UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

# ZÁKLADY SPRACOVANIA DIGITÁLNYCH SIGNÁLOV - DISKRÉTNA FOURIEROVA TRANSFORMÁCIA

BAKALÁRSKA PRÁCA

2014

Michaela JAŠURKOVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

# ZÁKLADY SPRACOVANIA DIGITÁLNYCH SIGNÁLOV - DISKRÉTNA FOURIEROVA TRANSFORMÁCIA

## BAKALÁRSKA PRÁCA

| | |
|---|---|
| Študijný program: | Ekonomická a finančná matematika |
| Študijný odbor: | 1114 Aplikovaná matematika |
| Školiace pracovisko: | Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky |
| Vedúci práce: | Mgr. Soňa Kilianová, PhD. |

Bratislava 2014 **Michaela JAŠURKOVÁ**

10360759

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

# ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

| | |
|---|---|
| **Meno a priezvisko študenta:** | Michaela Jašurková |
| **Študijný program:** | ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma) |
| **Študijný odbor:** | 9.1.9. aplikovaná matematika |
| **Typ záverečnej práce:** | bakalárska |
| **Jazyk záverečnej práce:** | slovenský |

**Názov:** Základy spracovania digitálnych signálov - Diskrétna Fourierova transformácia / *Fundamentals of Digital Signal Processing - The Discrete Fourier Transform*

**Cieľ:** Naštudovanie a prehľadné spracovanie základných konceptov a vlastností diskrétnej Fourierovej transformácie.

| | |
|---|---|
| **Vedúci:** | Mgr. Soňa Kilianová, PhD. |
| **Katedra:** | FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky |
| **Vedúci katedry:** | prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc. |
| **Dátum zadania:** | 18.10.2013 |

**Dátum schválenia:** 14.11.2013 doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

.......................................... ..........................................
študent vedúci práce

# Abstrakt

JAŠURKOVÁ, Michaela: Základy spracovania digitálnych signálov - Diskrétna Fourierova transformácia [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Mgr. Soňa Kilianová, PhD., Bratislava, 2014, 44 s.

V práci sa zaoberáme digitálnym spracovaním signálov a diskrétnou Fourierovou transformáciou. Cieľom je opísať základné koncepty a vlastnosti diskrétnej Fourierovej transformácie a teóriu spracovania signálov. Značná pozornosť je tiež venovaná klasifikácii a charakterizácii signálov a analógovo-digitálnemu prevodu. Výsledkom práce je prehľadné spracovanie tejto témy, ktoré umožní čitateľovi ľahšie sa zorientovať v danej problematike.


**Kľúčové slová:** Signály, Diskrétna Fourierova transformácia, Digitálne spracovanie signálov

# Abstract

JAŠURKOVÁ, Michaela: Fundamentals of Digital Signal Processing - The Discrete Fourier Transform [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Mgr. Soňa Kilianová, PhD., Bratislava, 2014, 44 p.

In bachelor thesis we are concerned with digital signal processing and discrete Fourier transform. The aim is to describe concepts and properties of discrete Fourier transform and the theory of signal processing. Considerable amount of attention is also given to clasification and characterisation of signals and to analog-to-digital conversion. The result of work is comprendious adaptation of this theme, that helps reader to comprehend the issue.

**Keywords:** Signals, Discrete Fourier Transform, Digital Signal Processing

# Obsah

# Zoznam obrázkov

# Úvod

Francúzsky matematik Joseph Fourier na začiatku 19. storočia svojou vedeckou činnosťou položil základy Fourierovej transformácie. Je to spôsob ako signál rozložíme na základné komponenty frekvencie. Tento matematický aparát je využívaný v mnohých oblastiach, no najmä v spracovaní signálov. V roku 1965 dvaja matematici, James Cooley a John Tukey, popísali algoritmus rýchlej Fourierovej transformácie, čo uľahčilo výpočet diskrétnej Fourierovej transformácie. Tá sa stala praktickým spôsobom používaným pri spracovaní digitálnych signálov. S objavom tohto algoritmu a so zefektívnením výpočtu diskrétnej Fourierovej transformácie je spojený prudký rast významu digitálneho spracovania signálov v posledných desaťročiach.

Motiváciou pre vznik tejto práce bolo vytvorenie uceleného prehľadu spracovania signálov od vymedzenia základných pojmov v teórii signálov cez transformačné metódy Fourierovej analýzy po spôsoby spracovania signálov.

Prácu sme rozdelili na tri časti. V prvej kapitole vysvetlíme základne pojmy teórie signálov, ktoré sú potrebné pri ďalšom spracovaní signálov. V druhej kapitole sú zavedené jednotlivé transformácie potrebné na zmenu reprezentačnej oblasti signálu. Zameriame sa hlavne na diskrétnu Fourierovu transformáciu. Príslušnú transformáciu ilustrujeme na príklade. V tretej kapitole sa venujeme spracovaniu signálov. Väčšia pozornosť je venovaná analógovo-digitálnemu prevodu. Porovnáme analógové a digitálne spracovanie signálov a na záver popíšeme aplikácie digitálneho spracovania signálov.

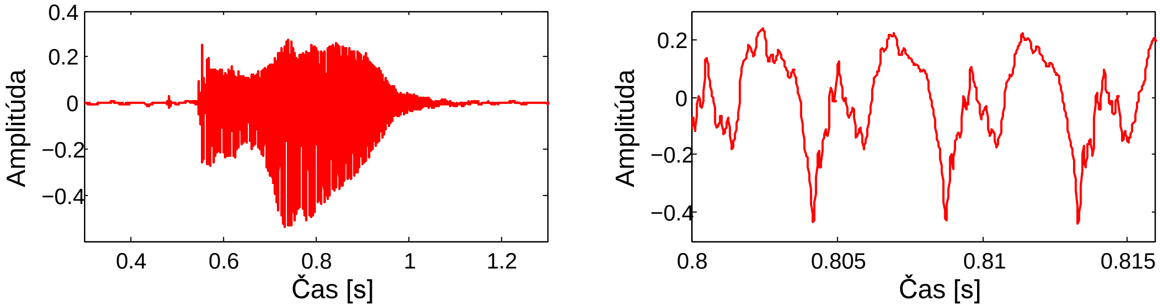
# 1 Signály

Signály sú neoddeliteľnou súčasťou moderného sveta. V rôznych podobách nás obklopujú na každom kroku. Niektoré sú generované prírodnými zdrojmi, iné počítačovými simuláciami alebo synteticky. Signály ako reč sú pre nás veľmi potrebné a hudba s videosignálmi nám spríjemňujú život. Matematicky je signál reprezentovaný ako funkcia jednej alebo viacerých nezávislých premenných, napríklad času alebo priestorových súradníc. Z technického hľadiska je signál nositeľom informácie. Práve táto informácia je pre nás dôležitá. Často ju chceme zintenzívniť, uložiť alebo vybrať zo signálu. Pod pojmom spracovanie signálov rozumieme operácie, ktoré nám to umožnia.

## 1.1 Príklady signálov

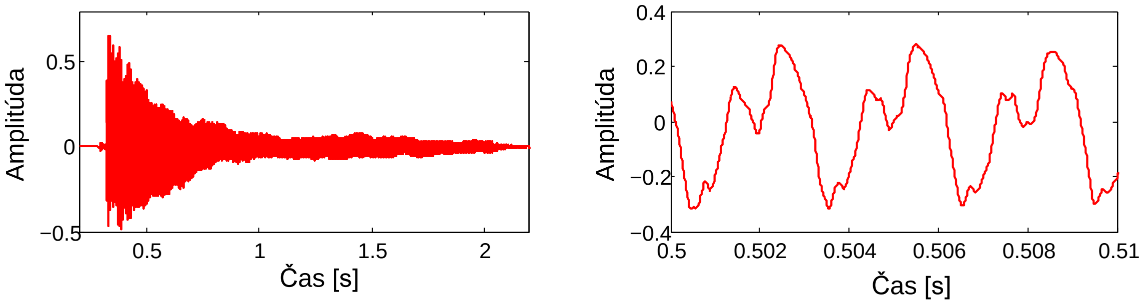
Pri bližšom pohľade na signály, s ktorými sme v každodennom kontakte, zisťujeme, že majú veľa zaujímavých vlastností. Ich analýzou a spracovaním získavame množstvo dôležitých informácií.

Reč je akustickým signálom, ktorý má viacero špecifických vlastností. Ako vzniká? Hlasivky, dve pružné blany v hrtane, sú pri spievaní alebo rozprávaní napnuté a vytvára sa medzi nimi úzka štrbina [13, 18]. Prúdenie vzduchu z pľúc spôsobí rozkmitanie hlasiviek a vznikne pravidelné kolísanie tlaku vzduchu. To sa šíri ústami ako vlnenie zvuku - ľudský hlas. Je z neho možné určiť, či hovorí muž, žena alebo dieťa. Vieme rozpoznať jazyk hovoriaceho. Ľudský hlas je jedinečný svojou vlnovou dĺžkou. Túto skutočnosť využíva hlasová biometria, ktorá nám umožňuje identifikovať konkrétnu osobu na základe hlasového prejavu. Podľa [16] je na vzorke reči najprv vykonaná foneticko-lingvistická analýza. Tá sa zameriava na výslovnosť, prízvuk, či slovnú zásobu. Kľúčová je akustická analýza, ktorá sa napríklad venuje už spomínanej vlnovej dĺžke hlasu. Hlasová biometria má široké uplatnenie v kriminalistike a bezpečnostných systémoch. Významnou oblasťou výskumu je rozpoznávanie slov, ktoré je v praxi aplikované na voľbu telefónneho čísla hlasom. Na Obr. 1 vidíme časový priebeh rečového signálu slova „ahoj“ spolu s detailným pohľadom.



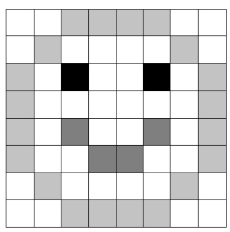

**Obr. 1:** Časový priebeh rečového signálu - slovo „ahoj“.

Hudobný signál je rovnako ako reč významným akustickým signálom. Hudobným nástrojom, na ktorom si vysvetlíme vznik zvuku, bude klavír. Podľa [13, 18] úderom kladivka dôjde k vybudeniu mechanického oscilátora. Ten je tvorený napnutou strunou. Oscilátor potom vyvolá vibrácie ďalších častí klavíra. Všetky tieto vibrácie spolu generujú zvuk klavíra. Na Obr. 2 je znázornený časový priebeh tónu klavíra. Pri detailnejšom pohľade vidíme, že časový priebeh má oscilačný charakter.




**Obr. 2:** Časový priebeh hudobného signálu - tón klavíra.

Obraz je 2-D signálom, kde nezávislými premennými sú priestorové súradnice. Príkladom tohto signálu sú fotografia, radarové a sonarové obrazy a röntgenové snímky [18]. Na Obr. 3 vidíme malé plôšky usporiadané do stĺpcov a riadkov. Tieto plôšky sa nazývajú pixely. Obrázok sa skladá z 8 stĺpcov, 8 riadkov a 64 pixelov, je čiernobiely so 4 stupňami šedosti. Každému z pixelov priradíme číslo, ktoré vyjadruje stupeň šedosti. Vzorkovaním a číselnou reprezentáciou vzoriek dostávame obrazový signál. Ten je transformovaný do postupnosti čísel, čo umožňuje vykonať ope-

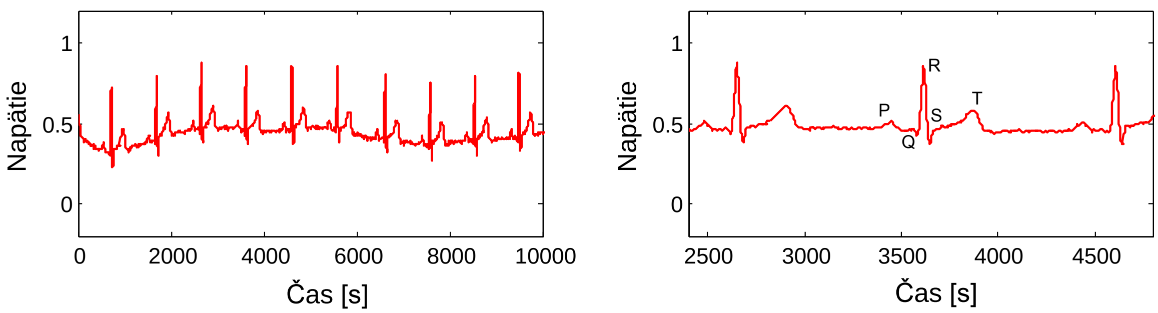


**Obr. 3:** Obrázok zložený z pixelov podľa [18].

rácie na zlepšenie vlastnosti obrazu.

**Obr. 4:** Obrazový 2-D signál - Fotografie. Zdroj: [20].

Signál EKG (elektrokardiogram) po spracovaní poskytuje významné diagnostické informácie. Vďaka novým spôsobom spracovania a vývoju diagnostickej techniky došlo v posledných rokoch k zníženiu počtu ľudí zomierajúcich na kardiovaskulárne ochorenia. Je to veľký úspech, lebo ochorenia srdca sú jednou z najčastejších príčin úmrtí. Signál EKG sa v moderných prístrojoch najprv navzorkuje. Potom je vyjadrený postupnosťou čísel a následne digitálne spracovaný. EKG má rozsah 0.05 až 5 mV. Na Obr. 5 je znázornený časový priebeh reálneho EKG, ktorý sa skladá z vĺn P, Q, R, S, T a U (vyznačené na obrázku vpravo). Vlna U u tohto pacienta prítomná nie je, tú majú len niektorí ľudia. Jej pôvod nie je zatiaľ objasnený. Každá časť krivky obsahuje dôležité informácie potrebné na lekársku analýzu srdcového svalu pacienta. Strata amplitúdy P vlny a QRS komplexu indikujú poškodenie srdcového svalu. Na tvar vlny T má vplyv cvičenie, hladovka, pitie studenej vody, šok, alebo užívanie drog. Pre viac informácií o EKG z fyzikálneho a medicínskeho hľadiska odporúčame čitateľa na [13, 18].



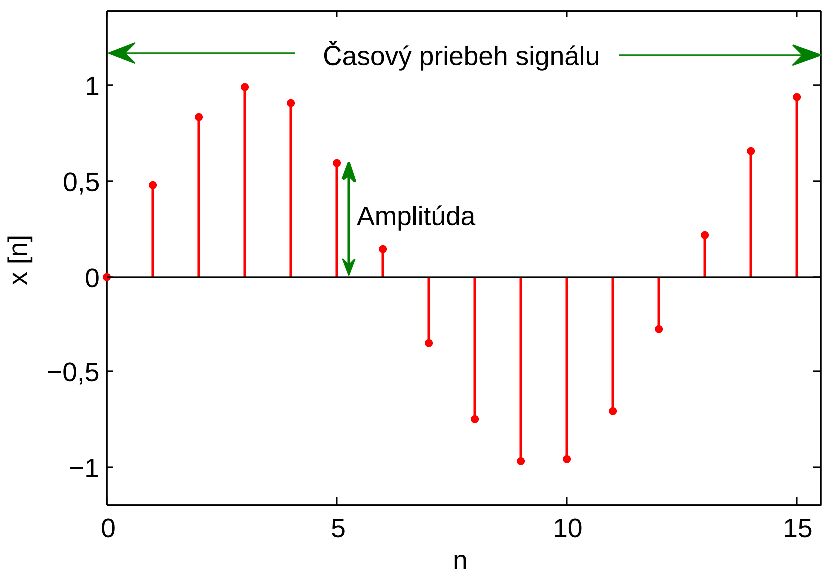

**Obr. 5:** Časový priebeh signálu - reálny EKG. Zdroj: [4].

## 1.2 Charateristika signálov

Na začiatok je dôležité zadefinovať podstatné pojmy, ktoré budeme používať pri klasifikácii a spracovaní signálov [7, 13]:

- amplitúda;
- priebeh signálu;
- zdroj signálu;
- systém.

Vieme, že signál je funkciou nezávislej premennej, napríklad času. V každom časovom okamihu signál nadobúda určitú hodnotu - amplitúdu. Zmenu amlitúd nazývame priebeh signálu. Na Obr. 6 je znázornený časový priebeh signálu s amplitúdou $x[n]$ v čase $n$. V súvislosti so signálmi nás tiež zaujíma spôsob ich vzniku. Z predchádzajúcej podkapitoly vieme, ako vzniká rečový signál. Systém, u rečového signálu tvorený hlasivkami a hrtanom, reaguje na podnet, ktorým je v tomto prípade prúdenie vzduchu z pľúc. Systém spolu s podnetom tvoria zdroj zvuku. Za systém považujeme aj nástroj, ktorý vykoná so signálom nejakú operáciu, v tomto prípade systém tiež označujeme názvom sústava. Príkladom systému je filter. Ten redukuje šum a potláča rušenie signálu.




**Obr. 6:** Amplitúda a časový priebeh signálu.

## 1.3 Delenie signálov

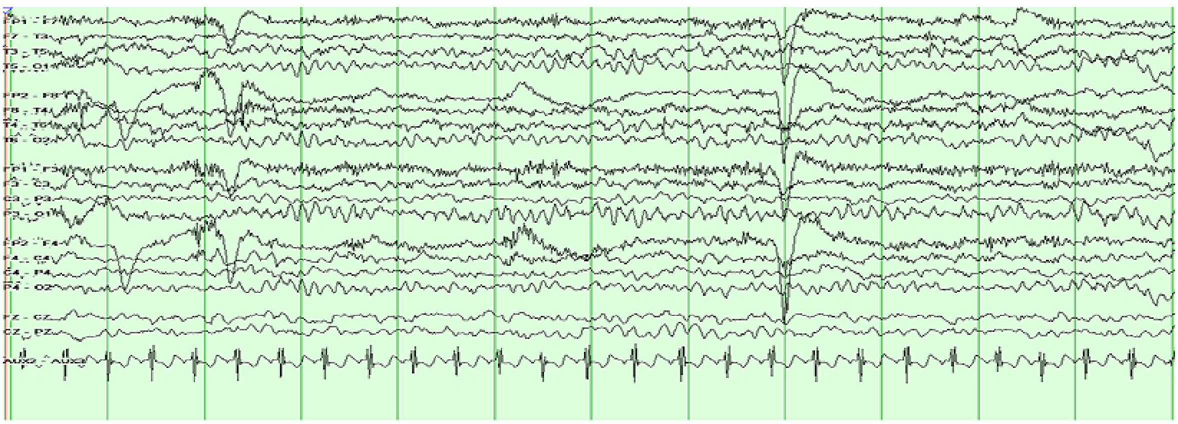
Pri spracovaní a analyzovaní signálov používame rôzne metódy. Tie závisia od charakteristických vlastností konkrétneho signálu. Sú techniky, ktoré môžeme aplikovať len na určité triedy signálov. Preto je dôležitá klasifikácia signálov.

### 1.3.1 Jednorozmerné vs. viacrozmerné signály

Signál je funkciou nezávislých premenných a podľa ich počtu rozdeľujeme signály na [7, 13]:

- 1-D - jednorozmerné signály;
- M-D - viacrozmerné signály.

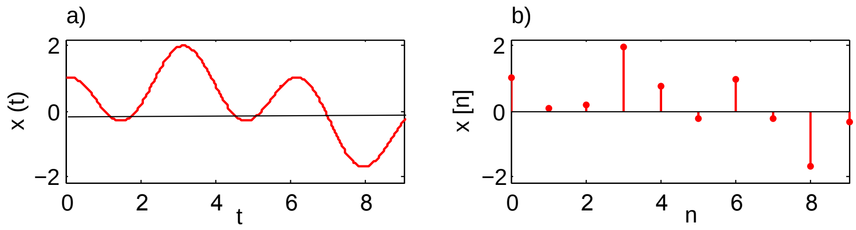
1-D signál je definovaný ako funkcia jednej nezávislej premennej. Reč je 1-D signálom s časom ako nezávislou premennou. M-D signál je funkciou dvoch a viac nezávislých premenných. Príkladom 2-D signálu je fotografia. Čiernobiely videosignál je 3-D signálom s časom a dvoma priestorovými súradnicami ako nezávislými premennými. Farebný videosignál je trojkanálovým signálom. Skladá sa z troch 3-D signálov, ktoré reprezentujú 3 základné farby RGB: červenú, zelenú a modrú. Príkladom multikanálového signálu je aj EEG (elektroencefalogram) signál [1]. Jeho časový priebeh vidíme na Obr. 7.



**Obr. 7:** Časový priebeh signálu - reálny EEG. Zdroj:[5]

Jedná sa o biomedicínsky signál, ktorý je veľmi užitočný pri diagnostikovaní poranení mozgu alebo mentálnych ochorení. 19 elektród sa pripevní spredu dozadu na pokožku hlavy a zaznamenáva rozdiely elektrického potenciálu. Tie vznikajú vzájomným pôsobením neurónov v rôznych častiach mozgu. Mozog, jeden zdroj signálu, generuje 19 rôznych signálov. Všetky signály sú funkciou tej istej nezávislej premennej a sú popísané v časovej doméne.

Pre jednorozmerný signál je nezávislou premennou obvykle čas. Nezávislá premenná môže byť diskrétna alebo spojitá [13]. Ak je diskrétna, signál nazveme diskrétnym v čase. V tomto prípade je nezávislá premenná zvyčajne označená $n$. Naopak, ak je spojitá, potom hovoríme o signále spojitom v čase, ten je definovaný v každom okamihu v čase a nezávislú premennu zvyčajne označujeme $t$. Napríklad $x[n]$ reprezentuje 1-D signál diskrétny v čase a $x(t)$ predstavuje 1-D signál spojitý v čase. Signál diskrétny v čase si môžeme predstaviť ako postupnosť čísel. Na Obr. 8 vidíme časový priebeh signálu spojitého v čase a signálu diskrétneho v čase.




**Obr. 8:** Časový priebeh signálu: a) signál spojitý v čase, b) signál diskrétny v čase.

### 1.3.2 Deterministické vs. stochastické signály

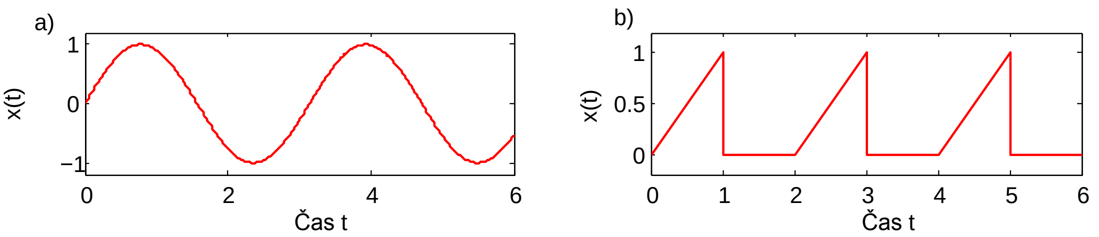
Signály môžeme ďalej rozdeliť na deterministické (nenáhodné) a stochastické (náhodné) [14]. Ich spoločnou vlastnosťou je, že oba tieto signály sú opísateľné funkciami času (nezávislej premennej). Pri deterministickom signále, ak poznáme matematický model, možno s určitosťou predpovedať jeho stav v ľubovoľnom čase. Pri stochastických signáloch toto nie je možné. Nenáhodné signály môžeme rozdeliť na:

- periodické signály;
- neperiodické signály.

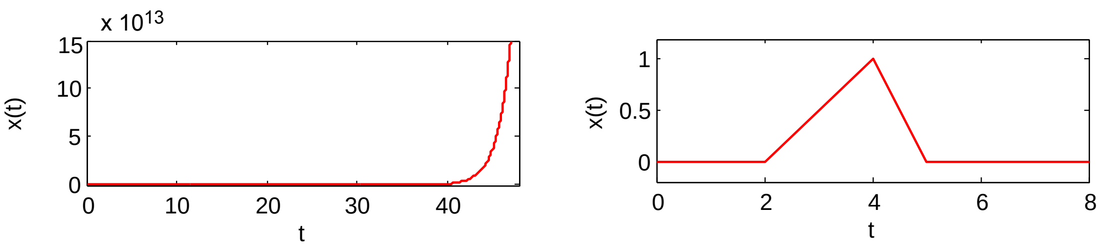
Ak matematický model signálu vyhovuje podmienke

$$x(t) = x(t + kT) \tag{1}$$

pre $t \in (-\infty, \infty)$, kde $k$ patrí do množiny celých čísel a $T$ je perióda signálu (kladná reálna konštanta), signál nazývame periodický. Periodický signál, ktorý môžeme opísať sínusovou funkciou, nazývame harmonický. Ak to nie je možné, daný periodický signál je neharmonický. Signál, ktorého matematický model nespĺňa podmienku (1), je neperiodický (aperiodický) signál. Na Obr. 9, 10 vidíme časové priebehy harmonického a neharmonického signálu a tiež 2 neperiodické signály.




**Obr. 9:** Príklady signálov: a) periodický harmonický signál, b) periodický neharmonický signál.




**Obr. 10:** Príklady neperiodických signálov.

Nenáhodné signály môžeme podľa [14] vzhľadom na vlastnosti ich pravdepodobnostných charakteristík (disperzia, autokorelačná funkcia a stredná hodnota) rozdeliť do 3 skupín:

- stacionárne;
- nestacionárne;
- ergodické.

Ak sa štatistické vlastnosti stochastických signálov nemenia s časom, hovoríme o stacionárnych signáloch [9]. Ich disperzia a stredná hodnota nie sú závislé na čase. Ak sú štatistické parametre získané z jedného úseku signálu rovnaké ako štatistické parametre z iných úsekov, hovoríme o ergodických signáloch. Ak sa štatistické vlastnosti náhodných signálov menia s časom, hovoríme o nestacionárnych signáloch.

## 1.4 Signály diskrétne v čase

Signál diskrétny v čase je vlastne postupnosť funkčných hodnôt. Hodnotu $x[k]$, kde $k \in \mathbb{Z}$, nazývame $k$-tý prvok postupnosti $x[n]$. Aj signály diskrétne v čase môžeme rozdeliť na náhodné a nenáhodné. My sa predovšetkým budeme venovať deterministickým signálom diskrétnym v čase. Z matematického hľadiska sa na signál pozeráme ako na funkciu nezávislej premennej, čiže signál diskrétny v čase je funkciou nezávislej celočíselnej premennej $n$. Signál diskrétny v čase môžeme vyjadriť rôznymi spôsobmi [14]:

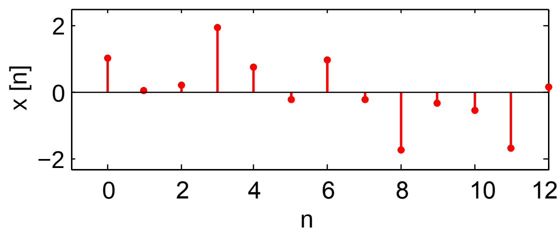
- pomocou postupnosti: $x[n] = \{1; 7; 3; 5; -2; 8\}$,
- pomocou funkcie:

$$x[n] = \begin{cases} 2 & \text{pre } n = 1; 3; 5, \\ 4 & \text{inak,} \end{cases}$$

- tabuľkou:

| n | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| x[n] | 5 | 4 | 2 | 8 |

- graficky:




**Obr. 11:** Grafické vyjadrenie diskrétneho signálu.

### 1.4.1 Základné operácie s diskrétnymi signálmi

So signálom $x[n]$ môžeme vykonať nasledovné operácie [10, 18]:

- zosilnenie (amplification) je známe tiež ako skalárne násobenie, kde každý člen postupnosti $x[n]$ je vynásobený kladnou reálnou konštantou $\xi$, pričom $\xi > 1$. Pokiaľ by kladná konštanta $\xi$ nebola väčšia ako 1, jedná sa o zoslabenie signálu (attenuation). Matematicky je daná operácia vyjadrená nasledovne:

$$y[n] = \xi x[n], n \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

- časové škálovanie signálu (time scaling) si môžeme predstaviť ako zmenu časovej mierky. Signál $x[n]$ sa škálovaním zmení na signál $y[n] = x[\mu n]$, kde $\mu$ je kladné reálne číslo rôzne od 1. Ak $\mu > 1$, hovoríme o časovej kompresii signálu, v opačnom prípade sa jedná o časovú expanziu signálu.

- posunutie (shifting) je operácia, ktorá signál $x[n]$ v čase $n$ zmení na $x[n - \tau]$, pričom $\tau$ je reálne číslo. Matematicky je daná operácia vyjadrená nasledovne:

$$y[n] = x[n - \tau], n \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Operácie možno vykonávať aj s viacerými signálmi naraz. Princíp si vysvetlíme na 2 postupnostiach vzoriek $x[n]$ a $y[n]$. S dvoma signálmi môžeme vykonávať nasledujúce operácie[18]:

- sčítanie 2 postupností vzoriek, kde výsledkom je nová postupnosť vzoriek $z[n]$:

$$z[n] = x[n] + y[n], n \in \mathbb{Z}; \tag{4}$$

- násobenie 2 postupností vzoriek, kde výsledkom je nová postupnosť vzoriek $z[n]$:

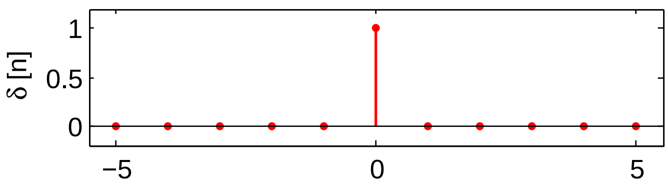
$$z[n] = x[n]y[n], n \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

### 1.4.2 Základné diskrétne signály

Medzi signály, ktoré predstavujú základný stavebný prvok teórie signálov, patria [14]:

- Jednotkový Kroneckerov impulz $\delta[n]$:

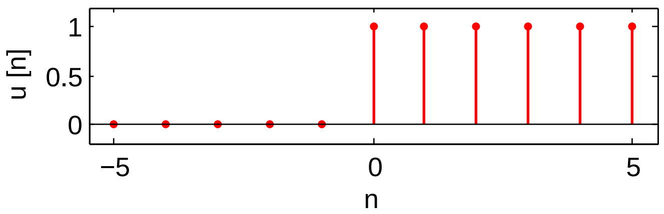
$$\delta[n] \equiv \begin{cases} 1 & \text{ak } n = 0, \\ 0 & \text{ak } n \neq 0, \end{cases}$$




**Obr. 12:** Jednotkový Kroneckerov impulz $\delta[n]$.

- Jednotkový diskrétny skok $u[n]$:

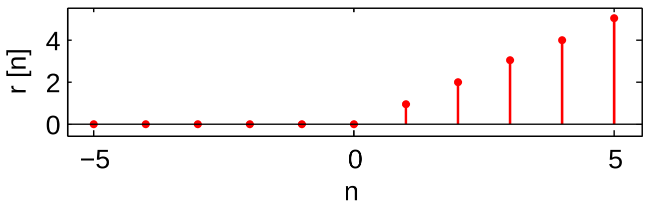
$$u[n] \equiv \begin{cases} 1 & \text{ak } n \geq 0, \\ 0 & \text{ak } n < 0, \end{cases}$$




**Obr. 13:** Jednotkový diskrétny skok $u[n]$.

- Diskrétna lineárna postupnosť $r[n]$:

$$r[n] \equiv \begin{cases} n & \text{ak } n \geq 0, \\ 0 & \text{ak } n < 0, \end{cases}$$




**Obr. 14:** Diskrétna lineárna postupnosť $r[n]$.

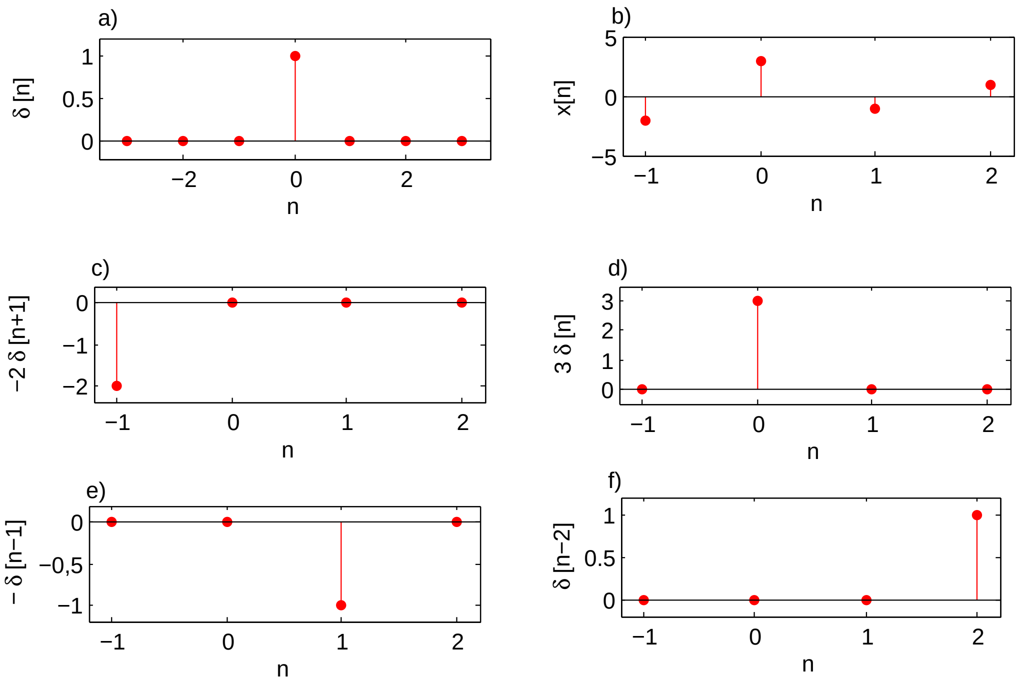
### 1.4.3 Použitie základných signálov

Postupnosť jednotkových Kroneckerových impulzov je užitočným nástrojom. Používa sa napríklad pri ideálnom vzorkovaní, kedy je analógový signál $x(t)$ prenásobený touto postupnosťou a výsledkom je signál diskrétny v čase. Problematike vzorkovania sa bližšie venujeme v podkapitole 3.2.1 o spracovaní signálov.

Jednotkový diskrétny skok sa používa na zápis kauzálnych postupností a diskrétna lineárna postupnosť pri aproximácii reálnych signálov.

Postupnosť vzoriek ľubovoľného signálu môže byť v časovej doméne reprezentovaná ako vážený súčet niektorých základných signálov spolu s ich posunutými verziami [19]. Napríklad postupnosť vzoriek $\{x[-1]{=}-2,\ x[0]{=}3,\ x[1]{=}-1,\ x[2]{=}1\}$ si môžeme pomocou jednotkového Kroneckerovho impulzu vyjadriť nasledovne:

$$x[n] = -2\delta[n+1] + 3\delta[n] - 1\delta[n-1] + \delta[n-2].$$

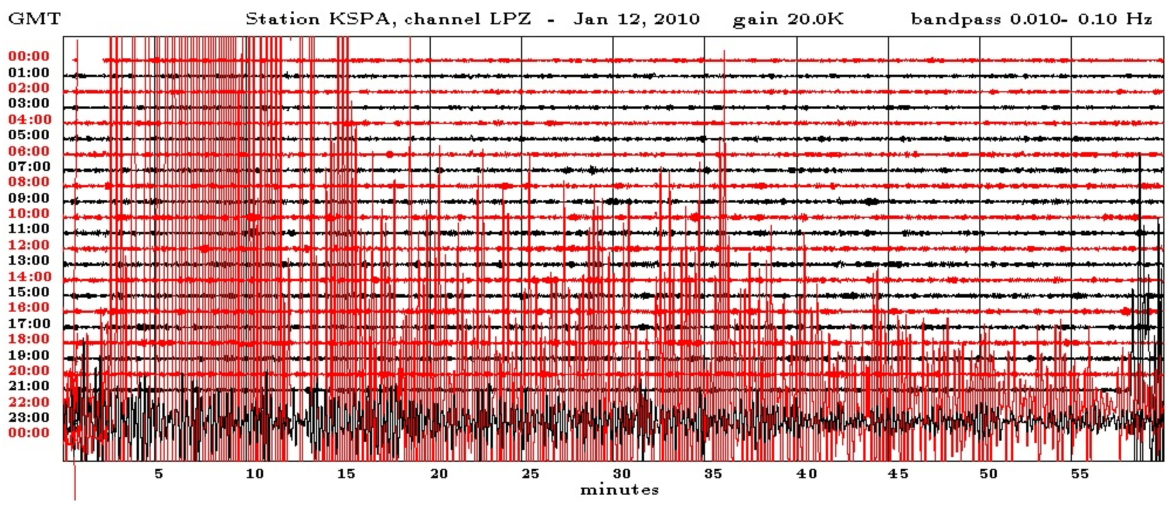



**Obr. 15:** a) jednotkový impulz $\delta[n]$, b) postupnosť vzoriek $x[n], n = -1, ..., 2$, c), d), e), f) vyjadrenie postupnosti vzoriek pomocou preškálovaného a posunutého jednotkového impulzu: c) $-2\delta[n+1]$, d) $3\delta[n]$, e) $-1\delta[n-1]$, f) $\delta[n-2]$.

Na Obr. 15 vidíme grafické znázornenie danej postupnosti vzoriek a tiež vyjadrenie jednotlivých členov postupnosti pomocou preškálovaného a posunutého jednotkového impulzu.

## 1.5 Reprezentácia signálov

Signály môžeme popisovať v časovej alebo frekvenčnej oblasti (doméne) [19]. Ak na reprezentáciu signálu použijeme jeho časový priebeh $x(t)$, jedná sa o opis signálu v časovej oblasti. Termín časová reprezentácia signálov používame aj keď nezávislou premennou nie je čas. Aj v časovej doméne môžeme analyzovať a spracovať signál, ale vo vedeckej oblasti na analýzu často nestačia nástroje, ktoré ponúka časová reprezentácia signálov. Príkladom, kedy popis signálu v časovej doméne nie je postačujúci, je analýza seizmogramu, pri ktorej sa snažíme rozlíšiť primárnu a sekundárnu vlnu, aby sme mohli predpovedať vývoj zemetrasenia. Na obrázku vidíme seizmogram zemetrasenia, ktoré sa udialo na Haiti v roku 2010.




**Obr. 16:** Seizmogram reálneho zemetrasenia [17]

Na túto analýzu sú potrebné zložitejšie nástroje a tie nám ponúka alternatívna reprezentácia signálu - reprezentácia vo frekvenčnej oblasti. V tomto prípade je nezávislou premennou frekvencia. Sínusoidálne signály sú v tejto doméne použité ako báza na opis signálu. Keď analyzujeme seizmogram vo frekvenčnej oblasti, už sme schopní rozlíšiť primárnu a sekundárnu vlnu. Pre viac informácií o analýze seizmogramu odporúčame čitateľa na [1].

# 2 Diskrétna Fourierova transformácia

Fourierova analýza má dlhú históriu [15]. Jej počiatky siahajú do prvej polovice 19. storočia a sú spojené s francúzskym matematikom Josephom Fourierom (1768-1830). Ten sa okrem iného venoval aj výskumu šírenia tepla. Matematický aparát, ktorý použil vo svojej práci zameranej na túto problematiku, dnes nazývame Fourierova transformácia. Tá ma široké použitie v spracovaní signálov. Signály sú väčšinou reprezentované v časovej doméne. Pomocou Fourierovej transformácie zmeníme doménu na frekvenčnú, pričom frekvenčnú reprezentáciu signálu nazývame spektrum. Nielen to, inverzná Fourierová transformácia nám umožní spätný prechod z frekvenčnej domény do časovej.

**Obr. 17:** Joseph Fourier. Zdroj: [6].

Reprezentácia signálov v časovej a vo frekvenčnej doméne sú dva odlišné spôsoby vyjadrenia vzťahu medzi signálmi a systémami. Zmenou domény signálu môžeme redukovať zložitosť jednotlivých operácií. Niekedy je reprezentácia signálu v jednej doméne efektívnejšia v porovnaní s druhou. V prípade seizmogramu bola výhodnejšia reprezentácia vo frekvenčnej oblasti. Na zmenu domény signálu slúžia transformačné metódy. Medzi ne patria napríklad Fourierova trasformácia, diskrétna Fourierova trasformácia a Fourierové rady. Jednotlivé transformačné metódy si vyberáme podľa toho, či sú signály analógové alebo diskrétne, periodické alebo neperiodické. V násedujúcich podkapitolách budú popísané jednotlivé transformačné metódy.

## 2.1 Fourierova transformácia

Ak funkcia nie je periodická, tak na získanie informácii o frekvencii sa používa Fourierova transformácia (Fourier Transform, ďalej len FT) [1]. Každá transformácia pozostáva z dvoch častí. Prvou je analýza - signál si rozložíme na základné zložky. Sú to zložky signálu, ktorých maximálna amlitúda a fáza obsahujú podstatné informácie o frekvenciách obsiahnutých v signále. Tieto zložky sú spojité funkcie frekvencie vyjadrené Fourierovou transformáciou $F(\omega)$ [12]:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt.$$

Druhou časťou transformácie je syntéza. Signál sme najprv použitím FT transformovali do frekvenčnej domény, vykonali sme nejaké operácie, získali sme informácie a teraz by sme chceli naspäť pôvodný signál. Na to slúži syntéza - rekonštrukcia pôvodného signálu. Použijeme matematický nástroj známy pod názvom inverzná Fourierova transformácia:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega,$$

ktorú keď aplikujeme na analógový signál vo frekvenčnej doméne, získame jeho reprezentáciu v časovej doméne - pôvodný signál v tvare, na aký sme zvyknutí.

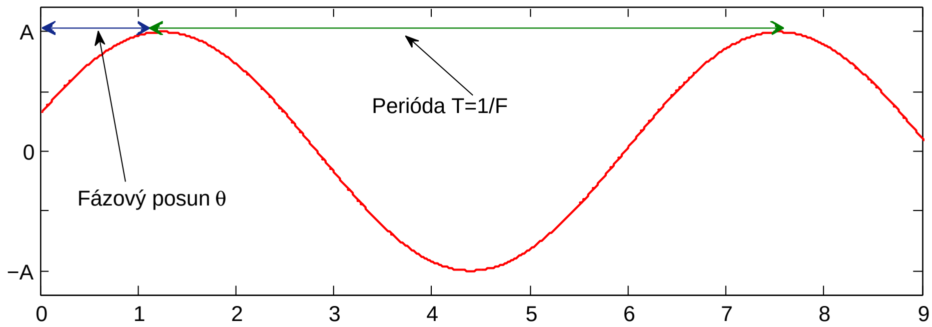
## 2.2 Fourierove rady

Každý periodický signál spojitý v čase môže byť vyjadrený ako lineárna kombinácia harmonických signálov. Už vieme, že periodický signál, ktorý môžeme opísať sínusovou funkciou, nazývame harmonický [13]. Matematické vyjadrenie tohto signálu je:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta), \quad -\infty < t < \infty;$$

Tento signál je úplne popísateľný pomocou troch parametrov:

- $A$ - maximálnou amplitúdou;
- $\omega$ - uhlovou frekvenciou s jednotkou $rad/s$ (radiány za sekundu), pričom platí, že $\omega = 2\pi F$, kde $F$ je frekvencia;
- $\theta$ - fázoveho posunu s jednotkou $rad$.

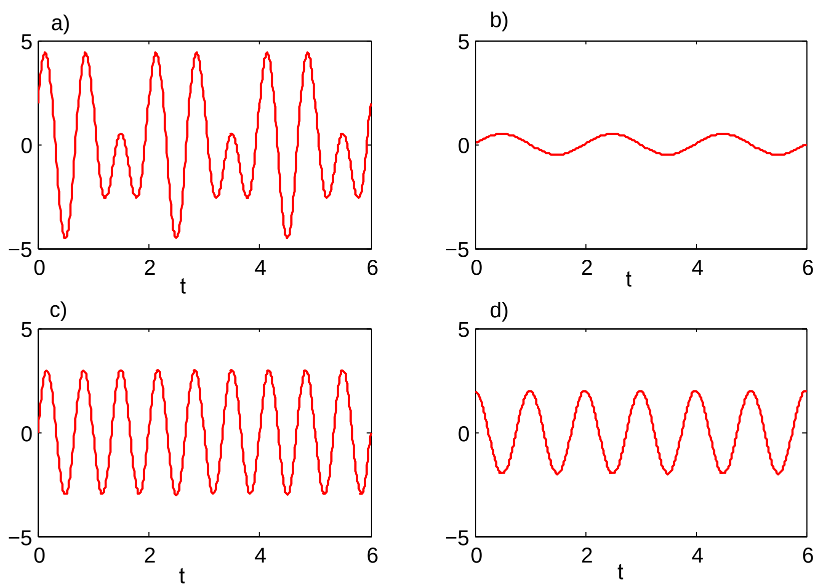



**Obr. 18:** Harmonický signál.

Na Obr. 18 vidíme vyznačenú amplitúdu $A$, fázový posun $\theta$ a periódu $T$. Príkladom periodického signálu je napríklad:

$$x(t) = 0.5 \sin(\pi t) + 3 \sin(3\pi t) + 2 \cos(2\pi t),$$

ktorý vznikol sčítaním troch harmonických signálov. Môžeme sa na to však pozrieť aj z druhej strany: máme k dispozícii periodický signál a ten vieme rozložiť na harmonické signály. Na Obr. 19 vidíme daný periodický signál spolu s jeho harmonickými zložkami.




**Obr. 19:** a) Periodický signál $x(t)$=$0.5 \sin(\pi t)$+$3 \sin(3\pi t)$+$2 \cos(2\pi t)$, b) $0.5 \sin(\pi t)$, c) $3 \sin(3\pi t)$, d) $2 \cos(2\pi t)$.

Reprezentácia periodickej funkcie ako lineárna kombinácia trigonometrických funkcií sa nazýva rozvoj funkcie do Fourierovho radu [8]. Nech funkcia $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$

je Riemanovsky integrovateľná. Pod pojmom Fourierov rad funkcie $f$ definovanej na intervale $[-l, l]$ rozumieme rad

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{(n\pi x)}{l} + b_n \sin\frac{(n\pi x)}{l}.$$

Daný funkcionálny rad sa skladá z trigonometrických polynómov $\cos\frac{(n\pi x)}{l}$ a $\sin\frac{(n\pi x)}{l}$ pre $n = 1, 2, ....$ Fourierove koeficienty pre tento trigonometrický tvar vypočítame nasledove:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{(n\pi x)}{l}dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{(n\pi x)}{l}dx.$$

Fourierova transformácia a Fourierove rady slúžia na transformáciu analógových signálov.

## 2.3 Komplexná exponenciála diskrétna v čase

Základným stavebným prvkom diskrétnej Fourierovej analýzy je komplexná exponenciála diskrétna v čase. Používame ju vo vyjadrení predpisu diskrétnych Fourierovych radov a diskrétnej Fourierovej transformácie. Komplexná exponenciála diskrétna v čase je postupnosť $e[n]$ tvaru [15]:

$$e[n] = Ae^{j(\omega_0 n+\phi)} = A[cos(\omega_0 n + \phi) + jsin(\omega_0 n + \phi)] \tag{6}$$

kde $A \in \mathbb{R}$ je maximálna amplitúda, $\phi$ je fázový posun a $\omega_0$ je frekvencia. Časový priebeh komplexnej exponenciály má oscilačný charakter.

## 2.4 Diskrétne Fourierove rady

Niekedy máme k dispozícii periodický signál, ktorý nie je spojitý, ale diskrétny v čase [2]. Matematický model periodického signálu diskrétneho v čase, čiže periodickej postupnosti $\tilde{x}[n]$, spĺňa predpis $\tilde{x}[n] = \tilde{x}[n + rN]$ pre ľubovoľné $n, r \in \mathbb{Z}$. Označenie $\tilde{x}$ používame na odlíšenie periodickej postupnosti od neperiodickej. Aj periodické postupnosti môžu byť vyjadrené pomocou diskrétnych Fourierovych radov (Discrete Fourier Series, ďalej len DFS) v tvare sumy komplexných exponeciálnych postupností, ktorých frekvencie sú harmonicky združené. Najmenšia možná perióda sa nazýva fundamentálna (základná) perióda. Fundamentálnej perióde prináleží fundamentálna frekvencia $\omega_0 = 2\pi/N$. Celočíselné násobky fundamentálnej frekvencie nazývame harmonicky združené frekvencie. Periodická komplexná exponenciála má tvar:

$$e_k[n] = e^{j(2\pi/N)kn} = e_k[n + rN], \tag{7}$$

kde $k \in \mathbb{Z}$ a príslušné Fourierove rady majú tvar:

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j(2\pi/N)kn}. \tag{8}$$

Fourierove koeficienty daného radu získame vzťahom:

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)kn}. \tag{9}$$

Pre zjednodušenie sú jednotlivé diskrétne komplexné exponenciály vyjadrené nasledovne:

$$W_N = e^{-j(2\pi/N)}. \tag{10}$$

Použitím tohto značenia si môžeme DFS vyjadriť pomocou vzťahov:

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{kn}, \tag{11}$$

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-kn}. \tag{12}$$

DFS sú pre nás dôležité najmä v spojitosti s diskrétnou Fourierovou transformáciou.

## 2.5 Diskrétna Fourierova transformácia

Najdôležitejšou diskrétnou transformáciou Fourierovej analýzy je diskrétna Fourierova transformácia (Discrete Fourier Transform, ďalej len DFT) aj vďaka jej širokému uplatneniu v rôznych aplikáciach, najmä v digitálnom spracovaní signálov [2]. DFT používame na Fourierovu reprezentáciu postupností konečnej dĺžky, ktoré môžu, ale nemusia byť periodické.

Z každej postupnosti $x[n]$ konečnej dĺžky môžeme vytvoriť periodickú postupnosť $\tilde{x}[n]$:

$$\tilde{x}[n] = \sum_r x[n - Nr], r \in \mathbb{Z}. \tag{13}$$

V tabuľke 1 sa je vyjadrená postupnosť dĺžky $N$=4:

| x[0] | x[1] | x[2] | x[3] |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 3 |

**Tabuľka 1:** Postupnosti $x[n]$ konečnej dĺžky.

V tabuľke 2 je zachytený proces vytvárania periodickej postupnosti z danej postupnosti konečnej dĺžky:

| ... | x[-4] | x[-3] | x[-2] | x[-1] | x[0] | x[1] | x[2] | x[3] | x[5] | x[6] | x[7] | x[8] | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 3 | ... |

**Tabuľka 2:** Periodická postupnosti $\tilde{x}[n]$.

A naopak, z každej periodickej postupnosti môžeme spätne získať postupnosť konečnej dĺžky $N$:

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n] & \text{ak } 0 \leq n \leq N-1, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Postupnosť konečnej dĺžky môžeme napríklad získať tak, že z periodickej postupnosti si „vezmeme“ len jednu jej periódu. Tieto dva vzťahy sú veľmi dôležité. Použijeme ich na odvodenie DFT pre postupnosti konečnej dĺžky zo vzťahov DFS pre periodickú postupnosť. Aj postupnosť $\tilde{X}[k]$ koeficientov DFS je periodická s periódou $N$ a koeficienty

$X[k]$ DFT sú vo vzťahu s koeficientami $\tilde{X}[k]$ DFS [2]:

$$X[k] = \begin{cases} \tilde{X}[k] & \text{ak } 0 \le k \le N-1, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Vzťah medzi $\tilde{X}[k]$ a $\tilde{x}[n]$ poznáme z predošlej podkapitoly o DFS:

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{kn},$$

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-kn},$$

a tieto vzťahy aplikujeme len na jednu periódu, čím získame DFT a IDFT pre postupnosť konečnej dĺžky:

$$X[k] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} & \text{ak } 0 \le k \le N-1, \\ 0 & \text{inak,} \end{cases}$$

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn} & \text{ak } 0 \le n \le N-1, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Toto je však zjednodušený zápis, kde $W_N$:

$$W_N = e^{-j(2\pi/N)}. \tag{14}$$

Potom DFT je matematicky vyjadrená ako:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-n2\pi jk/N}$$

a inverzná diskrétna Fourierova transformácia (IDFT) je definovaná ako:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[k] e^{n2\pi jk/N},$$

kde $N$ je počet vzoriek diskrétneho signálu.

## 2.6 Výpočet diskrétnej Fourierovej transformácie

Na príklade si ilustrujeme výpočet DFT postupnosti konečnej dĺžky. Uvažujme postupnosť $x[n]$ s dĺžkou $N = 4$:

$$x[n] = \begin{cases} 3 & \text{ak } n = 0, \\ 1 & \text{ak } n = 1, \\ 2 & \text{ak } n = 2, \\ -1 & \text{ak } n = 3. \end{cases}$$

Jej DFT je daná predpisom:

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-n2\pi jk/N} = \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-n2\pi jk/4} \\ &= 3 + e^{-jk\pi/2} + 2e^{-jk\pi} - e^{-jk3\pi/2}, \end{aligned}$$

teraz dosadíme $k = 0, 1, 2, 3$ a vypočítame DTF v každom bode postupnosti:

$k = 0 \qquad X[0] = 3 + 1 + 2 - 1 = 5;$

$k = 1 \qquad X[1] = 3 + e^{-j\pi/2} + 2e^{-j\pi} - e^{-j3\pi/2} = 3 - j - 2 - j = 1 - 2i;$

$k = 2 \qquad X[2] = 3 + e^{-j\pi} + 2e^{-j2\pi} - e^{-j3\pi} = 3 + 1 + 2 - 1 = 5;$

$k = 3 \qquad X[3] = 3 + e^{-j3\pi/2} + 2e^{-j3\pi} - e^{-j9\pi/2} = 3 + j - 2 + j = 1 + 2j;$

Koeficientmi DFT pre danú postupnosť sú:

$$X[k] = \begin{cases} 5 & \text{ak } k = 0, \\ 1 - 2j & \text{ak } k = 1, \\ 5 & \text{ak } k = 2, \\ 1 + 2j & \text{ak } k = 3. \end{cases}$$

Teraz skúsime na výsledok aplikovať IDFT a overiť si platnosť vzťahov:

$$X[k] = \begin{cases} 5 & \text{ak } k = 0, \\ 1 - 2j & \text{ak } k = 1, \\ 5 & \text{ak } k = 2, \\ 1 + 2j & \text{ak } k = 3. \end{cases}$$

IDFT je daná predpisom:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[k] e^{n2\pi jk/N} = 1/4 \sum_{n=0}^{3} X[k] e^{n2\pi jk/4} =$$

$$1/4(5 + (1 - 2j)e^{jn\pi/2} + 5e^{jn\pi} + (1 + 2i)e^{jn3\pi/2})$$

teraz dosadíme $n = 0, 1, 2, 3$ a vypočítame DTF v každom bode postupnosti:

$$\begin{aligned}
n = 0 \qquad x[0] &= \frac{1}{4}(5+1-2j+5+1+2j) = \frac{1}{4}12 = 3;\\
n = 1 \qquad x[1] &= \frac{1}{4}(5+(1-2j)e^{j\pi/2}+5e^{j\pi}+(1+2j)e^{j3\pi/2}) =\\
&= \frac{1}{4}(5+j+2-5-j+2) = \frac{1}{4}4 = 1;\\
n = 2 \qquad x[2] &= \frac{1}{4}(5+(1-2j)e^{j\pi}+5e^{j2\pi}+(1+2j)e^{j3\pi}) =\\
&= \frac{1}{4}(5-1+2j+5-1-2j) = \frac{1}{4}8 = 2;\\
n = 3 \qquad x[3] &= \frac{1}{4}(5+(1-2j)e^{j3\pi/2}+5e^{j3\pi}+(1+2j)e^{j9\pi/2}) =\\
&= \frac{1}{4}(5-j-2-5+j-2) = \frac{1}{4}(-4) = -1;
\end{aligned}$$

Vidíme, že spätnou transformáciou sme získali pôvodnú posupnosť vzoriek v časovej doméne:

$$x[n] = \begin{cases} 3 & \text{ak } n = 0,\\ 1 & \text{ak } n = 1,\\ 2 & \text{ak } n = 2,\\ -1 & \text{ak } n = 3. \end{cases}$$

Overili sme si platnosť vzťahov:

$$x[n] = \begin{cases} 3 & \text{ak } n = 0,\\ 1 & \text{ak } n = 1,\\ 2 & \text{ak } n = 2,\\ -1 & \text{ak } n = 3. \end{cases} \qquad \underset{\text{IDFT}}{\overset{\text{DFT}}{\rightleftarrows}} \qquad X[k] = \begin{cases} 5 & \text{ak } k = 0,\\ 1-2j & \text{ak } k = 1,\\ 5 & \text{ak } k = 2,\\ 1+2j & \text{ak } k = 3. \end{cases}$$

Symbolmi $\xrightarrow{DFT}$ a $\xrightarrow{IDFT}$ označujeme priebeh jednotlivých tramsformácií.

## 2.7 Vlastnosti diskrétnej Fourierovej transformácie

Medzi základné vlastnosti DFT patrí [2, 19]:

- linearita: uvažujme postupnosť $x_3[n]$, ktorá je lineárnou kombináciou dvoch postupností $x_1[n]$ a $x_2[n]$ konečnej dĺžky, teda:

$$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$$

  pre nejaké $a, b \in \mathbb{R}$. Potom ak $X_1[k]$, $X_2[k]$ a $X_3[k]$ sú príslušné koeficienty DFT pre dané postupnosti, tak aj postupnosť $X_3[k]$ je lineárnou kombináciou postupností $X_1[k]$ a $X_2[k]$:

$$X_3[k] = aX_1[k] + bX_2[k].$$

- časové posunutie: ak $x[n] \xrightarrow{DFT} X[k]$, tak pre $N$-bodovú DFT a ľubovoľné $n_0 \in \mathbb{Z}$ $x[n - n_0] \xrightarrow{DFT} X[k]e^{-j2\pi n_0 k/N}$.

  Pre ich bližší popis odporúčame čitateľa na [2, 19].

## 2.8 Rýchla Fourierova transformácia

DFT slúži na výpočet spektra signálu $x[n]$ diskrétneho v čase a konečnej dĺžky [14]. Aj keď je najdôležitejším nástrojom diskrétnej Fourierovej analýzy, má podstatnú nevýhodu. Tou je zdĺhavosť výpočtu spektra. Ak máme k dispozícii 8-bodovú postupnosť, jej DFT si vyžaduje až 64 komplexných násobení a 56 komplexných sčítaní. Vo všeobecnosti, ak je dĺžka postupnosti $N$, tak na výpočet DFT potrebujeme až $N^2$ násobení a $N(N-1)$ sčítaní. Pre diskrétny signál, ktorý je tvorený 1024 zložkami, je na výpočet DFT potrebných približne jeden milión operácií. Zásadným zlomom, ktorý znížil náročnosť výpočtu DFT, bolo objavenie algoritmu rýchlej Fourierovej transformácie (Fast Fourier Transform, ďalej len FFT). V súčasnosti existuje celý rad modifikácií FFT algoritmu. V praxi sa najčastejšie používa FFT algoritmus pre signál s dĺžkou $N$, kde $N$ je celočíselnou mocninou 2, teda $N = 2^k, k \in \mathbb{Z}$. Pre $N$=1024 je na výpočet DFT použitím FFT algoritmu potrebných okolo 10 240 matematických operácií. To je takmer 100-krát menej ako použitím klasického výpočtu DFT.

Hlavná myšlienka FFT algoritmu je založená na tom, že postupnosť vzoriek sa rozdelí na dve časti a ku každej z nich určíme DFT. Pre každú časť postupnosti vzoriek potrebujeme $(N/2)^2$ súčinov. Spolu pre obe časti teda potrebujeme $N^2/2$ súčinov, čo je polovica počtu súčinov v porovnaní s klasickým výpočtom DFT. Tento postup niekoľkokrát opakujeme.

Existujú dva spôsoby, ako rozdelíme postupnosť vzoriek na dve časti:

- postupnosť $x[n]$ môžeme rozdeliť na párnu a nepárnu časť (podľa indexu). Algoritmus, ktorého rozklad na dve časti je založený na danom princípe, nazývame FFT algoritmus decimácie v čase.
- ak postupnosť $x[n]$ rozdelíme na dve postupnosti $x_1[n]$ a $x_2[n]$, kde $x_1[n]$ sa skladá z prvých $N/2$ členov postupnosti $x[n]$ a $x_2[n]$ sa skladá zo zvyšných členov, potom daný algoritmus nazývame FFT algoritmus decimácie vo frekvencii.

Aj vďaka FFT algoritmu sa DFT stala významným nástrojom na spracovanie digitálnych signálov. V tejto kapitole sme sa dozvedeli základné princípy jednotlivých transformácií. Zmena reprezentácie signálov je veľmi dôležitá pre ďalšie spracovanie signálov, a preto transformácie, no najmä DFT, sú významnou súčasťou spracovania signálov.

# 3 Spracovanie signálov

Spracovanie signálov (signal processing, ďalej len SP) má bohatú históriu [2]. Komunikačné systémy, medicína, či technológie slúžiace na skúmanie vesmíru predstavujú len časť oblastí, v ktorých sa využíva SP. Ich rozmanitosť však naznačuje široké spektrum použitia SP. Dômyselné algoritmy SP a hardvéry sú rozšírené do všetkých oblastí nášho života, od špecializovanej armádnej techniky až po domácu elektroniku. V systémoch SP sa spája teória s technológiou a aplikáciami. SP tvoria 3 základné zložky: reprezentácia signálu, transformácia signálu a manipulácia so signálom a informáciou, ktorú obsahuje. Reprezentácii a transformáciam sme sa venovali v predošlých kapitolách. Táto kapitola sa bude venovať manipulácii so signálom a informáciou, ktorú obsahuje. Tie informácie, ktoré sú pre nás podstatné, chceme zo signálu získať, analyzovať alebo ich zintenzívniť. Na to, aby sme tieto operácie s informáciami mohli vykonať, musíme signály spracovať. Signály môžu byť spracované analógovo alebo digitálne.

Medzi operácie, ktoré vykonávame so signálom, patria napríklad filtrovanie a modulácia [13]. Filtrovanie je jednou z najpoužívanejších operácii SP. V tomto prípade je systémom filter. Ten spracuje len komponenty signálu s určitou frekvenciou, ostatné zablokuje. Na prenos signálov na veľké vzdialenosti sú použité napríklad optické vlákna alebo atmosféra. Podstatou modulácie je zmena nízkofrekvenčného signálu na vysokofrekvenčný signál. Ten je vhodnejší na prenos. Nástroj, ktorý vykoná moduláciu, nazývame modulátor. Po prenose signálu je v demodulátore vysokofrekvenčný signál zmenený na pôvodný nízkofrekvenčný.

## 3.1 Analógové spracovanie signálov

Väčšina signálov, ktoré sú generované prírodnymi zdrojmi, sú analógové signály [7, 14]. Sú to teda signály spojité v čase a ich amplitúda nadobúda ľubovoľnú hodnotu. Použitím vhodného analógového systému ich môžeme priamo spracovať. Analógové spracovanie signálov (ďalej len ASP) je založené napríklad na zosilňovačoch a umožňuje napríklad filtráciu, zosilnenie alebo nelineárne spracovanie signálov ako napríklad násobenie a detekciu.


**Obr. 20:** Schéma analógového spracovania signálov.

Ako vidíme na Obr. 20, vstupný analógový signál je v procesore spracovaný, napr. zosilnený, a výstupom je opäť analógový signál. Takto funguje analógové spracovanie signálov. Využívajú ho aj rádiové prijímače, hoci v súčasnosti už existuje aj digitálne rozhlasové vysielanie. ASP sa bližšie venujú knihy [1, 14].

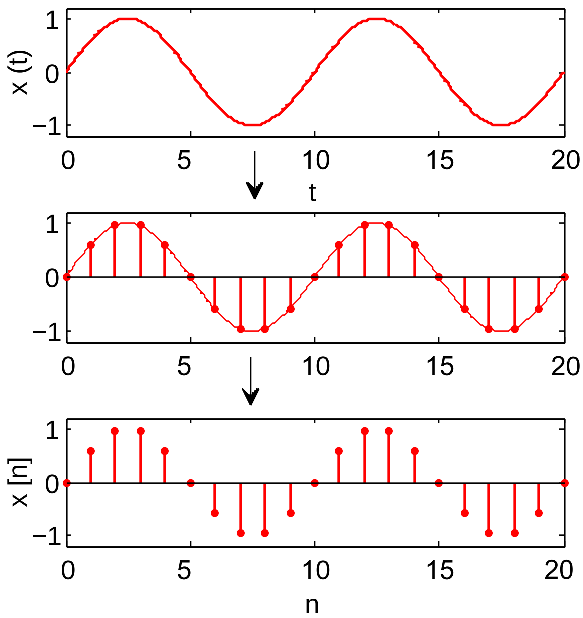
## 3.2 Digitalizácia analógového signálu

Alternatívnou metódou k ASP je digitálne spracovanie signálov [14]. Ak chceme analógový signál spracovať digitálne, musíme ho najprv transformovať do digitálnej podoby. Tento proces nazývame analógovo-digitálny prevod (konverzia) a zariadenie, ktoré nám ho umožní vykonať, sa nazýva A/D-konvertor. Schému digitalizácie analógového signálu vidíme na Obr. 21.


**Obr. 21:** Schéma digitalizácie analógového signálu.

### 3.2.1 Vzorkovanie signálu

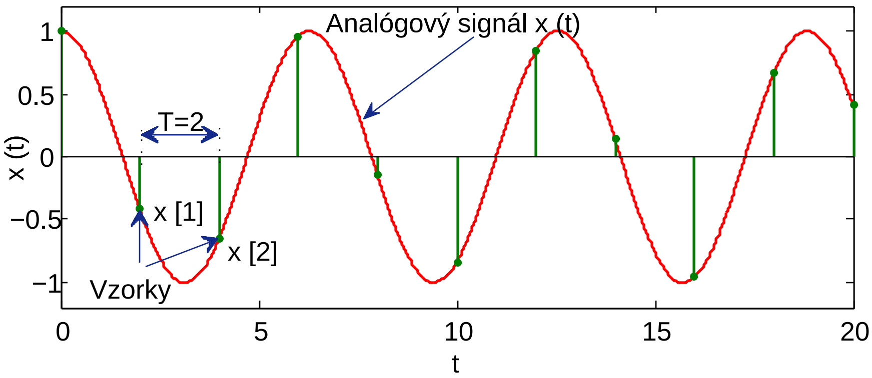
Podstatou vzorkovania je, že z analógového signálu získame diskrétne vzorky, ktoré ho budú reprezentovať počas ďalšieho spracovania [3]. Schému priebehu vzorkovania analógového signálu vidíme na Obr. 22.




**Obr. 22:** Schéma vzorkovania analógového signálu.

Je nevyhnutné, aby takto získaná postupnosť vzoriek obsahovala informáciu, ktorá je uložená v pôvodnom analógovom signále $x(t)$. Ak totiž signál nie je navzorkovaný správne, tak pomocou získaných vzoriek nedokážeme spätne rekonštruovať pôvodný analógový signál. Pri vzorkovaní každých $T$ sekúnd vezmeme z analógového signálu $x(t)$ vzorku a dostaneme $x[n]$. Interval medzi jednotlivými vzorkami $T$ nazývame perióda vzorkovania. Vzorkovacia frekvencia $F_s$ je inverzným prvkom k perióde vzorkovania, teda $F_s = 1/T$. Vstupným signálom do vzorkovača je signál $x(t)$ spojitý v čase a výstupom zo vzorkovača je signál $x[n]$ diskrétny v čase, kde

$$x[n]=x(nT) \qquad \text{pre} \qquad -\infty<n<\infty.$$

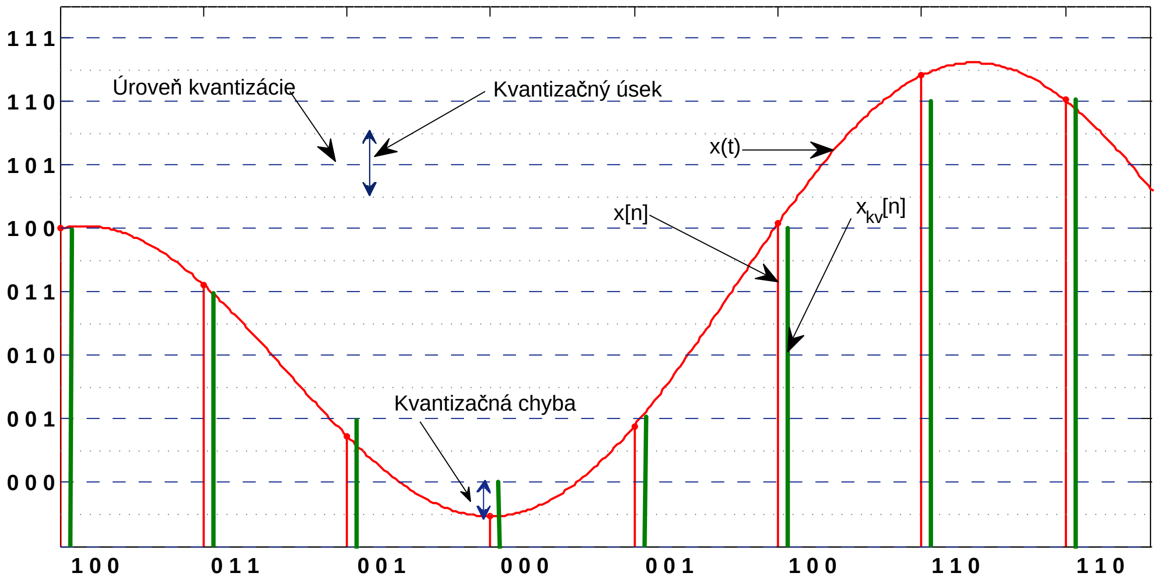



**Obr. 23:** Vzorkovanie.

Na Obr. 23 môžeme vidieť ďalšiu schému vzorkovania analógového signálu spolu s vyznačenou periódou vzorkovania. Ako si určíme periódu vzorkovania alebo odvodíme vzorkovaciu metódu? Jednou z možností je použiť periodickú postupnosť jednotkových impulzov a tou vynásobiť signál spojitý v čase. Takáto metóda vzorkovania sa nazýva ideálne vzorkovanie [14]. Použitá postupnosť jednotkových impulzov sa nazýva vzorkovacia funkcia. Ak chceme signál navzorkovať správne, čiže tak, aby sme neskôr mohli zrekonštruovať pôvodný signál, musíme dodržať vzorkovaciu teorému. Tá stanovuje minimálnu frekvenciu vzorkovania $f_s$ pre daný signál pomocou najvyššej frekvencie $f_m$, ktorá je obsiahnutá v signáli, pričom medzi nimi platí vzťah $f_s = 2f_m$. Vzorkovacia teoréma je známa pod názvom Shannonova-Koteľnikova, Niquitishova alebo aj Whittakerova teoréma. Jej odvodenie a dôkaz sa nachádzajú v prácach [7, 14]. Pre frekvenciu vzorkovania platí, že čím je vyšia, tým máme k dispozícii lepšie informácie potrebné na spätnú rekonštrukciu signálu.

### 3.2.2 Kvantovanie a kódovanie signálu

Vzorkovaním pôvodného analógového signálu sme získali postupnosť diskrétnych vzoriek [3]. Amplitúdy jednotlivých vzoriek signálu môžu nadobúdať nekonečný počet možných hodnôt. Kvantovaním signálu dostaneme konečný počet hodnôt z vopred určenej kvantizačnej „mriežky“, ktoré môže signál nadobudnúť. V A/D prevodníku sú hodnoty amplitúd signálu kvantovaním prevedené na niektorú z úrovní kvantizácie.

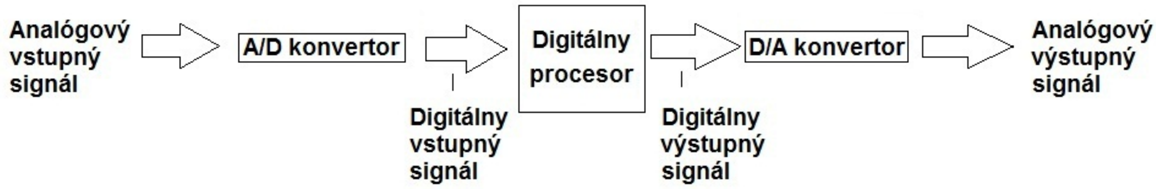



**Obr. 24:** Kvantovanie a kódovanie postupnosti vzoriek.

Na Obr. 24 vidíme, ako prebieha kvantovanie Je tu tiež vyznačená úroveň kvantizácie, kvantizačný úsek a kvantizačná chyba. Každej kvantizačnej úrovni prináleží kvantizačný úsek. Ten predstavuje pás, ktorého stred je kvantizačná úroveň. Každej hodnote vzorky, ktorá leží v danom kvantizačnom úseku, je priradená daná hodnota kvantizačnej úrovne. Vidíme, že kvantovaním vzniká kvantizačná chyba, ktorej sa už nezbavíme, preto ani po rekonštrukcii signálu nezískame signál rovnaký ako bol vstupný. Postupnosť vzoriek $x_{kv}[n], n \in \mathbb{Z}$, ktorá takto vznikne, nadobúda už len konečný počet hodnôt. Toto je podstata kvantovania. Počet kvantizačných úrovní je určený počtom bitov prevodníku. Aj na Obr. 24 vidíme, že každá kvantizačná úroveň je určená binárnou reprezentáciou bitov prevodníku. Každej kvantovanej vzorke $x_{kv}[n]$ je v procese kódovania priradený binárny kód v závislosti od kvantizačnej úrovne. Toto je podstata kódovania. Až signál v takejto podobe môžeme digitálne spracovať. Podľa nastavenia kvantizačných hladín rozdeľujeme kvantovanie na lineáne a nelineárne. Pri lineárnom kvantovaní sú kvantizačné úseky, na ktoré je rozdelená os amplitúd, rovnako veľké. Tento typ kvantovania sa používa častejšie. Nelineárne kvantovanie používame, ak chceme v nejakej oblasti signálu vyššiu kvantovaciu presnosť ako pre zvyšok signálu. Vstupný analógový signál je po procese vzorkovania, kvantovania a kódovania vyjadnerý v číslicovom tvare.

## 3.3 Digitálne spracovanie signálov

Pôvodný analógový signál po jeho digitalizácii už môžeme spracovať digitálne. Základom digitálneho spracovania signálov je reprezentácia signálov pomocou dát (čísel) v špeciálom hardvéri alebo počítači a realizácia operácií s danými signálmi [14]. Tieto operácie zahŕňajú prenos dát, sčítanie a násobenie.




**Obr. 25:** Schéma digitálneho spracovania signálov

Na Obr. 25 vidíme schému digitálneho spracovania signálov. Vstupný digitálny signál je v procesore spracovaný a výstupom je opäť digitálny signál.

## 3.4 Digitálno-analógový prevod

Po spracovaní digitálneho signálu môže byť v našom záujme ho konvertovať späť na analógový signál. Ak bola pôvodným signálom napríklad reč a tú sme si už digitálne spracovali, potrebujeme ju spätne konvertovať, lebo nie sme schopní počúvať jej digitálnu podobu - binárny kód. Na konverziu digitálneho signálu na analógový sa používa interpolácia. Je to pomerne zložitý proces. Ako funguje? Danou postupnosťou hodnôt preložíme interpolačné funkcie, ktorých predpis nájdeme v [7]. Ich pomocou rekonštruujeme pôvodný analógový signál.

## 3.5 Porovnanie analógového a digitálneho spracovania signálov

Medzi analógovým a digitálnym svetom vládne sofistikovaná súhra. Príkladom tejto súhry sú komunikačné systémy. Možno si ani neuvedomujeme, že napríklad na vykonanie telefónneho hovoru používame aj analógové spracovanie signálov aj digitálne spracovanie signálov. Oba typy spracovania sú dôležité a tiež úzko prepojené. V posledných rokoch sa však do popredia dostáva hlavne digitálne spracovanie signálov. Teraz uvedieme niektoré výhody a nevýhody týchto typov spracovania signálov.

Analógové spracovanie signálov (Analog signal processing, ďalej len ASP) má nasledovné nevýhody [14]:

- ASP má obmedzenú reprodukovateľnosť. Tá je spôsobená zmenami v podmienkach prostredia.
- Rýchlosť spracovania je tiež obmedzená.
- ASP je nedostatočne flexibilné na možnosť zmien funkcií.
- ASP je citlivé na elektrický šum.
- Dynamický rozsah napätí je tiež obmedzený.

ASP má veľa nevýhod, ale podstatnou výhodou je, že pri spracovaní sa nestráca informácia. Analógové filtre tiež partia medzi významné nástroje spracovania signálov.

Digitálne spracovanie signálov (Digital signal processing, ďalej len DSP) má tieto nevýhody [14]:

- DSP v niektorých aplikáciach nedosahuje potrebnú rýchlosť.
- Ak požadujeme vysokú rýchlosť prevodu a presnosť, sú A/D a D/A konvertory pomerne nákladné.
- Digitalizácia signálu vedie k strate informácií spôsobenej vzorkovaním a kvantovaním. Túto stratu je možné minimalizovať použitím vhodného vzorkovania, ale úplne odstrániť sa nedá.
- Cena hardvéru sa každým rokom mierne klesá, je to spojené s vývojom technológie, ale cena softvéru neklesá.

V porovnaní s analógovým spracovaním signálov DSP nemá niektoré obmedzenia [14]:

- Počítače teoreticky môžu pracovať akoukoľvek požadovanou presnosťou.
- DSP sa vyznačuje tiež výbornou reprodukovateľnosťou.
- Z bezpečnostného hľadiska môžu byť digitálne informácie zašifrované (kryptológia) alebo môžu byť kódované proti chybám.
- Ak by sme chceli vykonať vo funkciách spracovania zmenu, dá sa to urobiť relatívne jednoducho v priebehu programovania.
- Digitálne signály majú nižšiu náchylnosť na degradáciu šumom.
- Aj pri DSP je rýchlosť obmedzujúcim faktorom, no technologický pokrok toto obmedzenie postupne znižuje.

## 3.6 Aplikácie digitálneho spracovania signálov

Digitálne spracovanie signálov má množstvo aplikácií v teórii, ale aj v praxi [14]:

- DSP sa používa pri všeobecnej analýze signálu, na odhad spektra, klasifikáciu a modelovanie signálu.
- Automatický pilot je príkladom použitia DSP v digitálnom riadení.
- Významnou oblasťou použitia DSP sú biomedicínske aplikácie. EKG a EEG spolu s ich významom pri diagnostike boli spomenuté už skôr, no DSP má svoje miesto aj pri ďalšej diagnostike, monitorovaní pacienta a preventívnej zdravotnej starostlivosti.
- V oblasti komunikácií sa DSP používa na kódovanie a dekódovanie komunikačných digitálnych signálov, filtráciu a tiež prenos informácií v digitálnej podobe telefónnymi linkami.
- DSP je použité aj v multimédiách, napríklad na prenos, generovanie a uchovanie zvuku, filmu, obrazu a digitálnej TV.
- Pri spracovaní obrazov sa DSP používa na filtráciu, rozpoznávanie, kódovanie a prenos obrazov.
- Syntéza digitálnej hudby, záznam a playback predstavujú aplikácie DSP v hudbe.
- DSP sa tiež využíva na filtráciu šumu, kódovanie, syntézu a identifikáciu umelej reči v prípade aplikácie v reči.
- Ďalším významným použitím DSP sú radary a s nimi spojená filtrácia radarového signálu, odhad rýchlosti a miesta, sledovanie a detekovanie cieľa.

Mohli by sme ešte dlho pokračovať. Pri pohľade na už vymenované aplikácie DSP vidíme, že tento typ spracovania signálov je už neoddeliteľnou súčasťou moderného sveta a že nám dennodenne uľahčuje život.

## Záver

Cieľom tejto bakalárskej práce bolo spracovať problematiku Fourierovej analýzy v kontexte spracovania signálov. V prvej kapitole sme sa zamerali na teóriu signálov potrebnú v ďalších častiach práce. Hlavnou zložkou prvej kapitoly bolo vysvetlenie pojmu reprezentácie signálov, tiež bola urobená klasifikácia signálov. Druhá časť bola zameraná na Fourierovu analýzu, predovšetkým na diskrétnu Fourierovú transformáciu, ktoré sú založené na zmene oblasti reprezentácie signálu. V tretej časti sme sa venovali spracovaniu signálov a porovnali sme jednotlivé typy spracovania signálov.

Osobným prínosom práce bolo získanie prehľadu v problematike spracovania signálov a tiež uvedomenie si, že matematika je neoddeliteľnou súčasťou spracovania signálov.

Dúfame, že práca poskytne čitateľovi komplexný prehľad danej problematiky.

# Literatúra


[1] Allen, R. L.: *Signal Analysis: Time, Frequency, Scale and Structure*, Wiley Interscience, New York, 2004

[2] Buck, J. R., Oppeheim, A. V., Schafer, R. W.: *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice-Hall, New Jersey, 1999

[3] Digitalizácia signálu - Frekvenčné spektrum signálu a digitalizácia EKG signálu, učebné texty k cvičeniam, KTEBI FEL UNIZA, Žilina, dostupné na internete: http://fel.uniza.sk/ktebi/new/predmety/SSL/material/cv_4.pdf

[4] ECG processing - R-peaks detection: http://www.librow.com/cases/case-2

[5] Epilepsy and its Treatment for Providers: http://www.angelman.org/understanding-as/medical-info/epilepsy-and-its-treatment-for-providers/

[6] Joseph Fourier - http://www.uh.edu/engines/epi1878.htm

[7] Ingle, V. K., Proakis, J. G.: *Digital Signal Processing - Principles,Alghorithms and Applications* Global Engineering, New Jersey, 1996

[8] Kollár, M., Kossaczká, Ľ., Ševčovič, D.: *Diferenciálny a integrálny počet funkcií viac premenných v príkladoch*, učebný text, Knižničné a edičné centrum FMFI UK, Bratislava, 2009

[9] Kreidl, M. a kol.: *Ultrazvuková defektoskopie*, Starmans electronics, Praha, 2011

[10] Maheľ, M.: *Matematická reprezentácia signálu*, učebné texty k prednáškam, FMFI UK, Bratislava, dostupné na internete: http://www.drp.fmph.uniba.sk/ mahel/RF/rf.pdf

[11] Manolakis, D. G., Proakis, J. G.: *Digital Signal Processing using MATLAB* Prentice-Hall, Stanford, 2012

[12] Minárik, I., Rozinaj, G.: *Multimédia*, České vysoké učení technické v Praze, Praha, 2013

[13] Mitra, S. K.: *Digital Signal Processing: A Computer-Based Approach* , McGraw-Hill, Santa Barbara, 2001

[14] Ondráček, O.: *Diskrétne signály a sústavy*, Slovenská technická univerzita, Bratislava, 2002

[15] Prandoni, P., Vetterli, M.: *Signal Processing for Communication*, EPFL Press, Lausanne, 2008

[16] Salna, B.: *Criminalistic Person Identification by Voice*, Problems of Forensic Sciences vol. XLVII (2001), 268-272

[17] Seismometer: http://volcanoclast.com/seismometer/

[18] Smékal, Z., Šebesta, V.: *Signály a soustavy* , UREL FEKT VUT Brno, Brno, 2003

[19] Sundararajan, D.: *The Discrete Fourier Transform - Theory, Algorithms and Applications*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2001

[20] University of Bonn, Institute of Computer Science III: BIT Summer School 2003: Basic Concepts of Digital Signal Processing: http://www-mmdb.iai.uni-bonn.de/lehre/BIT/ss03_DSP_Vorlesung/matlab_demos/