulzný signál obsahuje konštantnú energiu (energia $E = \int_{-\infty}^{\infty} x(n)^2 dn$) pri ľubovoľnej frekvencii.

S využitím základných vlastností linearitu a časovej nemennosti (viď (14)) sa dá odvodiť konvolučný vzorec, ktorý dáva algoritmus, s ktorým sa realizuje filter priamo v podmienkach impulznej odozvy. Inými slovami, pomocou konvolúcie a impulznej odozvy filtra sa dá vytvoriť zo vstupu výstup. Konvolučný vzorec má význam pri diferenciálnej rovnici, keď namiesto koeficientov diferenciálnej rovnice je filter reprezentovaný pomocou impulznej odozvy. Princíp konvolučného vzorca sa zakladá na tom, že každý signál $x(n)$ môžeme brať do úvahy ako zloženie impulzov s ľubovoľnou amplitúdou a fázou.

Na ilustrovanie, ako sú tieto základné mechanizmy vyjadrené matematicky, posluží jednoduchý príklad. Ak sa impulz objaví v čase $n = 5$, tak impulzný signál dostáva tvar $\delta(n-5)$. Zobrazenie tohto príkladu je na Obrázku 11c. Pre časovo nemenný filter

so vstupom $\delta(n-5)$ sa výstup „oneskorí“ o 5 jednotiek v čase a dostáva tvar $h(n-5)$. Obrázok 11d znázorňuje odozvu filtra (13) na „oneskorený“ vstup $\delta(n-5)$.

Ako značíme $\delta_{-N} = \delta(n-M)$ pre všetky n , tak vo všeobecnosti pre časovo nemenné filtre platí

$$T_n(\delta_{-N}) = T_{n-N}(\delta) = h(n-N),$$

kde N je vzorkový posun. Táto rovnica označuje princíp toho, že keď sa vstup „oneskorí“ o N vzoriek, tak výstup sa zmení iba tým, že sa taktiež „oneskorí“ o N vzoriek.

Ak sú dva impulzy spracované na vstupe filtra, jeden v čase $n=0$ a druhý v čase $n=5$, takýto vstup sa vyjadří ako $x(n) = \delta(n) + \delta(n-5)$. Ďalej, ak amplitúda prvého impulzu sa rovná 2 a amplitúda druhého impulzu sa rovná 1, potom takýto vstup sa zapíše ako $x(n) = 2\delta(n) + \delta(n-5)$. V tomto prípade, s využitím linearít ako aj časovej nemennosti, sa dá odozva LTI filtra na takýto vstup vyjadriť ako:

$$\begin{aligned} T_n(2\delta + \delta_{-5}) &= T_n(2\delta) + T_n(\delta_{-5}) \\ &= 2T_n(\delta) + T_{n-5}(\delta) \\ &= 2h(n) + h(n-5). \end{aligned}$$

Napríklad, pre filter (13) so vstupom $2\delta(n) + \delta(n-5)$ môže byť výstup vypočítaný pomocou škálovania, posunutia a sčítania dokopy pomocou kópií impulznej odozvy $h(n)$. Teda impulzná odozva vynásobená dvojkou a sčítaná s „oneskorenou“ impulznou odozvou vytvorí výstup

$$2h(n) + h(n-5) = \begin{cases} 2(0.9)^n + (0.9)^{n-5} & \text{pre } n \geq 5, \\ 2(0.9)^n & \text{pre } 0 \leq n < 5, \\ 0 & \text{pre } n < 0. \end{cases}$$

Vážená suma impulzov na vstupe teda vytvorí rovnako váženú sumu jednotlivých výstupov.

Pomocou týchto poznatkov sa dá **konvolučný vzorec** vyjadriť všeobecne. Prvým krokom je vyjadrenie vstupu x ako lineárnu funkciu „oneskorených“ impulzov, to znamená

$$x(n) = x * \delta(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)\delta(n-i), \quad (14)$$

kde $*$ označuje konvolúciu. Rovnica (14) vyjadruje signál ako lineárnu kombináciu (alebo váženú sumu) impulzov. To znamená, že na každý prvok signálu sa dá pozeráť ako na impulz s určitou amplitúdou a v istom čase. Podľa [9] s využitím tvaru všeobecného lineárneho filtra (7) a definície linearity (8), môžeme vyjadriť výstup lineárneho filtra ako

$$\begin{aligned} y(n) &= T_n(x) = T_n(x * \delta) = T_n\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)\delta_{-i}\right) = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)T_n(\delta_{-i}) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(i)h(n, i), \end{aligned} \quad (15)$$

kde sa označilo $h(n, i) = T_n(\delta_{-i})$ na znázornenie odozvy filtra v čase n na impulz, ktorý nastal v čase i . Pre časovo nemenný filter platí rovnosť

$$y(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(i)h(n - i). \quad (16)$$

Po úprave na reálne využitie v čase

$$y(n) = \sum_0^n x(i)h(n - i)$$

a keďže pre konvolúciu platí komutatívnosť, tak

$$y(n) = \sum_0^n h(i)x(n - i).$$

2.2.3 Transformačná funkcia

Z diskusie v predošlej podkapitole sa dá odvodiť, že ak y je výstup LTI filtra so vstupom x a impulznou odozvou h , potom platí

$$y(n) = h * x(n), \quad (17)$$

kde symbol „ $*$ “ označuje konvolúciu. Podľa [9] prvým krokom ku získaniu transformačnej rovnici je vyjadrenie „ z “ transformácie (viď 1.7.1) z oboch strán konvolučného vzorca (17). V tejto práci sa „ z “ transformáciou hlboko nezaobráame a uvádzame iba definíciu. „ z “ transformácia je definovaná pre digitálny signál $x(n)$ ako

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}, \quad (18)$$

kde z je komplexná premenná. Keďže v tejto práci uvažujeme iba o signáloch, ktoré začínajú v čase $n = 0$ a sú „bežné“, za spodnú hranicu je možné dosadiť 0 namiesto $-\infty$. Podľa [9] sa operácia „ z “ transformácie da označiť aj ako $X(z) = Z(x(n))$ alebo $X(z) \leftrightarrow x(n)$.

Podľa konvolučná veta udáva, že

$$x * y(n) \leftrightarrow X(z)Y(z). \quad (19)$$

Slovné sprostredkované veta (19) hovorí, že konvolúcia v časovej oblasti sa rovná násobeniu vo frekvenčnej oblasti. Pri „ z “ transformovaní a aplikovaní konvolučnej vety na obe strany (18) dostaneme tvar

$$Y(z) = H(z)X(z), \quad (20)$$

kde $H(z)$ je transformácia impulznej odozvy filtra, to znamená že „ z “ transformácia výstupu sa rovná „ z “ transformácii vstupu vynásobeného „ z “ transformáciou impulznej odozvy. Po vydelení $X(z)$ dostáva (20) tvar

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}.$$

Táto rovnica dáva úplne nový pohľad na impulznú odozvu filtra. Tvrdí, že „ z “ transformácia impulznej odozvy filtra je pomer transformáciu výstupu a vstupu. A preto podľa [9] definícia transformačnej funkcie má tvar: Transformačná funkcia $H(z)$ lineárneho časovo nemenného filtra je definovaná ako „ z “ transformácia impulznej odozvy $h(n)$.

Keďže „ z “ transformácia konvolučného vzťahu digitálneho filtra bola prospešná a na jej základe sme postavili definíciu transformačnej rovnice, „ z “ transformáciu môžeme aplikovať aj na základnú diferenčnú rovnicu (10). Na vytvorenie tohto vzťahu je treba spomenúť ďalšiu vlastnosť: Podľa [7] *veta o posune* hovorí pre „ z “ transformáciu, že

$$x(n - k) \leftrightarrow z^{-k}X(z),$$

kde $x(n) \leftrightarrow X(z)$ opisuje „ z “ transformáciu. To znamená, že signál $x(n - k)$, čo je vlastne signál $x(n)$ posunutý o k vzoriek, má „ z “ transformáciu $z^{-k}X(z)$. S použitím tejto vlastnosti sa dá zapísať „ z “ transformácia každej diferenčnej rovnice.

Po aplikácii „ z “ transformácie na obidve strany základnej diferenčnej rovnice LTI filtra, kde $Z(x(n))$ reprezentuje „ z “ transformáciu dostávame tvar:

$$\begin{aligned}
y(n) &= a_0x(n) + a_1x(n-1) + \dots + a_Mx(n-M) \\
&\quad - b_1y(n-1) - \dots - b_Ny(n-N) \\
Z(y(n)) &= Z(a_0x(n) + a_1x(n-1) + \dots + a_Mx(n-M) \\
&\quad - b_1y(n-1) - \dots - b_Ny(n-N)) \\
&= Z(a_0x(n)) + Z(a_1x(n-1)) + \dots + Z(a_Mx(n-M)) \\
&\quad - Z(b_1y(n-1)) - \dots - Z(b_Ny(n-N)) \\
&= a_0Z(x(n)) + a_1Z(x(n-1)) + \dots + a_MZ(x(n-M)) \\
&\quad - b_1Z(y(n-1)) - \dots - b_NZ(y(n-N)) \\
&= a_0Z(x(n)) + a_1z^{-1}Z(x(n)) + \dots + a_Mz^{-M}Z(x(n)) \\
&\quad - b_1z^{-1}Z(y(n)) - \dots - b_Nz^{-N}Z(y(n)),
\end{aligned}$$

kde sa použili vlastnosti linearity (V1) a (V2) z (8) a veta o posune. Zmenou zápisu $Z(y(n))$ na $Y(z)$ a $Z(x(n))$ na $X(z)$ vytvorí tvar

$$\begin{aligned}
Y(z) &= a_0X(z) + a_1z^{-1}X(z) + \dots + a_Mz^{-M}X(z) \\
&\quad - b_1z^{-1}Y(z) + \dots + b_Nz^{-N}Y(z).
\end{aligned} \tag{21}$$

Po presune členov $Y(z)$ na jednu stranu a vyňatí členov $Y(z)$ a $X(z)$ dostáva rovnica (21) tvar

$$Y(z)(1 + b_1z^{-1} + \dots + b_Nz^{-N}) = X(z)(a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_Mz^{-M}).$$

A nakoniec po vydelení oboch strán členom $X(z)$ dostáva transformačná funkcia $H(z)$ tvar

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + b_1z^{-1} + \dots + b_Nz^{-N}}{a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_Mz^{-M}}. \tag{22}$$

Hlavný prínos reprezentácie filtra pomocou transformačnej rovnice tkvie vo vzhľade získanom na určenie pólov a núl filtra, ktoré budú spomenuté neskôr v tejto práci.

2.2.4 Frekvenčná odozva

Začínajúc s rovnicou (20), ktorá má tvar

$$Y(z) = H(z)X(z),$$

sa dá podľa [6] dosadiť pri „ z “ transformácii za z člen $e^{i\omega T}$, ktorý dáva celé spektrum signálu (spektrum signálu je celý signál zapísaný pomocou sínusoid). Inými slovami spektrum signálu sa rovná „ z “ transformácii aplikovanej na jednotkovej kružnici. Aplikovaním tohto faktu na rovnicu (20) dáva

$$Y(e^{i\omega T}) = H(e^{i\omega T})X(e^{i\omega T}). \quad (23)$$

To znamená, že rozsah výstupu filtra je len rozsah vstupu filtra vynásobený členom $H(e^{i\omega T})$. Toto definuje frekvenčnú odozvu ako „ z “ transformáciu $H(z)$ použitú na jednotkovej kružnici, čo je $H(e^{i\omega T})$.

Pretože každé komplexné číslo môže byť zapísané pomocou vzdialenosti od počiatku súradnicovej osi a uhlu, ktorý zvierá s osou x , frekvenčná odozva môže byť rozdelená na dve reálne funkcie: násobok amplitúdy G a fázový posun θ . Formálne

$$\begin{aligned} G(\omega) &= |H(e^{i\omega T})|, \\ \theta(\omega) &= \angle H(e^{i\omega T}). \end{aligned}$$

A teda frekvenčná odozva má tvar

$$H(e^{i\omega T}) = G(\omega)e^{i\theta(\omega)}. \quad (24)$$

2.3 Póly a nulové body

Póly a nulové body filtra (angl. „poles and zeros of a filter“) sú alternatívne reprezentácie filtra vo frekvenčnej oblasti. Prvý krok k vyjadreniu tejto reprezentácie je mierne upravený vzorec transformačnej rovnice (22):

$$H(z) = G \frac{1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_M z^{-M}}{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}},$$

ktorý sa odlišuje od pôvodnej rovnice (22) tým, že člen a_0 bol vyňatý z čitateľa a označený ako G a potom $\alpha_i = \frac{a_i}{a_0}$. Rovnakým spôsobom, ako sa dá polynóm $x^2 + 3x + 2$ upraviť na $(x + 2)(x + 1)$, tak sa dá aj upraviť čitateľ a menovateľ transformačnej funkcie $H(z)$ na tvar

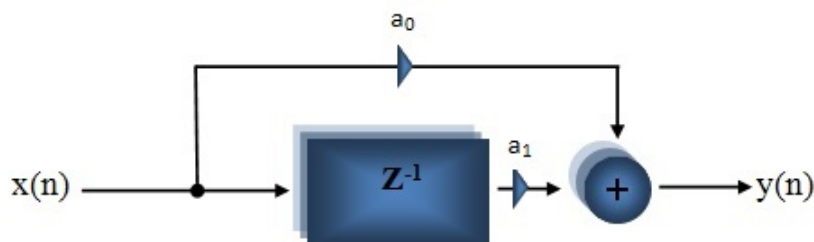
$$H(z) = G \frac{(1 - q_1 z^{-1})(1 - q_2 z^{-1}) \dots (1 - q_M z^{-1})}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1}) \dots (1 - p_N z^{-1})}. \quad (25)$$

Pre zjednodušenie budeme predpokladať, že žiadna zo zátvoriek sa nevykrátí. Čísla $\{q_1, \dots, q_M\}$, ktoré môžu byť aj komplexné, sú korene polynómu čitateľa. Keď z sa rovná niektorej z týchto hodnôt, transformačná funkcia sa rovná 0. Kvôli tejto vlastnosti korene polynómu čitateľa sa nazývajú **nulové body** filtra. Podobne, ako sa z blíži ku ľubovoľnému koreňu polynómu menovateľa, transformčná funkcia $H(z)$ rastie a rastie až diverguje nekonečnu, a preto čísla $\{p_1, \dots, p_N\}$ sa nazývajú **póly** filtra.

3 Príklady filtrov

Na preskúšanie techník analýzy filtra spomenutých v Kapitole 2 aplikujeme tieto metódy na štyri základné filtre. Príklady týchto filtrov sú: **filter s jedným nulovým bodom** (angl. „one-zero filter“), **filter s dvoma nulovými bodmi** (angl. „two-zero filter“), **jednopolový filter** („one-pole filter“) a **dvojpólový filter** (angl. „two-pole filter“). Tieto filtre sú dôležité, pretože každý LTI filter konečného rádu vyjadrený pomocou diferenčnej rovnice môže byť faktorizovaný pomocou zložiek, ktoré tvoria tieto štyri základné typy filtrov. V Kapitole 3 sme čerpali hlavne z [9].

3.1 Filter s jedným nulovým bodom



Obr. 12: Vývojový diagram pre všeobecný filter s jedným nulovým bodom $y(n) = a_0x(n) + a_1x(n - 1)$.

Obrázok 12 znázorňuje vývojový diagram pre všeobecný filter jedným nulovým bodom. Frekvenčná odozva pre filter s jedným nulovým bodom môže byť odvodená pomocou nasledujúcich vzťahov:

Diferenčná rovnica $y(n) = a_0x(n) + a_1x(n - 1)$.

„z“ transformácia $Y(z) = a_0X(z) + a_1z^{-1}X(z)$.

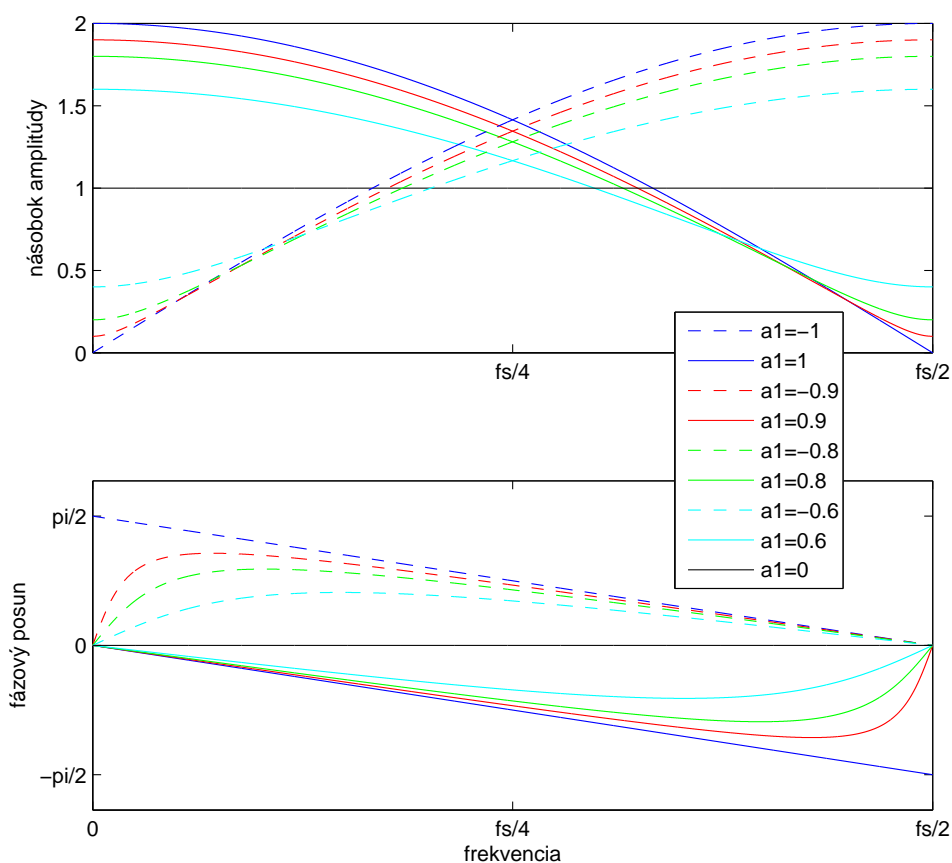
Transformačná funkcia $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = a_0 + a_1z^{-1}$.

Frekvenčná odozva $H(e^{i\omega T}) = a_0 + a_1e^{-i\omega T}$.

Pre kompletnosť analýzy filtra je nutné z frekvenčnej odozvy vyrátať násobok am-

plitúdy filtra $G(\omega)$ a fázový posun filtra $\theta(\omega)$:

$$\begin{aligned} H(e^{i\omega T}) &= a_0 + a_1 e^{-i\omega T} \\ &= a_0 + a_1 \cos(\omega T) - i a_1 \sin(\omega T) \\ G(\omega) &= \sqrt{(a_0 + a_1 \cos(\omega T))^2 + (-a_1 \sin(\omega T))^2} \\ &= \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + 2a_0 a_1 \cos(\omega T)} \\ \theta(\omega) &= \tan^{-1} \left(\frac{-a_1 \sin(\omega T)}{a_0 + a_1 \cos(\omega T)} \right). \end{aligned}$$

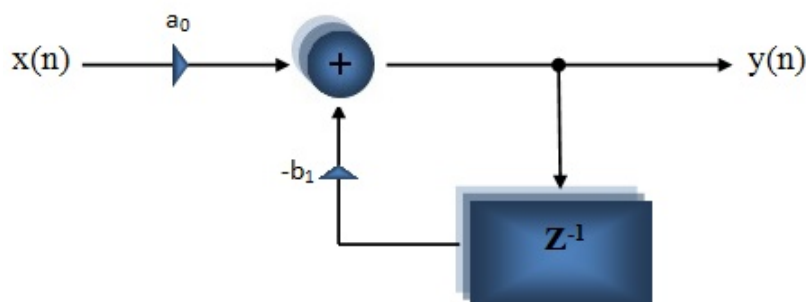


Obr. 13: Frekvenčné odozvy filtra $y(n) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1)$ pre $a_0 = 1$ a rôzne variácie a_1 .

Zakreslenie násobku amplitúdy $G(\omega)$ a fázového posunu $\theta(\omega)$ s pevne určeným členom $a_0 = 1$ a rôznymi varáciami člena a_1 sú zrealizované Obrázku 13. Tento filter má nulový bod v prípade, ak $z = -\frac{a_1}{a_0}$. Pokiaľ je bod na jednotkovej kružnici blízko k nulovému bodu transformačnej rovnice, násobok amplitúdy pre túto frekvenciu je nízky.

Filter s jedným nulovým bodom môže filtrovať ako filter dolnej priepuste $\frac{a_1}{a_2} < 0$, ale aj ako filter hornej priepuste $\frac{a_1}{a_2} > 0$.

3.2 Jednopolový filter



Obr. 14: Vývojový diagram pre všeobecný jednopolový filter $y(n) = a_0x(n) - b_1y(n-1)$.

Obrázok 14 opisuje vývojový diagram pre všeobecný jednopolový filter. Cesta ku frekvenčnej odozve má tvar:

Diferenčná rovnica $y(n) = a_0x(n) - b_1x(y-1)$.

„z“ transformácia $Y(z) = a_0X(z) - b_1z^{-1}Y(z)$.

Transformačná funkcia $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0}{1+b_1z^{-1}}$.

Frekvenčná odozva $H(e^{i\omega T}) = \frac{a_0}{1+b_1e^{-i\omega T}}$.

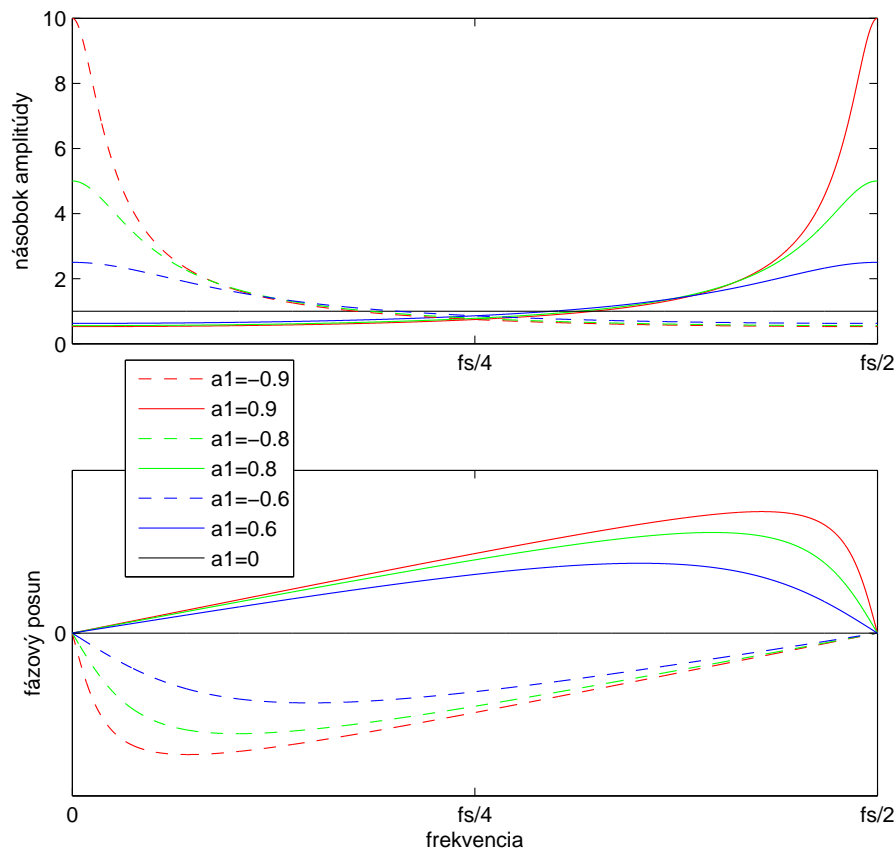
Filter s jedným pódom má transformačnú funkciu a teda aj frekvenčnú odozvu inverznú k filtru s jedným nulovým bodom. Analýza je teda analogická:

$$G(\omega) = \frac{a_0}{\sqrt{(1+b_1\cos(\omega T))^2 + (-b_1\cos(\omega T))^2}}$$

$$= \frac{a_0}{1+b_1^2+2b_1\cos(\omega T)}$$

$$\theta(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{-b_1\cos(\omega T)}{1+b_1\sin(\omega T)}\right).$$

Na Obrázku 15 sú zobrazené frekvenčné odozvy pre jednopolový filter $y(n) = a_0x(n) - b_1y(n-1)$ s $a_0 = 1$ a rôznymi variáciami b_1 . Filter má jeden pól, ktorý je vždy reálny v bode $z = -b$. Pomocou jednopolového filtra sa dá rovnako ako pomocou filtra s jedným nulovým bodom vytvoriť, určením správneho člena b_1 , filter s hornou

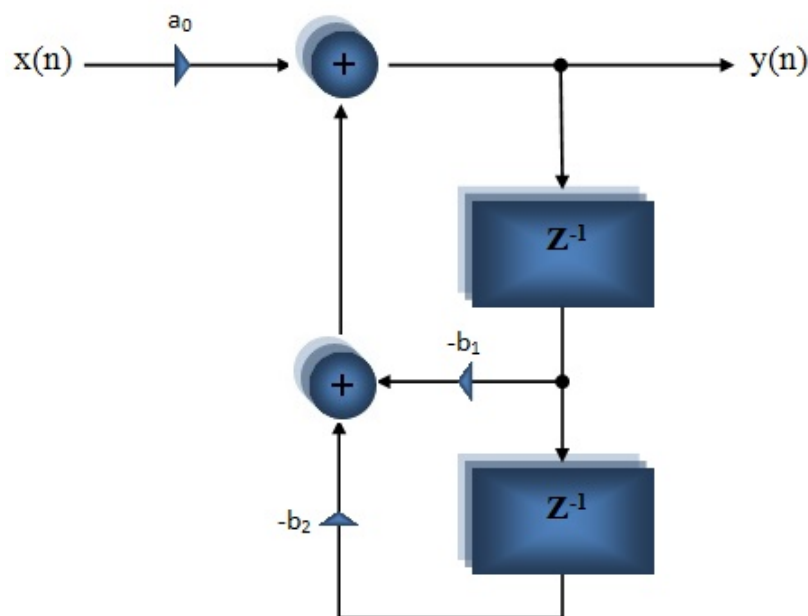


Obr. 15: Frekvenčné odozvy filtra $y(n) = a_0x(n) - b_1y(n-1)$ pre $a_0 = 1$ a rôzne variácie b_1 .

priepustou, alebo filter s dolnou priepustou. Jednopolový filter má vlastnosti filtra s hornou priepustou pokiaľ člen b_1 je kladný a vlastnosti filtra s dolnou priepustou nadobudne pokiaľ je člen b_1 záporný. Ako je vidno aj na Obrázku 15 filtrovacie vlastnosti jednopolového filtra majú strmší priebeh ako pri filtri s jedným nulovým bodom. To znamená napríklad, že pokiaľ sa člen b_1 blíži ku jednotke, tým nízke frekvencie viac potláča a vysoké viac násobí, a preto je dôležité určiť podmienku podľa [9], aby člen $|b_1| < 1$, pretože opačne by filter mohol spôsobiť až nekonečné zhlásenie.

3.3 Dvojpólový filter

Vývojový diagram pre všeobecný dvojpólový filter $y(n) = a_0x(n) - b_1y(n-1) - b_2y(n-2)$ je zobrazený na Obrázku 16. Na získanie frekvenčnej odozvy sme pokračovali ako v predošlých dvoch prípadoch:



Obr. 16: Vývojový diagram pre všeobecný dvojpólový filter $y(n) = a_0x(n) - b_1y(n-1) - b_2y(n-2)$.

Diferenčná rovnica $y(n) = a_0x(n) - b_1x(n-1) - b_2y(n-2)$.

„z“ transformácia $Y(z) = a_0X(z) - b_1z^{-1}Y(z) - b_2z^{-2}Y(z)$.

Transformačná funkcia $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}$.

Frekvenčná odozva $H(e^{i\omega T}) = \frac{a_0}{1+b_1e^{-i\omega T}+b_2e^{-i2\omega T}}$.

Keďže dvojpólový filter má očividne dva póly (korene menovateľa) a koeficienty b_1 a b_2 sú reálne, potom póly musia tvoriť buď reálny alebo komplexne združený pár. Pokiaľ sú póly reálne, potom dvojpólový filter je jednoducho kombináciou jednopólových filtrov, ktoré boli analyzované v predošlej podkapitole. To znamená, že pri dosahovaní frekvenčnej odozvy pre dvojpólový filter s reálnymi pólmi stačí, pokiaľ sa vynásobia frekvenčné odozvy dvoch jednopólových filtrov prislúchajúcim jednotlivým reálnym koreňom.

V prípade, ak póly nie sú reálne, ale tvoria komplexne združený pár, je potrebné vyjadriť korene pomocou polárnych súradníc, ako $Re^{i\varphi_c}$ a $Re^{-i\varphi_c}$, kde $R \geq 0$ je vzdialenosť od počiatku súradnicovej osi v polárnych súradniciach pre oba korene a φ_c označuje uhol od kladnej súradnicovej osi x . Násobok amplitúdy pre tento filter rezonuje v okolí frekvencie $\omega = \varphi_c$. To znamená, že pokiaľ je frekvencia blízka f hodnote φ_c , potom ná-

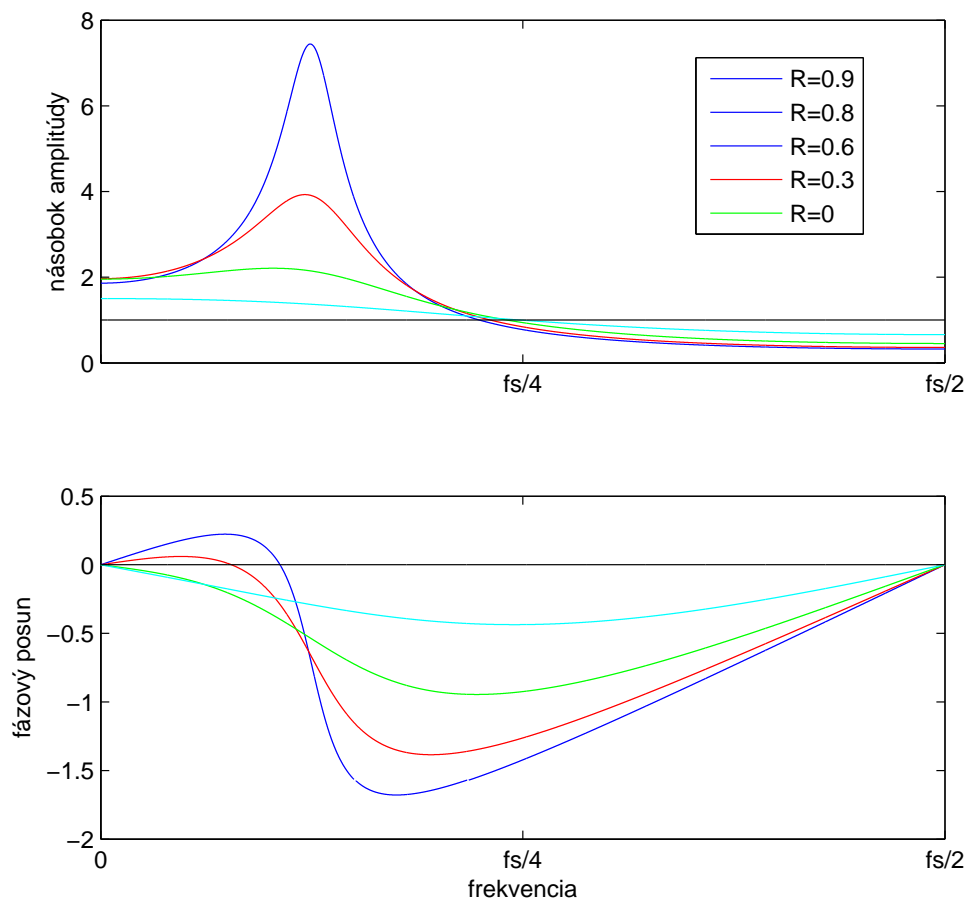
sobok amplitúdy je vysoký a čím sa potom táto frekvencia vzdialuje od tejto žiadanej frekvencie, tým násobok amplitúdy G klesá.

A teda, pre dvojpólový filter s komplexne združenými pólmi transformačná funkcia má tvar:

$$H(z) = \frac{a_0}{1 - Re^{i\varphi_c}z^{-1}}(1 - Re^{-i\varphi_c}z^{-1}) \quad (26)$$

$$= \frac{a_0}{1 - 2R \cos(\varphi_c)z^{-1} + R^2z^{-2}}, \quad (27)$$

z ktorého je možné identifikovať $b_1 = -2R \cos(\varphi_c)$ a $b_2 = R^2$.



Obr. 17: Frekvenčné odozvy filtra $y(n) = a_0x(n) - 2R \cos(\varphi_c)y(n-1) - R^2y(n-2)$ pre $a_0 = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ a rôzne variácie R .

Obrázok 17 zobrazuje frekvenčnú odozvu pre dvojpólový filter s $a_0 = 1$ a s rôznymi variáciami R . Hodnota $\varphi_c = \frac{\pi}{4}$ vo všetkých prípadoch. Analytické vyjadrenie násobka

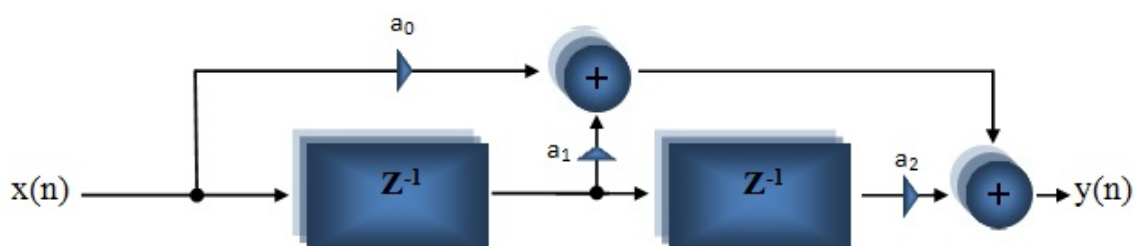
amplitúdy G a fázového posunu má tvar:

$$G(\omega) = \frac{a_0}{\sqrt{(1 + b_1 \cos(\omega T) + b_2 \cos(2\omega T))^2 + (-b_1 \sin(\omega T) - b_2 \sin(2\omega T))^2}}$$

$$\theta(\omega) = -\tan^{-1} \left(\frac{-b_1 \sin(\omega T) - b_2 \sin(2\omega T)}{1 + b_1 \cos(\omega T) + b_2 \cos(2\omega T)} \right),$$

kde $b_1 = -2R \cos(\varphi_c)$ a $b_2 = R^2$.

3.4 Filter s dvomi nulovými bodmi



Obr. 18: Vývojový diagram pre všeobecný filter s dvomi nulovými bodmi $y(n) = a_0x(n) + a_1x(n-1) + a_2x(n-2)$.

Na Obrázku 18 je znázornený vývojový diagram pre všeobecný filter s dvoma nulovými bodmi. Odvodenie frekvenčnej odozvy:

Diferenčná rovnica $y(n) = a_0x(n) + a_1x(n-1) + a_2x(n-2)$.

„Z“ transformácia $Y(z) = a_0X(z) + a_1z^{-1}X(z) + a_2z^{-2}X(z)$.

Transformačná funkcia $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}$.

Frekvenčná odozva $H(e^{i\omega T}) = a_0 + a_1e^{-i\omega T} + a_2e^{-2i\omega T}$.

Následne z frekvenčnej odozvy sa dá vypočítať násobok amplitúdy G a fázový posun θ ako:

$$G(\omega) = \sqrt{(a_0 + a_1 \cos(\omega T) + a_2 \cos(2\omega T))^2 + (-a_1 \sin(\omega T) - a_2 \sin(2\omega T))^2}$$

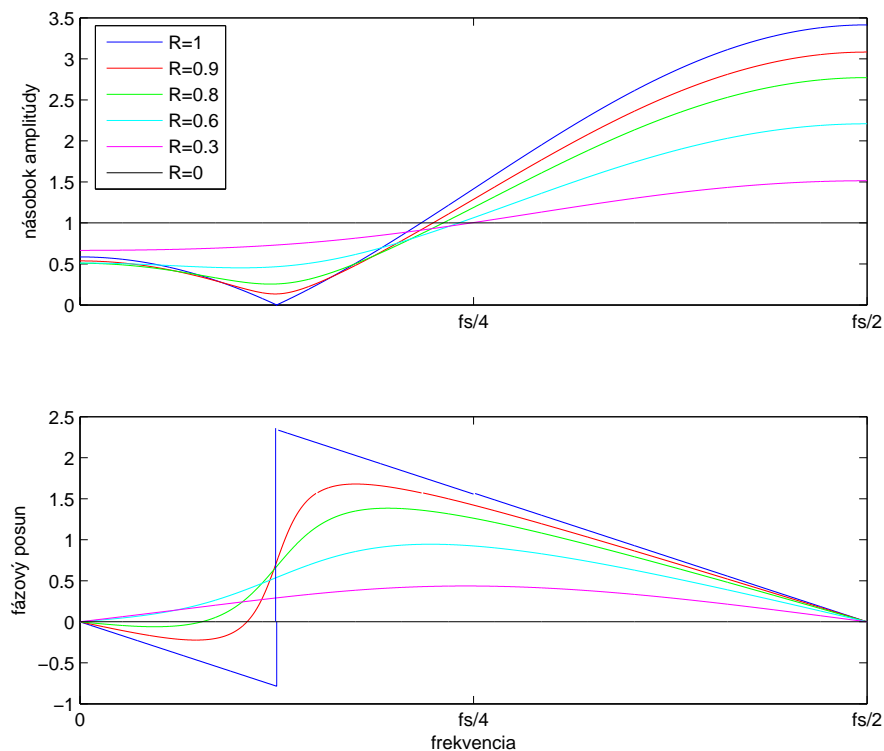
$$\theta(\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{-a_1 \sin(\omega T) - a_2 \sin(2\omega T)}{a_0 + a_1 \cos(\omega T) + a_2 \cos(2\omega T)} \right).$$

Ako v prípade dvojpolového filtra, ak korene filtra $a_0z^2 + a_1z + a_2$ sú reálne, potom analýza filtra s dvomi nulovými bodmi je len analogická ku analýze filtre s jedným nulovým bodom. V prípade komplexnosti nulových bodov je potrebné ich vyjadriť

pomocou polárnych súradníc ako $Re^{i\varphi_c}$ a $Re^{-i\varphi_c}$, kde $\varphi_c = \omega_c T = 2\pi f_c T$. Formovanie transformačnej funkcie $H(z)$ pomocou týchto tvarov vedie ku:

$$\begin{aligned} H(z) &= a_0(1 - Re^{i\varphi_c}z^{-1})(1 - Re^{-i\varphi_c}z^{-1}) \\ &= a_0(1 - 2R\cos(\varphi_c)z^{-1} + R^2z^{-2}), \end{aligned}$$

z ktorého sa dá indentifikovať $a_1 = -2R\cos(\varphi_c)$ a $a_2 = a_0R^2$. Násobok amplitúdy G pre frekvencie blízke ω_c je minimalizovaný a čím sa frekvencia viac vzdaluje od frekvencie ω_c , tým sa násobok amplitúdy zväčšuje.



Obr. 19: Frekvenčné odozvy filtra $y(n) = a_0x(n) - 2R\cos(\varphi_c)x(n-1) - R^2x(n-2)$ pre $a_0 = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ a rôzne variácie R .

Obrázok 19 znázorňuje frekvenčné odozvy pre filter s dvoma nulovými bodmi s $a_0 = 1$, $\varphi_c = \frac{\pi}{4} = \frac{f_s}{8}$ a s rôznymi kombináciami R . Správanie násobku amplitúdy G je opačné ku správaniu násobku filtra G pre dvojpólový filter, pričom v blízkosti zadanej frekvencie φ_c signál nezosilňuje, ale naopak zoslabuje.

Záver

V dnešnej dobe digitálnych technológií sa stretávame s využitím digitálnych filtrov každodenne. Využívame ich bez toho, aby sme chápali ako fungujú, dokonca bez toho, aby sme si vôbec uvedomovali, že existujú.

V našej práci sme prezentovali základné nástroje, ktoré sa využívajú pri analýze digitálnych filtrov. Na začiatku sme čitateľa oboznámili s danou problematikou pomocou definície signálu, jeho základnými vlastnosťami a rozdelením. Neskôr sme pomocou základných analytických metód digitálnych filtrov skúmali, akým spôsobom daný filter ovplyvňuje spektrum vstupného signálu. Tieto metódy sme podrobne aplikovali na najjednoduchší filter dolnej priepuste (1), ktorý vďaka svojej jednoduchosti slúži dokonale na oboznámenie čitateľa so základnými mechanizmami digitálneho filtra.

Tieto poznatky sa dajú využiť pri hlbšej analýze vlastností digitálnych filtrov, ako sú linearita, časová nemennosť, impulzná odozva filtra, koeficienty diferenčnej rovnice, transformačná funkcia, násobok amplitúdy filtra, fázový posun, póly a nulové body filtra, stabilita a využitie komplexných čísiel na reprezentáciu signálov a ich spektier, o ktorých sme ďalej v práci pojednávali.

Dosiahnuté výsledky sme v závere práce aplikovali na štyri základné filtre (filter s jedným nulovým bodom, jedнопólový filter, filter s dvoma nulovými bodmi a dvojpólový filter), pomocou ktorých sa dá vyjadriť každý iný LTI filter.

Naša práca uvádza do problematiky digitálnych filtrov, slúži jednak ako učebný prostriedok pre čitateľa, ktorý chce získať hlbšie poznatky v tejto téme, ale i ako odrazový mostík pre prácu s komplexnejšími digitálnymi filterami.

Hlavným prínosom tejto práce bolo zdokonalenie sa autora v oblasti spracovávania digitálnych signálov a podrobné a prehľadné spracovanie témy.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Brews, O., *Steps in a signal communication system*, dostupné na internete (11.4.2012), http://en.wikipedia.org/wiki/File:Signal_processing_system.png
- [2] Coursera Class, *Digital signal processing class*, dostupné na internete (7.10.2013), <https://class.coursera.org/dsp-002/class>
- [3] Gálvez, J.L., *Digital Signal*, dostupné na internete (6.4.2005), http://en.wikipedia.org/wiki/File:S_digital.PNG
- [4] Ghasemi, A., Abedi, A., Ghasemi F., *Propagation Engineering in Wireless Communications*, Springer, 2012
- [5] McMahan, D., *Signals and Systems Demystified*, McGraw-Hill, New York, 2007
- [6] Moore, F. R., *An Introduction to the Mathematics of Digital Signal Processing, Part I*, Computer Music Journal vol. 2, no. 1, pp. 38-60, 1978
- [7] Papoulis, A., *Signal Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1977
- [8] Priemer, R., *Introductory Signal Processing*, World Scientific., 1991
- [9] Smith, O.S., *Introduction to Digital Filter Theory*, CCRMA, Report No. STAN-M-20, Stanford, April 1985
- [10] Wilmshurst, T. H., *Signal Recovery from Noise in Electronic Instrumentation*, CRC Press., 1990