UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

HĽADANIE EFEKTÍVNYCH AKTÍV METÓDOU DEA

BAKALÁRSKA PRÁCA

2014 Matej JEČMEN

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

HĽADANIE EFEKTÍVNYCH AKTÍV METÓDOU DEA

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program:	Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Bratislava 2014

Matej JEČMEN

26611889

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Matej Ječmen
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Hľadanie efektívnych aktív metódou DEA / *Searching of efficient assets using the DEA method*

Cieľ: Zostaviť zoznam relevantných kritérií na efektivitu akcií. Pomocou metódy DEA nájsť efektívne akcie.

Vedúci: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Dátum zadania: 18.10.2013

Dátum schválenia: 14.11.2013

doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

....

študent vedúci práce

Abstrakt v štátnom jazyku

JEČMEN, Matej*: Hľadanie efektívnych aktív metódou DEA* [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD., Bratislava, 2014, 64 s.

Táto práca je zameraná na využitie matematickej metódy nazývanej DEA a jej použitie na výber efektívnych DMU. Skúmame v nej jednotlivé modely, od orientovaných po aditívne ako aj ich špeciálne varianty v úlohách bez vstupov, respektíve výstupov. Cieľom je ich následná aplikácia na dáta obsahujúce akcie vyskytujúce sa na trhu za účelom výberu efektívnych akcií. Tento výber bol potom porovnávaný s trhovými hodnotami jednotlivých akcií v nasledujúcom roku a snažili sme sa vybrať také, ktoré majú najväčšiu šancu zarobiť. Výsledkom práce je nájdenie takého kritéria na výber akcií, ktoré má šancu investorovi zarobiť a pritom vybrať dostatočne dôveryhodné akcie bez znalosti akýchkoľvek ekonomických poznatkov z teórie portfólia.
Kľúčové slová: Data Envelpment Analysis, Orientované modely, Aditívny model, Efektivita

Abstrakt v cudzom jazyku

JEČMEN, Matej**:** *Searching of efficient assets using the DEA method* [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD., Bratislava, 2014, 64p.

This thesis is directed towards the usage of mathematical method called DEA modeling and its application on the selection of effective DMUs. In our thesis we study individual models, from the oriented to the additive ones, as well as their special variations in problems without inputs or outputs. Our objective is their subsequent application on data containing shares traded on the market aiming to select the effective ones. This selection was then compared with market prices of shares in the following year and we tried to identify a group of shares which could most likely earn money. The result of the thesis is the discovery of such a criterion that offers the shareholder the possibility to earn money and choose sufficiently credible shares without any economical knowledge about the portfolio theory.

Keywords: Data Envelopment Analysis, Oriented models, Additive model, Effectivity

Obsah

Úvod

Takmer každý už určite počul o akciách, avšak väčšina bežných ľudí sa s nimi stretla len v novinách, filmoch alebo náhodne pri surfovaní na internete, ale nikdy sa nimi bližšie nezaoberali. Často si spájajú akcie len s vysoko postavenými manažérmi alebo podnikateľmi, ktorí majú na svojich bankových kontách sumy, o ktorých sa bežnému smrteľníkovi ani nesníva. Avšak teoreticky sa môže stať akcionárom každý. Samozrejme, nemôže očakávať, že kúpou náhodnej akcie zbohatne zo dňa na deň. Takýmto postupom je pravdepodobnejšie, že na tom nielenže nezarobí, ale ešte stratí aj to, čo investoval. Tak ako potom vybrať tú správnu akciu aby sme takéto riziko minimalizovali? Jednou z možných odpovedí je, že treba nakúpiť len „dobré" akcie. Ale čo sú to tie „dobré" akcie a ako ich nájsť? Zobrať si údaje o každej akcii a „ručne" ich porovnať s ostatnými môže znieť ako dobrý nápad, ale keď si uvedomíme, koľko existuje akcií a v koľkých kritériách sa líšia, zistíme, že takýto prístup nie je realizovateľný. Preto je vhodné použiť nejakú sofistikovanejšiu metódu, ktorá by nám toto hľadanie uľahčila. Jedným z možných riešení je použitie analýzy založenej na základe lineárneho programovania, nazývanej DEA ([1], [2], [5], [6]).

Pomocou DEA (Data Envelope Analysis) vieme na základe nameraných vstupov a výstupov vyjadriť efektivitu jednotlivých objektov, ktoré sú predmetom skúmania. Pojem „efektivita akcie" sa môže na prvý pohľad zdať nezmyselný keďže DEA sa zväčša ilustruje na firme, ktorá sa snaží zistiť nakoľko efektívna je jej výroba pri daných vstupoch a výstupoch, prípadne akým spôsobom zvýšiť jej efektivitu čo najviac.

V tejto práci sa pokúsim ukázať, že sa táto metóda dá použiť nielen na meranie efektivity podnikov, ale aj pri výbere efektívnych - „dobrých" akcií podľa dostupných informácií o firme, ktorá akcie emitovala. Mojou úlohou bude zistiť, ktoré akcie majú najlepšie vlastnosti, a teda investícia do nich by sa s najväčšou pravdepodobnosťou vyplatila. Avšak ani po takomto výbere nie je zaručené, že tieto akcie prinesú akcionárovi zisk, preto je omyl predpokladať, že použitie tejto metódy je kľúčom k bohatstvu.

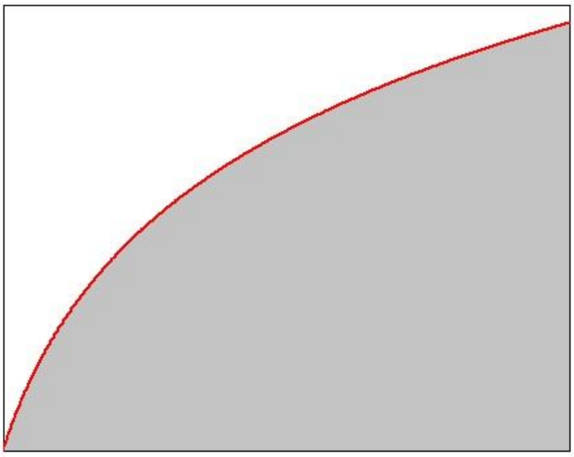
1 DEA modely

V celej kapitole vychádzame z prác [1], [2], [5] a [6]. V práci používame rovnaké označenia modelov a premenných ako v [2].

1.1 Úvod do DEA modelov

Obálková analýza dát, po anglicky data envelopment analysis, od čoho je odvodená skratka DEA, sa dá chápať ako aplikácia lineárneho programovania na zisťovanie efektivity. Ilustrujeme si to na príklade firmy, ktorá z nejakých surovín vyrába produkty. Tieto suroviny musí firma nakúpiť, vyťažiť, pripadne vypestovať, čo pre ňu predstavuje náklady, a teda racionálne zmýšľajúca firma sa snaží tieto náklady minimalizovať. Naopak, vyrobené produkty predstavujú pre firmu zisk, preto sa snaží vyrobiť pri daných nákladoch čo najviac produktov. Ako dobre sa to firme darí uskutočňovať vyjadruje efektivita. Čím vyššiu efektivitu firma dosiahne, tým lepšie využíva suroviny na výrobu produktov.

V DEA sa suroviny nazývajú vstupy a produkty sú výstupy. Okrem pojmu efektivita sa v obálkovej analýze dát často spomína aj výraz produkčná funkcia. Táto funkcia vyjadruje maximálne možné množstvá výstupov aké sa dajú vyrobiť pri daných vstupoch. Žiadny výrobca sa teda nemôže nachádzať nad produkčnou funkciou, t.j. vyrábať viac ako je maximálne možné pri daných vstupoch. Vo všeobecnosti je produkčná funkcia konkávna a rastúca. Dôvodom rastúcosti funkcie je, že zvýšením vstupov určite dokážeme vyrobiť aspoň také množstvo výstupov ako pred ich zvýšením, pretože vstupy, ktoré sme pridali, môžeme „vyhodiť do koša," a teda pracovať len s pôvodnými. Požiadavka konkávnosti býva vysvetľovaná tak, že máme 2 technológie, pomocou ktorých vieme pri určitých vstupoch x_1 a x_2, nie nutne rovnakých, vyrobiť isté množstvo produktov y_1 a y_2, takisto nie nutne rovnaké, ktoré leží na produkčnej funkcii. Za čas $\alpha \in [0,1]$ vieme pomocou prvej technológie vyrobiť aspoň α-násobok výrobkov y_1, teda αy_1 použitím αx_1 vstupov. Pomocou druhej technológie vieme za zvyšný čas $(1-\alpha)$, vyrobiť minimálne $(1-\alpha)$-násobok výrobkov y_2, t.j. $(1-\alpha)y_2$, pričom spotrebujeme $(1-\alpha)x_2$ vstupov. Celkovo takto minieme $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ vstupov a vyprodukujeme aspoň $\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2$ výstupov. Keďže táto vlastnosť platí pre všetky body ležiace na produkčnej funkcii, znamená to, že táto funkcia je konkávna. Príklad produkčnej funkcie je zobrazený na Obr. 1.1.



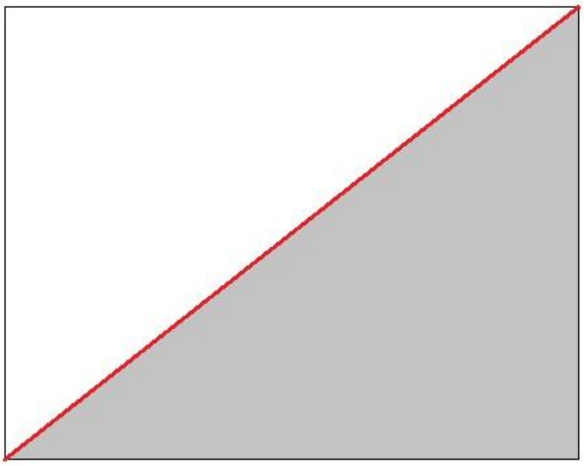
Obr. 1.1 Príklad produkčnej množiny

Množina bodov medzi produkčnou funkciou a osou x sa nazýva množina produkčných možností. V tejto množine sa nachádzajú všetky kombinácie vstupov a výstupov, ktoré možno vytvoriť. Pri daných vstupoch vieme teda vyprodukovať ľubovoľné množstvo výstupov, ktoré je menšie nanajvýš rovné funkčnej hodnote produkčnej funkcie pri daných vstupoch. Keďže je produkčná funkcia konkávna a tvorí vrchnú hranicu produkčnej množiny, táto množina je konvexná.

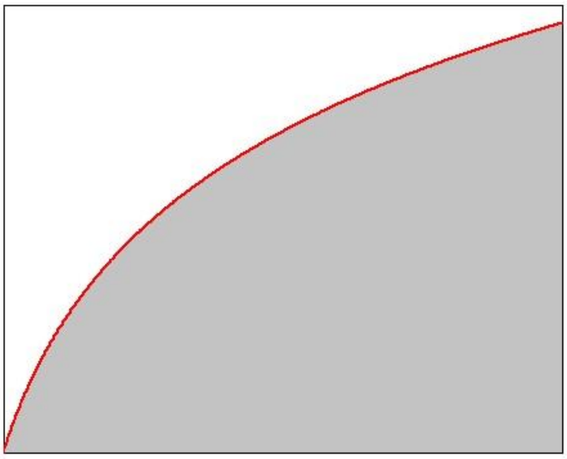
Každý producent sa snaží maximalizovať svoj zisk, inak povedané má záujem mať čo najviac výstupov pri daných vstupoch. To znamená, že sa snaží dostať na produkčnú funkciu, a teda mať maximálny počet výstupov pri daných vstupoch. Vo väčšine prípadov však produkčnú funkciu nepoznáme, a preto sa ju snažíme nejakým spôsobom aproximovať aby sme vedeli povedať ako dobre sa danému producentovi darí priblížiť k produkčnej funkcii. Aby bola splnená podmienka konvexnosti produkčnej množiny, musí produkčná funkcia viesť ponad konvexný obal všetkých bodov, ktoré predstavujú výrobcov, vyjadrujúcich vstupy a výstupy pri výrobe. Navyše sa snažíme nájsť takú aproximáciu produkčnej funkcie, že jej produkčná množina bude určite podmnožinou reálnej produkčnej množiny. To znamená, že produkčná funkcia musí viesť čo najnižšie ponad spomínaný konvexný obal výrobcov.

Rozlišujeme dva prípady produkčných funkcií, a to pri konštantných a variabilných výnosoch z rozsahu. Konštantné výnosy z rozsahu znamenajú, že pridaním jednotky vstupu vieme vždy dostať o rovnaké množstvo výstupu viac ako pred jeho pridaním. Je to teda lineárna závislosť výstupov od vstupov. Na rozdiel od konštantných výnosov z rozsahu, pri variabilných výnosoch sa rozdiel vo výstupe po pridaní jednotky vstupu so zvyšujúcim množstvom vstupov mení. Na Obr. 1.2 a Obr.

1.3 sú znázornené aproximácie produkčnej funkcie, ako aj produkčnej množiny pod ňou, pri konštantných aj variabilných výnosoch z rozsahu.



Obr. 1.2 Produkčná množina s konštantnými výnosmi z rozsahu



Obr. 1.3 Produkčná množina s variabilnými výnosmi z rozsahu

Ako možno z Obr. 1.2 vidieť, pri konštantných výnosoch z rozsahu je produkčná funkcia rastúcou lineárnou funkciou, ktorá začína v bode $(0,0)$, pretože pri nulových vstupoch nemôžeme mať nenulové výstupy. Keďže je táto funkcia lineárna a rastúca, pri konštantných výnosoch je každým zvýšením vstupov o jednotku možné vždy vyprodukovať viac výstupov pri akomkoľvek aktuálnom množstve vstupov. V prípade variabilných výnosov už aproximácia produkčnej funkcie nie je rastúca, ale len neklesajúca a konkávna. Je to dané tým, že od istého množstva vstupov nemáme informáciu o tom, koľko výstupov je možné vyrobiť pri daných vstupoch. Jediné, čo vieme je, že určite dokážeme vyrobiť aspoň toľko vstupov, koľko sme vedeli vyrobiť pri nižšom množstve vstupov. Týmto máme zaručené, že takto aproximovaná produkčná množina bude určite podmnožinou reálnej produkčnej množiny. Pri variabilných výnosoch z rozsahu sa teda postupným zvyšovaním vstupov o jednotku síce do určitého okamihu zvyšuje množstvo výstupov, ale rozdiel vo výstupoch je menší, alebo rovnaký ako bol pri pridaní predchádzajúcich vstupov a od určitého momentu sa z produkčnej funkcie stáva konštantná funkcia, a teda každým ďalším pridaním vstupov sa množstvo výstupov nezmení.

V DEA sa body ležiace v produkčnej množine s danými vstupmi a výstupmi, ktoré predstavujú firmy, zvyknú označovať decision making unit, alebo DMU. Tie z nich, ktoré ležia na (reálnej) produkčnej funkcií, a teda majú maximálne možné výstupy pri daných vstupoch, budú označované ako efektívne. Ostatné DMU, ktoré ležia pod touto funkciou budú neefektívne DMU. Nad funkciou nemôže ležať žiadne DMU, pretože výstupy pri daných vstupoch nemôžu byť väčšie ako maximálne možné, ktoré predstavuje produkčná funkcia. Ako bolo už uvedené vyššie, vo väčšie prípadov je reálna produkčná funkcia neznáma, a preto budeme efektivitu/neefektivitu určovať na základe aproximovanej produkčnej funkcie. Ako efektívne DMU budeme označovať tie, pre ktoré nevieme nájsť stav z produkčnej množiny, pri ktorom by bol aspoň jeden vstup menší pri zachovaní zvyšných vstupov a výstupov alebo aspoň jeden výstup väčší pri zachovaní ostatných výstupov a vstupov. Jedná sa teda o body, ktoré ležia na aproximovanej produkčnej funkcií. DMU označíme ako neefektívne ak existuje stav, pri ktorom je aspoň jeden vstup menší a zároveň aspoň jeden výstup väčší ako pri tomto DMU pri zachovaní zvyšných vstupov a výstupov. Vtedy sa body nachádzajú pod produkčnou funkciou. Zostala nám ešte posledná možnosť, kedy sa body síce nachádzajú na produkčnej funkcií, ale existuje stav, kedy je buď aspoň jeden vstup menší pri zachovaní zvyšných vstupov a výstupov alebo je aspoň jeden výstup väčší ako v prípade daného DMU pri zachovaní zvyšných vstupov a výstupov. Takéto DMU potom nazveme pseudoefektívne.

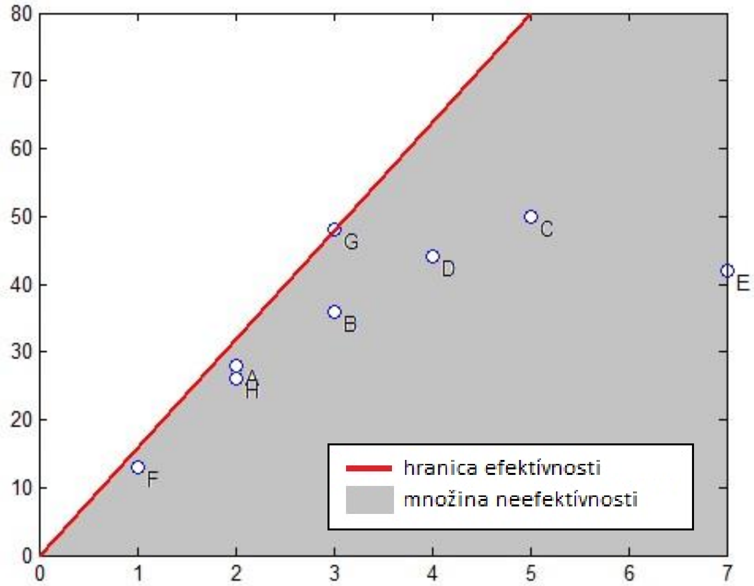
Efektivita s jedným vstupom a jedným výstupom pri konštantných výnosoch z rozsahu

Výpočet efektivity si ukážeme na jednoduchom príklade, kde DMU je 7 pekární. Vstupom bude počet predavačiek obsluhujúcich zákazníkov a výstupom počet chlebov, ktoré si zákazníci kúpili. Údaje sú uvedené v tabuľke.

DMU	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**
Počet predavačiek	2	3	5	4	7	1	3	2
Počet chlebov	28	36	50	44	42	13	48	26
Chleby/predavačky	14	12	10	11	6	13	16	13

Tab. 1.1 Dáta k príkladu s 1 vstupom a 1 výstupom pri konštantných výnosoch z rozsahu

Z Tab. 1.1 je vidno, že najväčší pomer počtu chlebov k počtu predavačiek má predajňa G, preto sa nám zdá, že by to mohla byť „najlepšia“ pekáreň, pretože na jednu predavačku (vstup) pripadá najviac predaných chlebov (výstup). Celá situácia je zobrazená v nasledujúcom grafe na Obr. 1.4.



Obr. 1.4 Vstupy a výstupy z príkladu vyjadrené v grafe

Keďže v príklade uvažujeme konštantné výnosy z rozsahu, produkčná funkcia je lineárna funkcia vychádzajúca zo začiatku súradnicovej sústavy. Lenže predpis produkčnej funkcie nepoznáme, preto budeme považovať za efektívne to DMU, ktoré má najlepší pomer výstupov k vstupom, v našom príklade pekáreň G. Cez tento bod budeme zo začiatku súradnicovej sústavy viesť polpriamku, ktorá bude vyjadrovať aké výstupy by malo mať efektívne DMU pri daných vstupoch. Táto polpriamka, ktorú nazveme efektívnou hranicou, najlepšie aproximuje skutočnú, avšak neznámu produkčnú funkciu. Z obrázku Obr. 1.4 vidíme, že zvyšné DMU sú pod efektívnou hranicou, preto ich budeme považovať za neefektívne.

Teraz už vieme zistiť, či sú DMU efektívne, alebo neefektívne, a chceme presnejšie určiť mieru efektívnosti, t.j. efektivitu jednotlivých DMU. Túto v našom príklade vyjadríme ako pomer podielu počtu chlebov a počtu predavačiek i-tej pekárne ku podielu počtu chlebov a počtu predavačiek efektívnej pekárne, teda pekárne G.

$$E = \frac{\frac{počet\ chlebov\ i\text{–}teho\ DMU}{počet\ predavačiek\ i\text{–}teho\ DMU}}{\frac{počet\ chlebov\ efektívneho\ DMU}{počet\ predavačiek\ efektívneho\ DMU}} \tag{1.1}$$

Keďže podiel počtu chlebov a počtu predavačiek každého DMU je menší ako pri efektívnom DMU G, platí $0 \leq E \leq 1$, pričom $E = 1$ práve vtedy, keď je dané DMU efektívne. Použitím vzorca (1.1) dostávame výsledky efektivity uvedené v Tab. 1.2:

DMU	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**
Počet predavačiek	2	3	5	4	7	1	3	2
Počet chlebov	28	36	50	44	42	13	48	26
Chleby/predavačky	14	12	10	11	6	13	16	13
Efektivita E	**0,875**	**0,75**	**0,625**	**0,6875**	**0,375**	**0,8125**	**1**	**0,8125**

Tab. 1.2 Dáta z príkladu s vypočítanou efektivitou

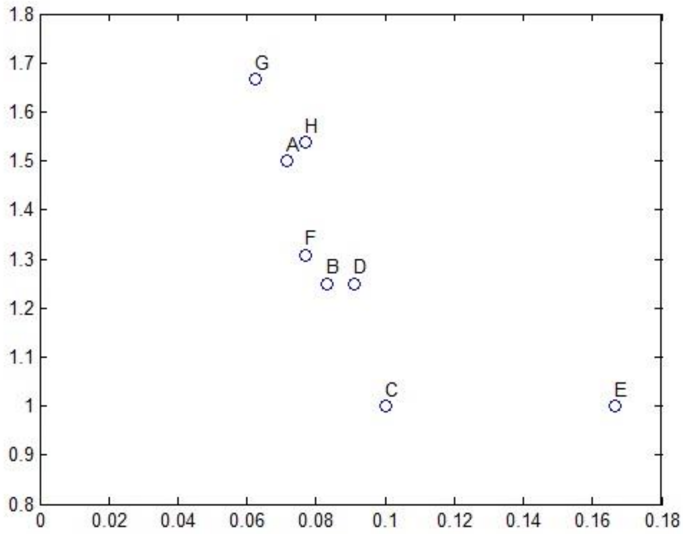
Efektivita s dvoma vstupmi a jedným výstupom pri konštantných výnosoch z rozsahu

V prípade 2 vstupov a 1 výstupu už situácia nie je taká jednoduchá. Použitie predchádzajúceho vzorca (1.1) nie je možné, keďže máme namiesto jedného vstupu dva. Kreslenie grafu v dvojrozmernom priestore taktiež zlyháva, pretože ak by sme chceli zakresliť všetky DMU, museli by sme kresliť graf dimenzie 3. Analógia s predchádzajúcim prípadom ale ostáva. Pri 1 vstupe sme počítali, koľko chlebov pripadá na 1 predavačku. Aj teraz môžeme použiť túto metódu, avšak budeme počítať prevrátený pomer a to pomer prvého vstupu k výstupu aj pomer druhého vstupu k výstupu. Takto dostávame z 3 premenných (2 vstupy a 1 výstup) pre každé DMU 2 premenné, a teda môžeme nakresliť graf, ktorý bude predstavovať „prierez“ pôvodného grafu dimenzie 3 v hodnote výstupu rovnajúceho sa 1. Dané DMU zakreslíme v tejto rovine so súradnicami pomerov vstupov k výstupu. Budeme teda zobrazovať aké by mali jednotlivé DMU vstupy, keby vyrábali jednotku výstupu. Situáciu si ukážeme na predchádzajúcom príklade rozšírenom o ďalší vstup, konkrétne plochu predajne.

DMU	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**
Počet predavačiek	2	3	5	4	7	1	3	2
Plocha predajne	42	45	50	55	42	17	80	40
Počet chlebov	28	36	50	44	42	13	48	26
Predavačky/chleby	1/14	1/12	1/10	1/11	1/6	1/13	1/16	1/13
Plocha/chleby	3/2	5/4	1	5/4	1	17/13	5/3	20/13

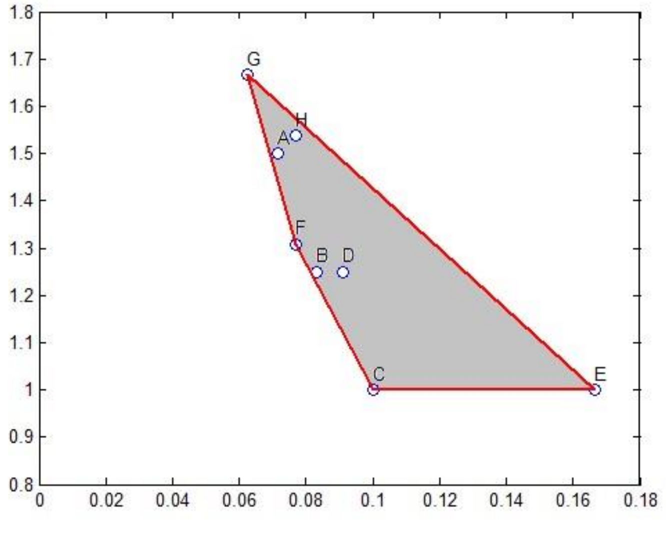
Tab. 1.3 Dáta k príkladu s 2 vstupmi a 1 výstupom pri konštantných výnosoch z rozsahu

Dáta z Tab. 1.3 použijeme na nakreslenie grafu metódou, ktorá bola spomenutá vyššie.



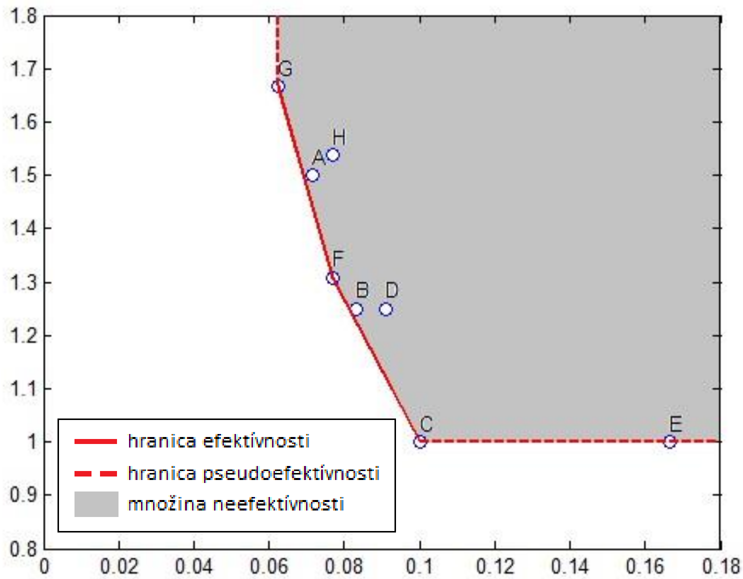
Obr. 1.5 Vyjadrenie pomeru vstupov ku výstupu jednotlivých DMU

Keďže sme v tomto prípade používali pomer vstupu k výstupom, každý výrobca, resp. DMU sa bude snažiť mať tento pomer čo najmenší. Musí preto platiť, že ak máme dvojicu DMU_i a DMU_j, pričom DMU_i má aspoň jeden pomer vstupu k výstupu menší ako DMU_j a druhý pomer menší alebo rovný, DMU_j určite nemôže byť efektívny, pretože DMU_i využíva menej vstupov na produkciu rovnakého množstva výstupov. Navyše vieme, že produkčná množina je konvexná, preto nestačí porovnávať vstupy len s konkrétnymi DMU, ale aj s ich konvexnými kombináciami. Množinu všetkých konvexných kombinácií získame tak, že lomenou čiarou pospájame DMU v Obr. 1.5 tak, aby táto lomená čiara bola uzavretá, teda aby všetky DMU boli buď vnútornými bodmi alebo na obvode mnohouholníka a aby všetky jeho vnútorné body tvorili konvexnú množinu. V našom prípade tento mnohouholník zobrazuje Obr. 1.6.



Obr. 1.6 Množina konvexných kombinácií jednotlivých DMU

Do množiny produkčných možností však patria aj všetky „horšie“ možnosti, keď sú vstupy väčšie ako u DMU v príklade. Preto do tejto množiny musíme zahrnúť aj všetky body s vyšším aspoň jedným vstupom na jednotku výstupu, keď druhý vstup je buď rovnaký alebo väčší ako u ľubovoľnej pekárne. Dostávame množinu produkčných možností, ktorú ilustruje Obr. 1.7.



Obr. 1.7 Konvexná množina rozšírená o „horšie“ body

Môžeme si všimnúť, že na Obr. 1.7 sa nachádza efektívna hranica, ale aj pseudoefektívna hranica. Je zrejmé, že body na efektívnej hranici sa nijako nedajú „zlepšiť“ znížením vstupov tak, aby sa stále nachádzali v produkčnej množine. Znížiť jeden vstup by mohli len za predpokladu, že druhý vstup zvýšia, a preto všetky DMU ležiace na efektívnej hranici môžeme vyhlásiť za efektívne.

Naopak, DMU ležiace na hranici pseudoefektívnosti efektívne byť nemôžu. Vieme totiž nájsť DMU, alebo konvexnú kombináciu viacerých DMU, ktoré má jeden vstup na jednotku výstupu rovnaký a druhý vstup menší, čo znamená, že nie sú efektívne, ale môžu byť označované ako pseudoefektívne. Takisto DMU ležiace mimo efektívnej a pseudoefektívnej hranice sú neefektívne.

Efektivitu, prípadne pseudoefektivitu pri dvoch vstupoch a jednom výstupe zistíme tak, že jednotlivé DMU spojíme úsečkou vychádzajúcou zo začiatku súradnicovej sústavy. Pomer vzdialenosti bodu, ktorý vznikol ako priesečník efektívnej, prípadne pseudoefektívnej hranice, a príslušného DMU od začiatku súradnicovej sústavy bude vyjadrovať efektivitu, prípadne pseudoefektivitu daného DMU. Hodnota efektivity vyjadruje ako by sa mali znížiť všetky vstupy aby sa DMU stalo efektívnym. V prípade

pseudoefektivity by takéto zníženie vstupov viedlo k tomu, že by sa DMU stalo psudoefektívnym, teda by bolo nutné niektoré vstupy znížiť viac, aby bolo efektívne.
V našom príklade sú efektívne DMU B, C, F, G, pseudoefektívne je E a neefektívne sú A, E, H.

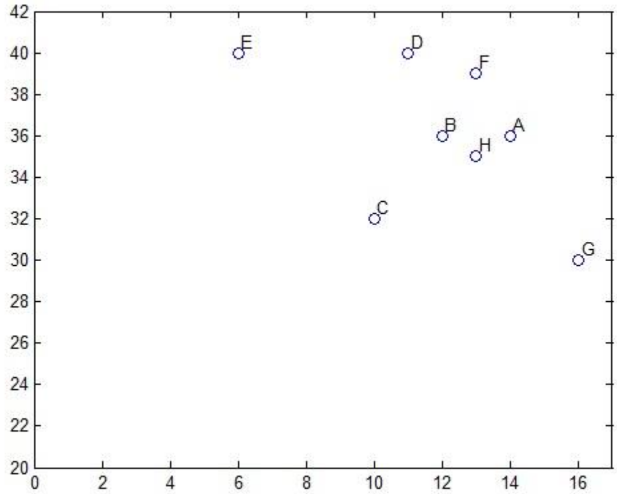
Efektivita s jedným vstupom a dvomi výstupmi pri konštantných výnosoch z rozsahu

Pri situácii s 2 výstupmi a 1 vstupom to je podobné ako v predchádzajúcom prípade s 1 výstupom a 2 vstupmi. Opäť tu narážame na problém pretransformovania grafu dimenzie 3 na graf dimenzie 2. Keďže sa jedná o konštantné výnosy z rozsahu, v tomto prípade ho vyriešime tak, že spravíme pomer prvého výstupu ku vstupu a pomer druhého výstupu ku vstupu pre každé DMU. Dostávame tak už len 2 premenné, a teda vieme nakresliť graf, v ktorom je zobrazený prierez pôvodného grafu s 1 vstupom a 2 výstupmi v hodnote vstupu 1. Opäť si danú situáciu ukážeme na príklade, kde vstup bude počet predavačiek a výstupy budú počet predaných chlebov a počet predaných rožkov.

DMU	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**
Počet predavačiek	2	3	5	4	7	1	3	2
Počet chlebov	28	36	50	44	42	13	48	26
Počet rožkov	72	108	160	160	280	39	90	70
Chleby/predavačky	14	12	10	11	6	13	16	13
Rožky/predavačky	36	36	32	40	40	39	30	35

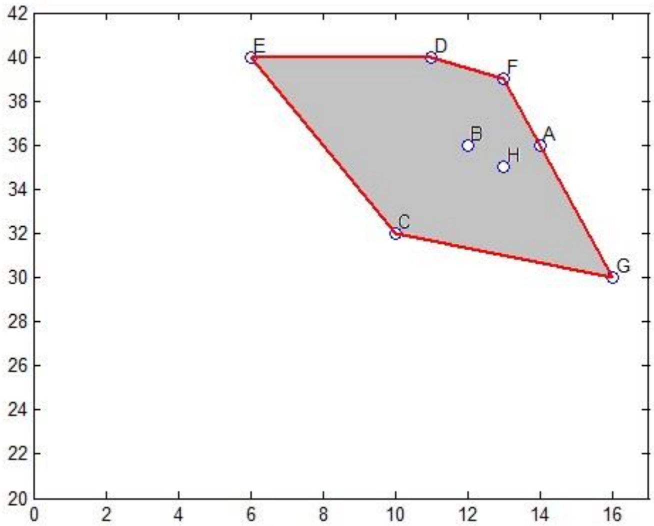
Tab. 1.4 Dáta k príkladu s 1 vstupom a 2 výstupmi pri konštantných výnosoch z rozsahu

Z dát v Tab. 1.4 teraz nakreslíme graf na Obr. 1.8 so zakreslenými DMU pri jednotkovom vstupe.



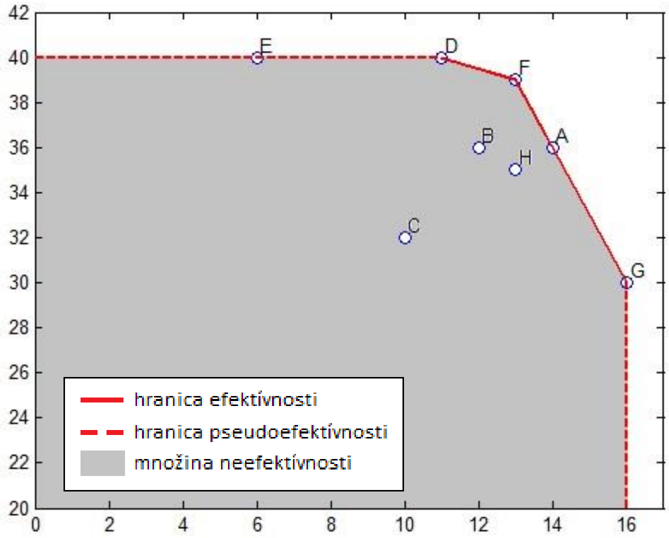
Obr. 1.8 Vyjadrenie pomeru výstupov ku vstupu jednotlivých DMU

Podobne ako v predchádzajúcom prípade na Obr. 1.6, s 1 výstupom a 2 vstupmi, aj tu nájdeme množinu konvexných kombinácií jednotlivých DMU.



Obr. 1.9 Množina konvexných kombinácií jednotlivých DMU

V grafe na Obr. 1.9 vystupuje pomer výstup/vstup, preto sa každá z pekární snaží mať tieto pomery čo najväčšie. Množinu produkčných možností potom nájdeme tak, že k nájdenej množine konvexných kombinácií jednotlivých DMU pridáme aj všetky „horšie“ stavy. Ide o stavy, v ktorých sa pri jednotkovom vstupe vyrába aspoň jedného výstupu menej a druhý je nanajvýš rovnaký ako u ľubovoľnej pekárne. Dostávame teda produkčnú množinu zobrazenú na Obr. 1.10.



Obr. 1.10 Konvexná množina rozšírená o „horšie" body

Na Obr. 1.10 si môžeme všimnúť, že niektoré DMU ležia na efektívnej hranici. Tie už nemôžu zvýšiť ani jeden zo svojich výstupov, bez toho aby znížili ten druhý, tak aby zostali v množine produkčných možností, a teda sú efektívne. DMU ležiace na hranici pseudoefektívnosti efektívne nie sú, nakoľko existuje DMU, alebo konvexná kombinácia viacerých DMU, ktoré má pri danom vstupe aspoň jeden výstup väčší a druhý rovnaký. Takisto pre všetky DMU z množiny neefektívnosti vieme nájsť stav z produkčnej množiny, pri ktorom je vstup rovnaký, ale výstupy väčšie. Preto DMU z hranice pseudoefektívnosti aj z množiny neefektívnosti označíme za neefektívne.

Analógia s predchádzajúcim prípadom s 2 vstupmi a 1 výstupom platí aj pri zisťovaní efektívnosti DMU. Pre každé DMU zostrojíme polpriamku začínajúcu v začiatku súradnicovej sústavy, prechádzajúcu cez dané DMU. Výsledná efektivita, prípadne pseudoefektivita, je daná ako podiel vzdialenosti DMU od začiatku súradnicovej sústavy a vzdialenosti bodu, v ktorom polpriamka pretína hranicu efektívnosti, prípadne pseudoefektívnosti, tiež od počiatku súradnicovej sústavy.

Bez počítania efektivity, však dokážeme z Obr. 1.10 posúdiť, ktoré DMU sú efektívne, ktoré pseudoefektívne a ktoré neefektívne. Efektívne sú DMU A, D, F a G, pseudoefektívne je jedine E a neefektívne sú B, C a H.

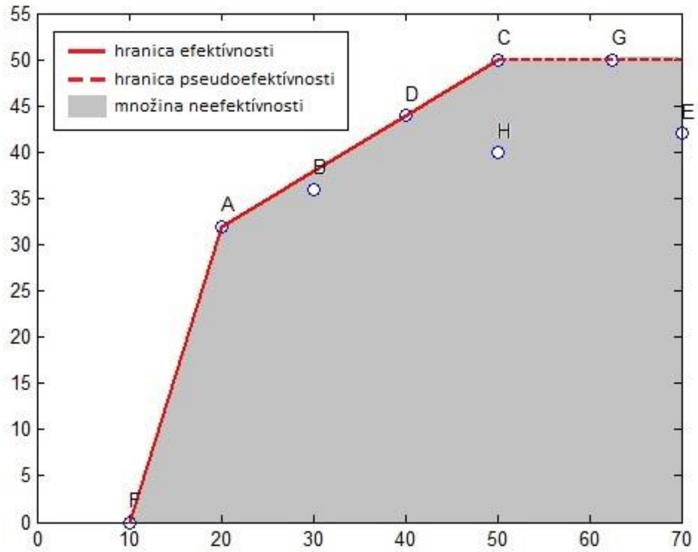
Efektivita s jedným vstupom a jedným výstupom pri variabilných výnosoch z rozsahu

Pri variabilných výnosoch z rozsahu nám už nestačí vypočítať len pomer výstupov ku vstupom, pretože s rastúcimi vstupmi sa mení rozdiel vo výstupe po pridaní jednotky vstupu. Z tohto dôvodu môže byť DMU efektívne, hoci má tento pomer horší ako nejaké iné neefektívne DMU. Preto budeme o efektívnosti rozhodovať iným spôsobom. Aj v tomto prípade si vytvoríme množinu konvexných kombinácií jednotlivých DMU a pridáme množinu všetkých „horších“ možností. „Horšie“ možnosti sú tie, kde pri daných vstupoch existuje DMU alebo lineárna kombinácia viacerých DMU taká, že má aspoň jeden výstup väčší a ostatné minimálne rovnaké. Takto sme skonštruovali aproximáciu produkčnej množiny pre variabilné výnosy z rozsahu. Kritérium na hľadanie efektívnych, pseudoefektívnych a neefektívnych DMU bude analogické ako pri konštantných výnosoch z rozsahu. Aj v tomto prípade si to ukážeme na príklade, kde budú ako vstup vystupovať hodiny práce a výstupom bude vydolované zlato vplyvom vykonanej práce. Tento príklad je vhodný riešiť použitím variabilných výnosov z rozsahu, pretože s množstvom vyťaženého zlata sa mení hmotnosť zlata, ktorú by sme získali zvýšením práce o jednotku.

DMU	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**
Počet dní práce	20	30	50	40	70	10	62,5	50
Počet kg zlata	32	36	50	44	42	0	50	40
Zlato/práca	1,6	1,2	1	1,1	0,6	0	0,8	0,8

Tab. 1.5 Dáta k príkladu s 1 vstupom a 1 výstupom pri variabilných výnosoch z rozsahu

Z dát v Tab. 1.5 vieme zobraziť všetky DMU v grafe a nájsť aproximovanú produkčnú funkciu s hranicami efektívnosti a pseudoefektívnosti a množiny neefektívnosti.



Obr. 1.11 Jednotlivé DMU a produkčná množina pri variabilných výnosoch z rozsahu

Na Obr. 1.11 si môžeme všimnúť, že efektívne DMU sú A, C, D a F. Zaujímavé je, že efektívne je v tomto prípade aj DMU F, ktoré má nulové výstupy, a teda pomer výstupu ku vstupom je 0. Dá sa to však interpretovať tak, že je potrebných minimálne 10 dní na nájdenie zlata a až ďalšie dni je možné ho získavať. Ďalej si v Obr. 1.11 možno všimnúť, že pri efektívnych DMU pomer výstupov (vyťaženého zlata) ku vstupom (odrobenej práci) sa so zvyšujúcimi vstupmi najskôr zvyšuje a následne klesá.

Pseudoefektívne DMU je iba G a neefektívne sú zvyšné DMU, teda C, E a H. Je evidentné, že všetky pseudoefektívne a neefektívne DMU majú väčší pomer výstupov ku vstupom ako efektívne DMU F, a teda vidíme, že pri variabilných výnosoch z rozsahu na základe tohto pomeru nevieme určiť, či DMU efektívnym je alebo nie.

1.2 Orientované modely CCR s konštantnými výnosmi z rozsahu

V predchádzajúcej kapitole sme si ukázali sme si 4 prípady, 3 pri konštantných výnosoch z rozsahu a 1 pri variabilných výnosoch z rozsahu, kde sme dokázali nájsť efektívne DMU pomocou grafického riešenia. Problém však nastáva, keď máme viac vstupov alebo výstupov, pretože situáciu potom už nedokážeme nakresliť v 2 rozmeroch. Najprv si však definujeme požiadavky na vstupy a výstupy jednotlivých DMU:

[2, 2. prednáška, str. 7].

(P1): $\forall i = 1,2,\dots,n: x_i \geq 0_m, x_i \neq 0_m$ a $y_i \geq 0_s, y \neq 0_s$

(P2): $\forall i = 1,2,\dots,m\ \exists j \in \{1,2,\dots,n\}: x_{ij} > 0$

$\forall i = 1,2,\dots,s\ \exists j \in \{1,2,\dots,n\}: y_{ij} > 0$

Predpoklad (P1) znamená, že každé DMU má aspoň jeden vstup a aspoň jeden výstup kladný, ostatné sú nezáporné. Predpoklad (P2) požaduje to, že pre každý vstup aj výstup existuje DMU, ktoré má daný vstup alebo výstup kladný.

Vráťme sa teraz k problému s viacrozmernými úlohami. Riešením situácie viacerých vstupov alebo výstupov môže byť použitie modifikácie vzorca (1.1), ktorý sme používali na začiatku kapitoly 1.1 na určovanie efektivity neefektívnych DMU. Môžeme ho však využiť aj na hľadanie efektívnych DMU, ktoré budú mať efektivitu 1:

$$E := \min_i \frac{\frac{výstup\ daného\ DMU}{vstup\ daného\ DMU}}{\frac{výstup\ i-teho\ DMU}{vstup\ i-teho\ DMU}} = \frac{\frac{výstup\ daného\ DMU}{vstup\ daného\ DMU}}{\max_i \frac{výstup\ i-teho\ DMU}{vstup\ i-teho\ DMU}} \tag{1.2}$$

Keďže DMU, ktorého efektivitu hľadáme je podmnožinou všetkých DMU, ktoré vystupujú v menovateli (1.2), čitateľ tohto zlomku bude nanajvýš rovný menovateľu a efektivita bude rovná nanajvýš 1. Vstupy aj výstupy musia byť kladné hodnoty, preto $E \in [0; 1]$. Táto úloha je však korektne definovaná len pre 1 vstup a 1 výstup každého

DMU, kde situáciu dokážeme vyriešiť aj graficky. Preto sa pokúsime nájsť zovšeobecnenie tejto úlohy pre ľubovoľný počet vstupov a výstupov. Mohli by sme použiť vektor váh samostatne pre vstupy a výstupy a do vzorca dosadiť súčet vstupov, resp. výstupov, prenásobených príslušnými váhami. Tu sa nám však naskytuje otázka aké váhy sa majú použiť. Použitím konkrétnych váh by sa potom dala efektivita jednoduchým spôsobom vypočítať a vedeli by sme zistiť, ktoré DMU sú efektívne a ktoré nie. DEA na túto otázku odpovedá použitím takých váh, pri ktorých má dané DMU najväčšiu efektivitu. Vďaka tomuto prístupu zistíme, či existujú váhy, pri ktorých je dané DMU efektívne a akú maximálnu efektivitu môže mať. Prirodzenou požiadavkou na váhy je kladnosť. Záporná, prípadne nulová váha pri nejakom vstupe by znamenala, že čím je väčší tento vstup, tým je vyššia efektivita, prípadne, že sa nezmení, a naopak, pri výstupe, by znamenala, že čím menej je tohto výstupu, tým vyššiu efektivitu dosiahneme, prípadne, že sa nezmení, čo je protichodné s požiadavkami minimalizácie vstupov a maximalizácie výstupov. Dostávame teda nasledovnú úlohu s n DMU, kde u je vektor váh výstupov, v je vektor váh vstupov, y_i je vektor výstupov i-teho DMU dĺžky s, x_i je vektor vstupov i-teho DMU dĺžky m a index O označuje výstup, prípadne vstup DMU, ktorého efektivitu hľadáme:

$$E = \max_{u,v} \min_{i} \frac{\frac{u^T y_O}{v^T x_O}}{\frac{u^T y_i}{v^T x_i}}, \qquad \textbf{(1.3)}$$

pri podmienkach $u > 0_s, v > 0_m$ a $i = 1,2, \dots, n$.

Predpokladajme, že menovateľ zloženého zlomku z rovnice (1.3), zlomok $\frac{u^T y_i}{v^T x_i}$, pri daných váhach u a v nadobúda maximálnu hodnotu k. Ak by sme predelili vektor u konštantou k, alebo vektor v vynásobili k, potom maximálna hodnota, ktorú by tento zlomok dosahoval by bola rovná 1. Zároveň by po tejto úprave vektory váh stále spĺňali podmienky a navyše by sa nezmenila hodnota efektivity E. Táto úprava by však zjednodušila účelovú funkciu úlohy (1.3), pretože menovateľ zloženého zlomku by bol vždy rovný 1. Musíme však pridať podmienku $\frac{u^T y_i}{v^T x_i} \leq 1$ pre každé i. Dostávame tak nasledovnú úlohu

$$\max_{u,v} \frac{u^T y_O}{v^T x_O} \qquad \textbf{(1.4)}$$

$$\frac{u^T y_j}{v^T x_j} \le 1, \qquad j = 1,2,\dots,n \tag{1.5}$$

$$u > 0_s, v > 0_m \tag{1.6}$$

Túto úlohu sa budeme snažiť pretransformovať na úlohu lineárneho programovania. Nakoľko u a v sú voľné premenné, prenásobením vektora u aj vektora v rovnakou konštantou dostávame rovnakú hodnotu účelovej funkcie ako pred prenásobením. Preto môžeme požadovať podmienku

$$v^T x_O = 1$$

Tým sa nám úloha zmení na úlohu s lineárnou účelovou funkciou

$$\max_{u,v} u^T y_O$$

pričom bola pridaná jedna lineárna podmienka.

Takisto potrebujeme upraviť aj nerovnosti (1.5) tak, aby sa z nich stali lineárne ohraničenia. Môžeme ich prenásobiť výrazom $v^T x_j$ a dostávame

$$u^T y_j \le v^T x_j$$

Odčítaním toho istého výrazu dostaneme ohraničenia

$$u^T y_j - v^T x_j \le 0, \qquad j = 1,2,\dots,n$$

Aj táto úprava bola ekvivalentná, a teda nezmenila kvalitu úlohy.

Poslednou úpravou, ktorú musíme spraviť je odstránenie ostrej nerovnosti z podmienok, pretože riešením takejto úlohy by sme nemali istotu nájdenia optimálneho riešenia. Preto ostrú nerovnosť nahradíme neostrou nerovnosťou

$$u \ge 0_s, v \ge 0_m$$

Táto úprava je však neekvivalentná, pretože sa ňou zväčší množina prípustných riešení, čím môžeme dostať optimálne riešenie, ktoré nebude vyhovovať našej podmienke na nenulové váhy.

Dostávame úlohu (CCR-I-MM), teda multiplikatívny model vstupne orientovaný s konštantnými výnosmi z rozsahu, ktorý je úlohou lineárneho programovania:

$$U_O^* := \max_{u,v} u^T y_O \tag{1.7}$$

$$v^T x_O = 1 \tag{1.8}$$

$$u^T y_j - v^T x_j \le 0, \qquad j = 1,2,\dots,n \tag{1.9}$$

$$u \ge 0_s, v \ge 0_m \tag{1.10}$$

Teraz ukážeme, že je táto úloha dobre definovaná, že má vždy optimálne riešenie.

Veta 1 [2, 3. prednáška, str. 14] Pre akýkoľvek súbor dát spĺňajúci predpoklad (P1) a pre ľubovoľné $o \in \{1,2,\dots,n\}$ má úloha lineárneho programovania daná modelom (CCR-I-MM) optimálne riešenie a pre optimálnu hodnotu U_O^* účelovej funkcie (1.7) platí $U_O^* \leq 1$.

Dôkaz tejto vety nájdeme v [2, 3. prednáška, str. 14].

Spôsob ako odlíšiť efektivitu od neefektivity v modeli (CCR-I-MM) je uvedený v [2, 3. prednáška, str. 15].

Pri odvodzovaní výstupne orientovaného modelu vychádzame z úlohy (1.4) - (1.6). Rozdiel pri odvodzovaní je v tom, že namiesto podmienky (1.8) zvolíme podmienku na vektor výstupov.

$$u^T y_O = 1$$

Účelová funkcia sa tým pádom zmení na tvar

$$\max_{u,v} \frac{1}{v^T x_O} \tag{1.11}$$

Keďže vektor váh aj vektor vstupov sú nezáporné vektory, táto úloha (1.11) je ekvivalentná s minimalizačnou úlohou

$$\min_{u,v} v^T x_O$$

Ostatné kroky odvodenia sú zhodné, výsledný multiplikatívny model výstupne orientovaný s konštantnými výnosmi z rozsahu (CCR-O-MM) má teda tvar

$$V_O^* := \min_{u,v} v^T x_O \tag{1.12}$$

$$u^T y_O = 1 \tag{1.13}$$

$$u^T y_j - v^T x_j \leq 0, \qquad j = 1,2,\dots,n \tag{1.14}$$

$$u \geq 0_s, v \geq 0_m \tag{1.15}$$

Teraz si ukážeme, že aj táto úloha má aspoň jedno optimálne riešenie.

Veta 2 [2, 3. prednáška, str. 19]. Pre akýkoľvek súbor dát spĺňajúci predpoklad (P1) a pre ľubovoľné $o \in \{1,2,\dots,n\}$ má úloha lineárneho programovania daná modelom (CCR-O-MM) optimálne riešenie a pre optimálnu hodnotu V_O^* účelovej funkcie platí $V_O^* \geq 1$.

Dôkaz je možné nájsť v [2, 3. prednáška, str. 18-19].

Odlíšenie efektivity od pseudoefektivity v modeli (CCR-O-MM) je v [2, 3. prednáška, str. 20].

Ďalšie modely, ktoré teraz odvodíme, budú obálkové modely s konštantnými výnosmi z rozsahu. Sú to duálne úlohy k modelom (CCR-I-MM) a (CCR-O-MM). Najprv teda odvodíme vstupne orientovaný model. Vychádzame teda z modelu (CCR-I-MM) zapísanom v maticovom tvare, kde X je matica vstupov, vstupy každého DMU predstavujú príslušné stĺpce matice a Y je matica výstupov, výstupy každého DMU predstavujú príslušné stĺpce matice.

$$\max_{u,v} \begin{pmatrix} y_O^T & 0_m^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0_s^T & x_O^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{pmatrix} Y^T & -X^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \leq 0_n$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \geq 0_{s+m}$$

Duálna úloha k tejto úlohe s použitím voľných premenných $\theta \in R, \lambda \geq 0_n$ bude mať nasledovný tvar:

$$\min_{\theta,\lambda} \begin{pmatrix} 1 & 0_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0_s & Y \\ x_O & -X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \lambda \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} y_O \\ 0_m \end{pmatrix}$$

$$\theta \in R, \lambda \geq 0_n$$

To sa dá prepísať do zložkového tvaru nasledovne:

$$\min_{\theta,\lambda} \theta$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j \geq y_{rO}, \qquad r = 1,2,\dots,s$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j \leq \theta x_{iO}\,, \qquad i = 1,2,\dots,m$$

$$\lambda_j \geq 0, \qquad j = 1,2,\dots,n$$

Tento model sa nazýva obálkový vstupne orientovaný s konštantnými výnosmi z rozsahu, označovať ho preto budeme (CCR-I-OM). Pokiaľ sa chceme v modeli pri ohraničeniach zbaviť nerovností a mať namiesto nich rovnosti, môžeme model doplniť o ďalšie 2 voľné premenné s^x a s^y, tzv. slacky, takto vznikne model (CCR-I-OM-S).

$$\min_{\theta,\lambda,s^x,s^y} \theta$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j - s_r^y = y_{rO}, \qquad r = 1,2,\dots,s$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j + s_i^x = \theta x_{iO}\,, \qquad i = 1,2,\dots,m$$

$$\lambda \geq 0_n, s^x \geq 0_m, s^y \geq 0_s$$

Rovnakým spôsobom vieme odvodiť obálkový model aj pre výstupne orientovaný model. Výsledný tvar v zložkovom tvare bude vyzerať takto:

$$\max_{\psi,\lambda} \psi$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j \geq \psi y_{rO}, \qquad r = 1,2,\dots,s$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j \leq x_{iO}\,, \qquad i = 1,2,\dots,m$$

$$\lambda_j \geq 0, \qquad j = 1,2,\dots,n$$

Tento model sa nazýva obálkový výstupne orientovaný s konštantnými výnosmi z rozsahu, označíme ho (CCR-O-OM). Aj v tomto prípade uvedieme model so slackami, teda (CCR-O-OM-S).

$$\max_{\psi,\lambda,s^x,s^y} \psi$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j - s_r^y = \psi y_{rO}, \qquad r = 1,2,\dots,s$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j + s_i^x = x_{iO}\,, \qquad i = 1,2,\dots,m$$

$$\lambda \geq 0_n, s^x \geq 0_m, s^y \geq 0_s$$

Teraz nás bude zaujímať ako určiť (pseudo)efektivitu a akým spôsobom odlíšiť efektivitu od pseudoefektivity pomocou uvedených obálkových modelov. Pri multiplikatívnych modeloch sme (pseudo)efektivitu získali ako hodnotu účelovej funkcie v optimálnom riešení príslušnej úlohy v prípade vstupnej efektivity a ako prevrátenú hodnotu účelovej funkcie v optimálnom riešení príslušnej úlohy v prípade výstupnej efektivity. Keďže obálkové modely sú duálnymi úlohami multiplikatívnych, ktoré majú aspoň jedno prípustné aj optimálne riešenie, aj obálkové modely budú mať aspoň jedno prípustné aj optimálne riešenie. Navyše sa budú hodnoty účelových funkcií v optimálnych riešeniach rovnať. Teda z obálkových modelov vieme rovnakým spôsobom zistiť efektivitu príslušného DMU z hodnoty účelovej funkcie v optimálnom riešení danej úlohy. Potrebujeme ešte nájsť spôsob ako odlíšiť efektivitu od pseudoefektivity. Z teórie lineárneho programovania vieme, že ak máme dve ku sebe duálne úlohy, premenné jedného modelu budú navzájom komplementárne doplnkovým premenným z druhého modelu. Pre tieto navzájom komplementárne premenné platí, že v optimálnom riešení spĺňajú podmienku komplementarity. Navyše ostrokomplementárne riešenie existuje vždy. Tieto poznatky môžeme aplikovať na náš prípad, kde sú ku sebe navzájom duálne obálková a duálne úloha. Ďalším faktom je, že dvojice vektorov (u, v) a (s^{x*}, s^{y*}) sú k sebe komplementárne. Preto platí, že pre každé dvojice vektorov (u^*, v^*) a (s^{x*}, s^{y*}), ktoré sú optimálnymi riešeniami príslušných úloh sú splnené podmienky komplementarity:

$$v_i^* s_i^{x*} = 0, \qquad i = 1, \dots, m \tag{1.16}$$

$$v_i^* s_i^{y*} = 0, \qquad i = 1, \dots, s \tag{1.17}$$

Na základe týchto poznatkov sformulujeme nasledujúcu vetu, ktorá hovorí o tom, ako rozlíšiť pseudoefektivitu od efektivity:

Veta 3 [2, 4. prednáška, str. 11]. Kladné optimálne riešenie (u^*, v^*) úlohy CCR modelu v multiplikatívnom tvare ((CCR-I-MM) alebo (CCR-O-MM)) existuje vtedy a len vtedy, keď pre všetky optimálne riešenia (s^{x*}, s^{y*}) príslušnej úlohy CCR modelu v obálkovom tvare ((CCR-I-OM-S) alebo (CCR-O-OM-S)) platí: $s^{x*}=0$, $s^{y*}=0$, t.j.

$$\exists_{(u^*,v^*)opt.r.(MM)}: u^* > 0, v^* > 0 \Leftrightarrow \exists_{(s^{x*},s^{y*})opt.r.(OM)}: s^{x*} = 0, s^{y*} = 0$$

Dôkaz je uvedený v [2, 4. prednáška, str. 11].

Pseudoefektivitu teda vieme identifikovať z obálkového modelu určiť tak, že sa pozrieme na vektory slackov a pokiaľ sú nulové, účelová funkcia bude vyjadrovať efektivitu, inak pseudoefektivitu.

1.3 Orientované modely BCC s variabilnými výnosmi z rozsahu

V predchádzajúcej podkapitole sme si uviedli multiplikatívne aj obálkové modely. Vychádzali sme z pomeru váženého súčtu vstupov a váženého súčtu výstupov, ktorý predstavoval efektivitu. Kládli sme pri tom podmienku, že efektivita žiadneho DMU pri daných váhach nesmie byť väčšia ako 1. Z tejto myšlienky vznikol multiplikatívny model. Obálkový model sme odvodili ako duálnu úlohu k multiplikatívnemu, ale bližšie sme sa ním nezaoberali. Preto si teraz ukážeme akým spôsobom sa dá odvodiť obálkový model bez potreby dualizácie multiplikatívneho.

Najprv sa ale vráťme ku produkčnej funkcií a produkčnej množine. Povedali sme si, že produkčná funkcia je konkávna a rastúca. Produkčná množina je množina bodov vyjadrujúcich všetky možné kombinácie vstupov a výstupov, ktoré sú dosiahnuteľné. Zhora je ohraničená produkčnou funkciou a zdola nadrovinami predstavujúce nulové položky jednotlivých výstupov. Problém však je to, že produkčnú funkciu (a teda ani produkčnú množinu) zväčša nepoznáme, preto sa ju pokúšame aproximovať. Na to si potrebujeme sformulovať axiómy produkčnej množiny, na základe ktorých bude vytvorená.

Prvou požiadavkou je to, že sa v produkčnej množine budú nachádzať všetky dvojice vektorov (vstupov a výstupov), ktoré máme k dispozícií. Keďže sa tieto výstupy pri daných vstupoch podarilo dosiahnuť, určite sa musia nachádzať v produkčnej množine.

Druhou požiadavkou je konkávnosť produkčnej funkcie, a teda konvexnosť produkčnej množiny. Znamená to, že ak viem vyrobiť istý počet výstupov pri jedných vstupoch a nejaký počet výstupov pri druhých vstupoch, viem vyrobiť aj ľubovoľnú lineárnu kombináciu týchto výstupov pri príslušných vstupoch. Táto požiadavka vychádza z vlastností produkčnej funkcie a množiny.

Ďalšia požiadavka zahrňuje fakt, že ak vieme z určitého množstva vyprodukovať nejaké výstupy, vieme z neho vyprodukovať aj ľubovoľné menšie množstvo výstupov. Takisto vieme dosiahnuť daných výstupov využitím väčšieho množstva vstupov ako sme spotrebovali.

Poslednou požiadavkou môže byť to, že ak dokážem z istého množstva vstupov vyrobiť nejaké množstvo výstupov, viem z α-násobku týchto vstupov vyrobiť aj α-násobok výstupov.

Tieto požiadavky teraz sformulujeme do axióm produkčnej množiny, kde Z bude množina bodov vyjadrujúcich jednotlivú DMU, M bude množina bodov produkčnej množiny, x je vektor vstupov a y je vektor výstupov, pričom dvojice vektorov (x,y) určujú množinu M:

[2, 5. prednáška, str. 7]

(A1) $Z \subset M$

(A2) M je konvexná

(A3) $(x_A, y_A) \in M \wedge x_B \geq x_A => (x_B, y_A) \in M$ a tiež $(x_A, y_A) \in M \wedge y_B \leq y_A => (x_A, y_B) \in M$

(A4) $(x, y) \in M => (cx, cy) \in M, \ \forall c \geq 0$

Na základe týchto axiómy sformulujeme nasledovné definície:

Definícia 1 [2, 5. prednáška, str. 8]. Najmenšiu množinu M_{VRS}, ktorá spĺňa axiómy (A1), (A2) a (A3), budeme nazývať produkčnú množinu s variabilnými výnosmi z rozsahu.

Definícia 2 [2, 5. prednáška, str. 8]. Najmenšiu množinu M_{CRS} spĺňajúcu axiómy (A1), (A2), (A3) a (A4) nazveme produkčnou množinou s konštantnými výnosmi z rozsahu.

Teraz postupne odvodíme analytické vyjadrenie týchto množín. Podľa axiómy (A2) musíme zaručiť konvexnosť produkčnej množiny. To znamená, že do produkčnej množiny určite patria všetky body (x,y) spĺňajúce nasledovné vzťahy, kde x_i je vektor vstupov i-teho DMU a y_i je výstup i-teho DMU:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \tag{1.18}$$

$$\lambda \geq 0_n \tag{1.19}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = x \tag{1.20}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i = y \tag{1.21}$$

Vidíme, že tým je splnená aj axióma (A1), pretože keď sa vektor λ rovná vektoru so samými nulami, pričom na i-tej pozícii je 1, prvé dve podmienky sú splnené a z tretej a štvrtej vyplýva $x = x_i$ a $y = y_i$, a teda i-te DMU patrí do produkčnej množiny.

Teraz potrebujeme túto množinu rozšíriť o body obsiahnuté v axióme (A3). To znamená, že ľubovoľné zvýšenie vstupov oproti nejakému bodu z produkčnej množiny pri zachovaní výstupov musí tiež patriť do produkčnej množiny. Teda budú do množiny patriť navyše body spĺňajúce nasledovnú nerovnosť:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \leq x$$

Takisto musia do produkčnej množiny patriť body s nižšími výstupmi ako ľubovoľný bod z produkčnej množiny. Tieto body sa preto dajú zapísať takto:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i \geq y$$

Dostávame teda množinu s variabilnými výnosmi z rozsahu určenú nasledovne:

$$M_{VRS} = \left\{ (x, y) \in R^{m+s} \colon \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \leq x \, , \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i \geq y \, , \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \, , \lambda \geq 0_n \right\}$$

Teraz odvodíme vyjadrenie množiny aj pre konštantné výnosy z rozsahu. Aj v tomto prípade vychádzame z axióm ako v pri variabilných výnosov z rozsahu, teda (A1), (A2) a (A3), ku ktorým je navyše pridaná axióma (A4). Máme teda rovnakú sústavu obmedzení (1.18) - (1.21) ako pri variabilných výnosoch z rozsahu a musíme do nich zakomponovať aj poslednú axiómu (A4). To znamená, že do množiny musia patriť aj všetky body $(x, y) \in M => (cx, cy) \in M, \ \forall c \geq 0$. Teda musia byť splnené nasledovné nerovnosti:

$$c \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} c \lambda_i x_i \leq x$$

$$c \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i = \sum_{i=1}^{n} c \lambda_i y_i \geq y$$

Môžeme si všimnúť, že miesto váh λ_i teraz používame váhy $c\lambda_i \in [0, \infty)$. Pre tie však už neplatí podmienka, že ich súčet je rovný 1. Preto pre množinu bodov pri konštantných výnosoch z rozsahu budú platiť rovnaké obmedzenia ako v prípade variabilných výnosov, akurát bude chýbať podmienka na súčet váh rovný 1. Množina M_{CRS} bude teda daná nasledovne:

$$M_{CRS} = \left\{ (x, y) \in R^{m+s} \colon \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \leq x \, , \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i \geq y \, , \lambda \geq 0_n \right\}$$

Môžeme si všimnúť istú podobnosť množiny M_{CRS} s obálkovými (vstupným aj výstupným) modelmi s konštantnými výnosmi z rozsahu. Rozdiel v ohraničeniach úloh lineárneho programovania (CCR-I-OM) a (CCR-O-OM) od podmienok pre množinu M_{CRS} je len v parametri θ, respektíve ψ. V účelovej funkcii týchto úloh minimalizujeme, respektíve maximalizuje práve tento parameter. Keď sa pozrieme bližšie na model (CCR-I-OM), zistíme, že sa snažíme nájsť najmenšie také číslo θ, že každý vstup nejakého bodu, ktorý má rovnaké alebo väčšie výstupy, z produkčnej množiny bude najviac θ-násobok vstupov daného DMU. Keďže sa snažíme mať čo najnižšie vstupy, čím je toto číslo θ menšie, tým menej vstupov spotrebúvame, a tým efektívnejšie vyrábame. Úloha (CCR-I-OM) je duálnou úlohou k úlohe (CCR-I-MM), pri ktorej sme si ukázali, že optimálne riešenie je z intervalu [0;1], preto aj optimálne riešenie úlohy (CCR-I-OM) bude z rovnaké, a teda aj z rovnakého intervalu. Geometricky sa dá toto číslo interpretovať ako potrebné zníženie vstupov aby bolo naše DMU efektívne. To znamená, že ak každý vstup prenásobím číslom θ, daný bod bude z produkčnej množiny a zároveň bude na hranici efektívnosti, respektíve pseudoefektívnosti, pretože už nevieme nájsť bod z produkčnej množiny s nižšími vstupmi.

V prípade výstupného modelu (CCR-O-OM) je situácia analogická ako pri vstupne orientovanom modeli (CCR-I-OM), akurát miesto hľadania bodu z produkčnej množiny s čo najmenšími vstupmi sa snažíme nájsť taký bod, ktorý má výstupy čo najväčšie pri zachovaní rovnakých vstupov. Hľadáme teda maximálne ψ také, že sa prenásobením všetkých výstupov daného DMU stále budeme nachádzať v produkčnej množine (pričom vstupy zostanú zachované). Tu naopak platí, že čím menšie ψ je, tým vyrábame efektívnejšie. Aj v tomto prípade platí, že (CCR-O-OM) je duálna úloha ku (CCR-O-MM), a teda budú mať rovnaké optimálne hodnoty účelovej funkcie. Parameter ψ teda vyjadruje koľko násobne musíme mať väčšie výstupy aby sme sa dostali na hranicu efektívnosti, pričom jeho prevrátená hodnota určuje efektívnosť daného DMU.

Ukázali sme si čo vyjadrujú ohraničenia úloh (CCR-I-OM) a (CCR-O-OM) ako parametre θ a ψ v účelovej funkcia. Teraz na základe toho odvodíme vstupne aj výstupne orientovaný obálkový model s variabilnými výnosmi z rozsahu. Keď sme porovnávali analytické vyjadrenia produkčných množín s konštantnými a variabilnými výnosmi, líšili sa jedine v podmienke (1.18). Preto stačí zmeniť ohraničenia úlohy tak, aby bola množina prípustných riešení zhodná s množinou MVRS. To spravíme pridaním ohraničenia (1.18). Dostávame teda vstupne orientovaný obálkový model s variabilnými výnosmi z rozsahu, ktorý budeme označovať (BCC-I-OM):

$$\min_{\theta,\lambda} \theta$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j \geq y_{rO}, \qquad r = 1,2,\dots,s$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j \leq \theta x_{iO}\,, \qquad i = 1,2,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

$$\lambda_j \geq 0, \qquad j = 1,2,\dots,n$$

Takisto aj v prípade variabilných výnosov z rozsahu môžeme použiť model s rovnosťami namiesto nerovností so slackami, model (BCC-I-OM-S):

$$\min_{\theta,\lambda,s^x,s^y} \theta$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j - s_r^y = y_{rO}, \qquad r = 1,2,\dots,s$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j + s_i^x = \theta x_{iO}\,, \qquad i = 1,2,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

$$\lambda \geq 0_n, s^x \geq 0_m, s^y \geq 0_s$$

Aj vo výstupne orientovanom modeli pridáme ohraničenie (1.18) a zmeníme tým model s konštantnými výnosmi z rozsahu na model s variabilnými výnosmi z rozsahu. Tento model označíme (BCC-I-OM).

$$\max_{\psi,\lambda} \psi$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j \geq \psi y_{rO}, \qquad r = 1,2,\dots,s$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j \leq x_{iO}\,, \qquad i = 1,2,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

$$\lambda_j \geq 0, \qquad j = 1,2,\dots,n$$

Pre úplnosť uvedieme aj model so slackami, model označený (BCC-I-OM-S).

$$\max_{\psi,\lambda,s^x,s^y} \psi$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j - s_r^y = \psi y_{rO}, \qquad r = 1,2,\dots,s$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j + s_i^x = x_{iO}, \qquad i = 1,2,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

$$\lambda \geq 0_n, s^x \geq 0_m, s^y \geq 0_s$$

Efektivita daného DMU bude vyjadrená rovnakým spôsobom ako v prípade konštantných výnosov z rozsahu, teda hodnota účelovej funkcie v optimálnom riešení v prípade vstupne orientovaného modelu a prevrátená hodnota účelovej funkcie v optimálnom riešení v prípade výstupne orientovaného modelu. Takisto odlíšenie pseudoefektivity od efektivity bude rovnaké ako pri konštantných výnosoch z rozsahu.

1.4 Aditívne modely

Pri odvodzovaní aditívneho modelu s konštantnými výnosmi z rozsahu vychádzame z maximalizačnej úlohy

$$\max_{u,v} \frac{u^T y_O}{v^T x_O} \tag{1.22}$$

$$\frac{u^T y_j}{v^T x_j} \leq 1, \qquad j = 1,2,\dots,n \tag{1.23}$$

$$u > 0_s, v > 0_m \tag{1.24}$$

ktorú sa snažíme upraviť tak, že dostaneme úlohu lineárneho programovania. Predpokladáme, že platí (P1). Z podmienky $v > 0_m$ vyplýva, že menovateľ ohraničenia (1.23) je pre každé j kladný => nerovnicu môžem prenásobiť výrazom $v^T x_j$. Dostávame

$$u^T y_j \leq v^T x_j, \qquad j = 1,2,\dots,n \tag{1.25}$$

$$u^T y_j - v^T x_j \leq 0, \qquad j = 1,2,\dots,n \tag{1.26}$$

Táto úprava nám nijako nezmenila množinu prípustných ani optimálnych riešení, preto túto úpravu môžeme nazvať ekvivalentnú. Aby sme mohli dostať úlohu lineárneho programovania, nesmú v nej vystupovať ostré nerovnosti. Tento problém vyriešime tak, že ohraničenie (1.24) nahradíme nasledovným ohraničením:

$$u \geq 1_s, v \geq 1_m \tag{1.27}$$

kde 1_s predstavuje vektor samých jednotiek dĺžky s. Dôvod, prečo môžeme tieto ohraničenia nasledovným spôsobom vymeniť je ten, že ak máme nejaké prípustné riešenie, existuje konštanta, ktorou keď prenásobením vektory u aj v, bude splnená podmienka (1.27). Navyše je splnená podmienka (1.26) pre pôvodné vektory u aj v práve vtedy, keď je splnená pre vektory prenásobené spomínanou konštantou. V účelovej funkcii sa táto konštanta vykráti, nakoľko sa jeden vektor nachádza v čitateli a druhý v menovateli, a teda hodnota účelovej funkcie bude nezmenená. Preto sa aj v tomto prípade jedná o ekvivalentnú úpravu. Posledná úprava, ktorá je potrebná aby sme dostali úlohu lineárneho programovania, sa týka odstránenia zlomku v účelovej funkcii. Na rozdiel od CCR modelu, v tomto modeli nemôžeme použiť podmienku (1.8), prípadne (1.13), pretože by sa nám mohlo stať, že nebudeme mať žiadne prípustné riešenie. A ak aj nejaké prípustné riešenie existovať bude, zmenší sa tým množina prípustných riešení, čo môže ovplyvniť množinu optimálnych riešení, a teda aj efektivitu/neefektivitu niektorých DMU. Riešením môže byť nahradenie pôvodného zlomku výrazom

$$u^T y_O - v^T x_O$$

teda podobným spôsobom ako pri ohraničení (1.5). Problém je, že nie vždy sa hodnota pôvodnej účelovej funkcie rovná 1 (teda, že DMU je efektívne) aby mohla byť táto úprava ekvivalentná. Dobrou vlastnosťou tejto úpravy však je, že DMU je efektívne práve vtedy, keď hodnota pôvodnej účelovej funkcie je 1 a to nastáva práve vtedy, keď hodnota upravenej účelovej funkcie je 0. Preto, ak nám stačí vedieť len, či dané DMU je alebo nie je efektívne, tento model sa zdá byť vhodný. Nevýhodou však je to, že nám v prípade neefektivity vyhodí len akýsi rozdiel, ktorý nám nič nehovorí o tom, ako veľmi je DMU neefektívne. Nie je vôbec vylúčené, že DMU s väčšou hodnotou upravenej účelovej funkcie môže byť efektívnejší, teda hodnotu pôvodnej účelovej funkcie.

Výsledný tvar multiplikatívneho aditívneho modelu s konštantnými výnosmi, ktorý budeme označovať (AD-MM-CRS) je takýto:

$$\max_{u,v} u^T y_O - v^T x_O$$

$$u^T y_j - v^T x_j \leq 0, \qquad j = 1,2, \dots, n$$

$$u \geq 1_s, v \geq 1_m$$

Obálkový model, ktorý pomenujeme (AD-OM-CRS), získame ako duálnu úlohu k multiplikatívnemu modelu (AD-MM-CRS):

$$\min_{\lambda, s^x, s^y} -(1_m^T s^x + 1_s^T s^y)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i + s^x = x_O$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \lambda_i - s^y = y_O$$

$$\lambda, s^x, s^y \geq 0$$

Odvodenie modelu s variabilnými výnosmi z rozsahu vychádza z obálkového aditívneho modelu s konštantnými výnosmi. Líši sa od neho, podobne ako obálkový CCR model (s konštantnými výnosmi z rozsahu) od obálkového BCC modelu (s variabilnými výnosmi z rozsahu), pridaním podmienky (1.18). Obálkový aditívny model s variabilnými výnosmi z rozsahu (AD-OM-VRS) sa bude dať teda zapísať nasledovne:

$$\min_{\lambda, s^x, s^y} -(1_m^T s^x + 1_s^T s^y)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i + s^x = x_O$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \lambda_i - s^y = y_O$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

$$\lambda, s^x, s^y \geq 0$$

Obálkový model je duálna úloha k multiplikatívnej úlohe. Ľahko si teda vieme previesť úlohu (AD-OM-VRS) na multiplikatívny aditívny model s variabilnými výnosmi z rozsahu (AD-MM-VRS):

$$\max_{u, v, v_O} u^T y_O - v^T x_O - v_O \tag{1.28}$$

$$u^T y_j - v^T x_j - v_O \leq 0, \qquad j = 1,2, \dots, n \tag{1.29}$$

$$\frac{u^T y_j}{v^T x_j} \leq 1, \qquad j = 1,2, \dots, n \tag{1.30}$$

$$u \geq 1_s, v \geq 1_m \tag{1.31}$$

Čo sa týka nedostatku so zle interpretovateľnou hodnotou účelovej funkcie, dá riešiť tak, že namiesto jednotkových vektorov v účelovej funkcií použijeme vektory $w^x >$

$0, w^y > 0$ zohľadňujúce dáta daného vstupu, respektíve výstupu. Je niekoľko možností ako môžeme tieto vektory definovať:

$$w_i^x = \frac{1}{(m+s)R_i^x}, \qquad i = 1, \dots, m$$

$$w_j^y = \frac{1}{(m+s)R_j^y}, \qquad j = 1, \dots, s$$

kde:

[2, 8. prednáška, str. 6]

a) $R_i^x = \max_k x_{ik}$, $R_j^y = \max_k x_{jk}$

b) $R_i^x = \frac{1}{n}\sum_k x_{ik}$, $R_j^y = \frac{1}{n}\sum_k x_{jk}$

c) $R_i^x = \max_k x_{ik} - \min_k x_{ik}$, $R_j^y = \max_k x_{jk} - \min_k x_{jk}$

d) R_i^x je rovné štandardnej odchýlke *i*-teho vstupu a R_j^y štandardnej odchýlke *j*-teho výstupu

My sa prikloníme k poslednej možnosti, teda tej, kde sa na výpočet používa štandardná odchýlka dát daného vstupu, respektíve výstupu. Tento model označíme (AD-W-CRS) v prípade konštantných výnosov z rozsahu, (AD-W-VRS), ak používame variabilné výnosy z rozsahu.

Ďalej v texte budeme odkazovať na klasický aditívny model, pretože všetky operácie, ktoré budeme robiť budú rovnaké a rozdiel bude len v účelovej funkcií.

1.5 Úlohy bez vstupov alebo výstupov

V tejto podkapitole si ukážeme ako používať odvodené modely v prípade, že vo vstupných dátach máme buď iba samé vstupy a žiadne výstupy alebo žiadne vstupy a iba výstupy. Najprv si tento problém ukážeme na príklade a následne ho zovšeobecníme.

Príkladom na úlohu so vstupmi bez výstupov môže byť úloha na hľadanie efektivity jednotlivých miest v oblasti verejného osvetlenia. Predpokladajme sedem rovnako veľkých miest, ktoré sa snažia pokryť osvetlením celé svoje mesto. Ako vstupy bude počet lámp pouličného osvetlenia a počet opravárov, ktorí sa starajú o poruchy osvetlenia. Dáta sú uvedené v Tab. 1.6.

	A	B	C	D	E	F	G
Počet lámp	80	120	90	60	100	100	80
Počet opravárov	5	3	4	7	6	3	10

Tab. 1.6 Dáta k príkladu na úlohu bez výstupov

Ak by sme sa rozhodli použiť vstupne orientovaný obálkový model s konštantnými výnosmi z rozsahu, budeme riešiť nasledovnú úlohu, kde nebudú vystupovať žiadne výstupy:

$$\min_{\theta,\lambda} \theta \tag{1.32}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j \leq \theta x_{iO}, \qquad i = 1,2,\dots,m \tag{1.33}$$

$$\lambda_j \geq 0, \qquad j = 1,2,\dots,n \tag{1.34}$$

Vieme, že hodnoty x_{ij} sú nezáporné a máme podmienku na kladnosť váh λ_i. Preto ľavá strana ohraničenia (1.33) bude vždy väčšia alebo rovná 0, a teda aj premenná θ bude nezáporná. Zvolením váh $\lambda_j = 0, j = 1,2,\dots,n$ dostávame ohraničenie

$$0 \leq \theta x_{iO}, \qquad i = 1,2,\dots,m$$

kde x_{iO} je kladné. Preto ak hľadáme θ čo najmenšie nezáporné, bude vždy dosahovať hodnotu 0. To by znamenalo, že žiadne DMU nemôže byť efektívne. Ďalšou možnosťou je použiť miesto konštantných variabilné výnosy z rozsahu. Dostaneme takúto úlohu:

$$\min_{\theta,\lambda} \theta$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j \leq \theta x_{iO}, \qquad i = 1,2,\dots,m$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0, \qquad j = 1,2,\dots,n$$

Táto úloha je však ekvivalentná s úlohou s konštantnými výnosmi z rozsahu, kde boli použité výstupy pre každé DMU rovné 1. Táto úloha sa už bude správať ako bežná úloha so vstupmi a výstupmi, ktorou sme sa zaoberali v kapitole 1.2. Interpretácia jednotkových výstupov môže byť taká, že použité vstupy vykonali 1 celú úlohu, na ktorú boli určené, v našom príklade lampy osvetlili 1 celé mesto.

Pre prípad so samými výstupmi bez akýchkoľvek vstupov je situácia podobná. Výstupne orientovaný obálkový model s konštantnými výnosmi z rozsahu bez ohraničení, kde vystupujú vstupy je aj v tomto prípade nepoužiteľný:

$$\max_{\psi,\lambda} \psi \tag{1.35}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j \geq \psi y_{rO}, \qquad r = 1,2,\dots,s \tag{1.36}$$

$$\lambda_j \geq 0, \qquad j = 1,2,\dots,n \tag{1.37}$$

Keďže parametre y_{rj} sú nezáporné (ale platí $\forall r = 1,2,\dots,s\ \exists j = 1,2,\dots,n: y_{rj} > 0$) a váhy λ_j sú zhora neohraničené, ľavá strana obmedzenia úlohy (1.36) je neohraničená, a teda aj premenná ψ je neohraničená pre každé DMU. Aj v tomto prípade zameníme konštantné výnosy z rozsahu za variabilné:

$$\max_{\psi,\lambda} \psi$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j \geq \psi y_{rO}, \qquad r = 1,2,\dots,s$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0, \qquad j = 1,2,\dots,n$$

Môžeme si všimnúť, že aj v tejto situácií je úloha zhodná s úlohou s konštantnými výnosmi z rozsahu, do ktorej sme pridali každému DMU jeden vstup rovný 1.

Poznámka 1: Ak by sme každému DMU pridali do úlohy so samými vstupmi a variabilnými výnosmi z rozsahu jeden výstup hodnoty 1 alebo do úlohy so samými výstupmi a variabilnými výnosmi z rozsahu jeden vstup hodnoty 1, úloha by mala navyše ohraničenie (1.18), ktoré sa však už v úlohe nachádza, preto by úloha zostala rovnaká.

Ak by sme sa rozhodli v príklade uvedenom na začiatku tejto podkapitoly použiť aditívny obálkový model s konštantnými výnosmi z rozsahu, z ktorého vyradíme všetky členy, ktoré obsahujú výstupy, úloha bude vyzerať nasledovne:

$$\min_{\lambda,s^x} -1_m^T s^x = -\max_{\lambda,s^x} 1_m^T s^x$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\lambda_i + s^x = x_O$$

$$\lambda, s^x \geq 0$$

Aj v tomto prípade sú vektory x_i nezáporné a nenulové a vektor váh λ ako aj vektor slackov s^x sú nezáporné. Preto ak za vektor λ dosadíme nulový vektor, vektor $\sum_{i=1}^{n} x_i\lambda_i$ bude dosahovať najnižšiu možnú hodnotu v každej zložke rovnú 0, a teda vektor

$s^x = x_O$ bude dosahovať maximálnu možnú hodnotu v každej zložke (aby bola zachovaná nezápornosť parametrov). Hodnota účelovej funkcie v optimálnom riešení teda vždy bude rovná

$$-1_m^T x_O = -\sum_{i=1}^{m} x_{iO} < 0$$

Preto ani v tomto prípade nebude nikdy ani jedno DMU efektívne. Aj v prípade aditívneho modelu vyskúšame prejsť z konštantných výnosov na variabilné výnosy z rozsahu pridaním podmienky (1.18) aby nemohla nastať situácia, že vektor váh bude nulový. Úloha bude vyzerať takto:

$$\begin{gathered}\min_{\lambda, s^x} -1_m^T s^x = -\max_{\lambda, s^x} 1_m^T s^x \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i + s^x = x_O \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \\ \lambda, s^x \geq 0\end{gathered} \tag{1.38}$$

Táto úloha však už nie je ekvivalentná s úlohou, keď do dát pridáme každému DMU jeden výstup rovný 1. Vtedy vyzerá úloha takto:

$$\begin{gathered}\min_{\lambda, s^x, s^y} -(1_m^T s^x + s^y) \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i + s^x = x_O \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i - s^y = 1 \\ \lambda, s^x, s^y \geq 0\end{gathered}$$

Teraz si ukážeme jednoduchý príklad, kde budú tieto úlohy vykazovať inú hodnotu účelovej funkcie v optimálnom riešení:

Budeme mať 2 DMU s jediným vstupom, DMU1 ho bude mať rovný 0,5 a druhý 0,3. Jediné prípustné, a teda aj optimálne riešenie prvej z dvojice úloh, kde skúmame efektivitu DMU1, bude -0,2. V druhej úlohe je už viac prípustných riešení. Jedným z nich (je to optimálne riešenie) je, ak $\lambda = \frac{5}{3}$. Potom $s^y = \frac{2}{3}$ a $s^x = 0$. Hodnota účelovej funkcie je vtedy rovná $s^x + s^y = -\frac{2}{3} < -0{,}2$. Preto sa musíme rozhodnúť, ktorá z úloh je vhodnejšia na počítanie efektivity pomocou aditívneho modelu pri samých vstupoch. Keďže v úlohe nemáme žiadne výstupy, bude rozumnejšie ich do dát nasilu nepridávať, nakoľko to ovplyvní výsledné hodnoty. Navyše by bol problém, ak by sme chceli požiť upravený model (AD-W-CRS), pretože disperzia výstupov by bola 0 a do úlohy dosadzujeme jej prevrátenú hodnotu. Preto spôsob ako si poradiť so situáciou bez výstupov je ten, že použijeme úlohu (1.38).

Ak sa v úlohe nenachádzajú žiadne vstupy, ale len výstupy a rozhodli sme sa pre aditívny model, použitím konštantných výnosov z rozsahu dostaneme takúto úlohu:

$$\min_{\lambda, s^x, s^y} -1_s^T s^y$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \lambda_i - s^y = y_O$$

$$\lambda, s^x, s^y \geq 0$$

Keďže zložky vektora λ môžem zvoliť ľubovoľne veľké, budú tým rásť aj zložky vektora $\sum_{i=1}^{n} y_i \lambda_i$, a teda aj vektora s^y až do nekonečna. Úloha je neohraničená zdola. Budeme teda postupovať rovnako ako v prípade samých vstupov bez výstupov a zmeníme konštantné výnosy z rozsahu na variabilné pridaním ohraničenia výrazu (1.18). Úloha bude nasledovná:

$$\min_{\lambda, s^x, s^y} -1_s^T s^y$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \lambda_i - s^y = y_O$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \tag{1.39}$$

$$\lambda, s^x, s^y \geq 0$$

Ani v tomto prípade sa táto úloha nezhoduje s úlohou, keď namiesto zmeny na variabilné výnosy z rozsahu pridáme každému DMU jeden vstup veľkosti 1. V takom prípade by úloha vyzerala takto:

$$\min_{\lambda, s^x, s^y} -(s^x + 1_s^T s^y)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i + s^x = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i\lambda_i - s^y = y_O$$

$$\lambda, s^x, s^y \geq 0$$

Tak ako pri samých vstupoch, aj pri samých výstupoch uprednostníme úpravu konštantných výnosov z rozsahu na variabilné z tých istých dôvodov.

1.6 Invariantnosť

Invariantnosť je vlastnosť, ktorá vyjadruje, či určitá transformácia vstupných dát zmení výsledok skúmania alebo nie. V prípade DEA modelov môže byť pod pojmom transformácia myslený napríklad posun alebo zmena jednotiek. Nás bude v tejto práci zaujímať invariantnosť voči posunu. Ešte si však musíme ujasniť, čo znamená, že sa nezmení výsledok. Jedna možnosť je, že efektivita DMU bude zachovaná, teda že neefektívne DMU zostane neefektívne a efektívne DMU zostane efektívne. Silnejšou požiadavkou môže byť zachovanie účelovej funkcie príslušného modelu. My použijeme na invariantnosť nasledovnú definíciu.

Definícia: Model je invariantný vzhľadom na posun, ak sa zvýšením, respektíve znížením, všetkých alebo len niektorých vstupov alebo výstupov zachová hodnota účelovej funkcie modelu v optimálnom riešení.

Dôvod prečo sa táto vlastnosť využíva si ukážeme na príklade, ktorý sme použili v 1. kapitole pri efektivite s jedným vstupom a jedným výstupom pri konštantných výnosoch z rozsahu. Efektivitu sme vypočítali pre každú predajňu, ale zistili sme, že sme do údajov nezapočítali 10 chlebov v každej pekárni, ktoré sú určené pre zamestnancov. Dáta k príkladu sú uvedené v Tab. 1.7.

DMU	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**
Počet predavačiek	2	3	5	4	7	1	3	2
Počet chlebov	38	46	60	54	52	23	58	36
Chleby/predavačky	19	15,33	12	13,5	7,43	23	19,33	18
Efektivita E	**0,826**	**0,667**	**0,522**	**0,587**	**0,323**	**1**	**0,841**	**0,783**

Tab. 1.7 Dáta k príkladu na ilustráciu invariantnosti

Z Tab. 1.7 si môžeme všimnúť, že sa zmenili nielen vypočítané efektivity (čo sú hodnoty účelovej funkcie v optimálnom riešení, respektíve jej prevrátená hodnota vo výstupne orientovanom modeli), ale aj efektívnosť DMU F, ktoré sa stala efektívne a DMU G, ktoré je teraz neefektívne. Preto sa v tomto prípade jedná o neinvariantnosť.

Teraz si ukážeme ktorý z doteraz odvodených modelov invariantný voči posunu je a ktorý nie. Keďže obálkové modely sú duálne ku multiplikatívnym, hodnota ich účelových funkcií bude rovnaká, a teda invariantnosť platí rovnako pre oba modely. Preto nám stačí zisťovať invariantnosť iba pre obálkový model. Pre posun vstupov budeme používať označenie Δx a pre posun výstupov Δy.

(CCR-I-OM)

Po aplikovaní posunu na tento model dostávame nasledovnú úlohu:

$$\min_{\theta,\lambda} \theta$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j + \Delta y \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \geq y_{rO} + \Delta y, \qquad r = 1,2,\dots,s$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j + \Delta x \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \leq \theta x_{iO} + \theta\Delta x, \qquad i = 1,2,\dots,m$$

$$\lambda_j \geq 0, \qquad j = 1,2,\dots,n$$

Aby bola táto úloha ekvivalentná s úlohou (CCR-I-OM), muselo by platiť $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$ a zároveň $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = \theta$. Dokonca aj keď $\theta = 1$, nemôžeme všeobecne povedať, že platí $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$. Preto nemôžeme vstupne orientovaný model s konštantnými výnosmi vyhlásiť za invariantný voči posunu.

(CCR-O-OM)

Posunom v tomto modeli dostaneme nasledovnú úlohu:

$$\max_{\psi,\lambda} \psi$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j + \Delta y \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \geq \psi y_{rO} + \psi y, \qquad r = 1,2,\dots,s$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j + \Delta x \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \leq x_{iO} + \Delta x\,, \qquad i = 1,2,\dots,m$$

$$\lambda_j \geq 0, \qquad j = 1,2,\dots,n$$

Aby bola táto úloha ekvivalentná s úlohou (CCR-O-OM), aj v tomto prípade by muselo platiť $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$ a zároveň $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = \psi$. Ani v tomto modeli to nemáme zaručené, že to platí, preto ani výstupne orientovaný model s konštantnými výnosmi z rozsahu nie je invariantný na posun.

(BCC-I-OM)

$$\min_{\theta,\lambda} \theta \tag{1.40}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j + \Delta y \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \geq y_{rO} + \Delta y, \qquad r = 1,2,\dots,s \tag{1.41}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j + \Delta x \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \leq \theta x_{iO} + \theta\Delta x, \qquad i = 1,2,\dots,m \tag{1.42}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \tag{1.43}$$

$$\lambda_j \geq 0, \qquad j = 1,2,\dots,n \tag{1.44}$$

Táto úloha bude ekvivalentná s pôvodnou úlohou (BCC-I-OM) vtedy, ak bude platiť $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ a zároveň $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \theta$. Vidíme, že prvá podmienka platí vždy, pretože sa rovnaký výraz nachádza medzi ohraničeniami úlohy. Túto podmienku sme dostali z ohraničenia (1.41), v ktorom sme posúvali výstupy. Druhá podmienka na invariantnosť však splnená všeobecne byť nemôže. Táto podmienka sa týkala ohraničenia (1.42), kde boli posúvané vstupy. Z toho nám teda vyplýva, že ak posúvame iba výstupy, model bude invariantný. Ak však posúvame aj vstupy, invariantnosť z modelu zmizne, a teda v konečnom dôsledku model nie je invariantný na posun.

(BCC-O-OM)

$$\max_{\psi,\lambda} \psi \tag{1.45}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j + \Delta y \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \geq \psi y_{rO} + \psi\Delta y, \qquad r = 1,2,\dots,s \tag{1.46}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j + \Delta x \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \leq x_{iO} + \Delta x, \qquad i = 1,2,\dots,m \tag{1.47}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \tag{1.48}$$

$$\lambda_j \geq 0, \qquad j = 1,2,\dots,n \tag{1.49}$$

V tomto prípade dostávame na ekvivalentnosť s úlohou (BCC-O-OM) podmienky $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \theta$. Podobne ako pri vstupnom modeli, aj tu je prvá podmienka splnená vždy, nakoľko je zhodná s jedným z ohraničení úlohy a druhá je splnená len v špecifických prípadoch. Prvá podmienka sa však vzťahuje na ohraničenie (1.47), v ktorom sme posúvali vstupy, a teda je úloha invariantná na posun vstupov. Všeobecne úloha (BCC-O-OM) invariantná nie je, lebo v ohraničení (1.46) s posunom výstupov podmienka na ekvivalenciu úloh nie je splnená.

(AD-OM-CRS):

$$\min_{\lambda,s^x,s^y} -(1_m^T s^x + 1_s^T s^y)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\lambda_i + \Delta x \sum_{j=1}^{n} \lambda_j + s^x = x_O + \Delta x$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i\lambda_i + \Delta y \sum_{j=1}^{n} \lambda_j - s^y = y_O + \Delta y$$

$$\lambda, s^x, s^y \geq 0$$

Pri aditívnom modeli s konštantnými výnosmi z rozsahu je uvedená úloha s posunmi ekvivalentná s pôvodnou úlohou (AD-MM-CRS) vtedy, keď je splnená podmienka $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Jedná sa však o konštantné výnosy z rozsahu, preto tento vzťah platí len vo špecifickom prípade. Preto ani tento model nie je invariantný voči posunu.

(AD-OM-VRS):

$$\min_{\lambda,s^x,s^y} -(1_m^T s^x + 1_s^T s^y)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\lambda_i + \Delta x \sum_{j=1}^{n} \lambda_j + s^x = x_O + \Delta x$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i\lambda_i + \Delta y \sum_{j=1}^{n} \lambda_j - s^y = y_O + \Delta y$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

$$\lambda, s^x, s^y \geq 0$$

Táto úloha je rovnaká s predchádzajúcou, teda s úlohou (AD-OM-CRS) s posunom, akurát je v tejto úlohe navyše ohraničenie $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Tým pádom sú splnené aj všetky podmienky na ekvivalenciu tejto úlohy s pôvodnou úlohou (AD-OM-VRS) bez posunu. To znamená, že pre každé DMU vyjde rovnaká efektivita pred posunom ako po posune a to znamená, že sa jedná o invariantný model. Keďže môžeme robiť ľubovoľné posuny, kde znižujeme vstupy, prípadne výstupy, modelu nebude vadiť ani keď sa dostaneme do záporných čísel. Hoci sme na začiatku predpokladali len nezáporné hodnoty vstupov a výstupov, sú situácie, keď potrebujeme pracovať aj so zápornými hodnotami a vtedy je prípustné použiť model (AD-OM-VRS).

2 Kritériá akcií

V celej kapitole vychádzame z [4].

V predchádzajúcich kapitolách sme sa oboznámili s DEA modelmi. Tie využijeme na nájdenie efektivity jednotlivých akcií. Samotná akcia nič nevyrába, preto pod pojmami vstupy a výstupy budeme musieť rozumieť niečo iné. Každá akcia je vydaná nejakou firmou, pričom o každej z nich si vieme nájsť rôzne údaje ako sa im darilo v predchádzajúcich obdobiach. Existuje veľa faktorov, ktoré sa dajú skúmať. My budeme pracovať s niekoľkými z nich, pričom si ich rozdelíme do 2 skupín. Jedna skupina bude obsahovať kritéria, ktoré nám vedia priblížiť dôveryhodnosť danej firmy a druhá bude obsahovať kritéria udávajúce výnosnosť investície do danej firmy v predchádzajúcich rokoch. Investor sa snaží na svojich investíciách čo najviac zarobiť, ale takisto by sa mal pozerať aj na spoľahlivosť danej firmy, aby minimalizoval pravdepodobnosť, že firmu, do ktorej investoval svoje úspory, zasiahne pád alebo dokonca bankrot. Preto má zmysel sa pozerať nielen na kritéria, ktoré hovoria o výnosnosti investície, ale aj tie, ktoré hovoria o dôveryhodnosti.

Čo sa týka hodnôt, ktoré jednotlivé faktory zobrazujú, vieme faktory rozdeliť do 3 skupín. Jedny sú také, ktoré čím sú väčšie, tým je pre investora výhodnejšie do nich investovať. Druhá skupina tvorí tie, ktoré sú pre investora príťažlivejšie s čo najnižšou hodnotou. Poslednú skupinu tvoria tie faktory, ktoré sú pre budúceho investora nezaujímavé, a teda je indiferentný, či daný faktor má vysokú alebo nízku hodnotu. Pripomeňme, že v DEA modeloch sme sa snažili mať vstupy čo najmenšie a výstupy, naopak, čo najväčšie. Preto by sme za vstupy mohli považovať tie faktory, ktoré čím sú nižšie, tým sú pre nás ako investora lepšie a za výstupy tie, ktoré sú pre investora lepšie, keď sú čo najväčšie. Tie faktory, ktoré sú pre nás nepodstatné, do úloh vkladať nebudeme, pretože neovplyvňujú naše rozhodnutie, či investovať alebo nie do danej akcie.

Najprv uvedieme tie kritéria, ktoré ukazujú dôveryhodnosť danej firmy.

Debt to equity – označované ako D/E vyjadruje pomer dlhu ku vlastnému kapitálu. Toto číslo ukazuje akým spôsobom je firma financovaná. Čím je toto číslo väčšie, tým je väčší dlh v porovnaní s vlastným kapitálom, a tým je pre akcionára väčšie riziko, že príde o svoje peniaze. Preto bude Debt to equity vstupom.

Debt to assets – je to pomer dlhu k aktívam firmy. Tento údaj vyjadruje koľko aktív je financovaných dlhom. Väčšie Debt to assets znamená, že väčšia časť zdrojov financií na aktíva tvorí dlh a tým je riziko nesolventnosti firmy väčšie. Jedná sa preto tiež o vstup.

Quick ratio – je to indikátor krátkodobej likvidity. Je definovaný ako pomer rozdielu aktív od zásob a pasív, čo je ekvivalentné súčtu hotovosti, obchodovateľných cenných papierov a pohľadávok predelený aktuálnymi pasívami. Tento pomer udáva životaschopnosť firmy, avšak nedáva úplný obraz o zdraví podniku. Spoločnosť, ktorá ma Quick ratio menšie ako 1 nemôže splatiť svoje krátkodobé záväzky. Akcionár preto bude preferovať firmu s väčším Quick ratio, a teda ho zaradíme medzi výstupy.

Return of equity (ROE) – po slovensky návratnosť kapitálu, a teda udáva ziskovosť firmy vzhľadom na vlastné imanie. Definícia ROE je teda podiel zisku ku vlastnému kapitálu. Vysoké ROE značí vysokú ziskovosť, ale tá môže byť spôsobená zvýšeným rizikom, ktoré tento indikátor nijako nezachytáva. Keďže samotný faktor hovorí len o ziskovosti a riziko je len možnou príčinou zvýšenej ziskovosti, budeme ROE považovať za výstup. Riziko zohľadníme v iných faktoroch, ktoré sa ním priamo zaoberajú.

Operating Margin (prevádzková marža) – je to miera, ktorá vyjadruje cenovú stratégiu firmy. Je definovaná ako podiel prevádzkového zisku a čistých tržieb. Vyjadruje podiel príjmov po odpočítaní variabilných nákladov, napríklad mzdy alebo suroviny. Musí byť taká, aby bola firma schopná zaplatiť aj fixné náklady, t.j. nájom za priestory, úroky z dlhu a podobne. Toto číslo vie poskytnúť investorom informáciu koľko firma vyrába na každé euro z predaja. Čím je prevádzková marža vyššia, tým je pre investora možnosť väčších ziskov, preto ju zaradíme medzi výstupy.

Debt to cash flow – je to prevrátená hodnota faktoru Cash flow to debt, ktorá porovnáva vzťah cash flow a dlhu spoločnosti, ktorý je súčtom krátkodobých a dlhodobých pôžičiek, ale aj financií na budúce vyplácanie dôchodkov. Toto číslo udáva schopnosť spoločnosti pokryť svoj dlh. Čím je Debt to cashflow menšie, tým je nižšie riziko spojené s neuhradením svojich záväzkov. Pre budúceho akcionára je teda menej rizikové investovať do firmy s nízkym faktorom Debt to cash flow, preto ho budeme radiť medzi vstupy.

Operating Expenses to revenue – pomer prevádzkových nákladov k tržbám. Udáva ako veľa nákladov firma potrebuje pre dosiahnutie určitej úrovne tržieb. Čím je tento faktor nižší, tým menej prostriedkov na prevádzku musí firma vynaložiť v porovnaní s tržbami. Investori by chceli mať čo najväčší zisk z čo najmenšieho počtu investovaných peňazí, a teda je pre nich lákavejšia nízka hodnota Operating Expenses to revenue. Bude sa teda jednať o vstup.

Receivable days – je to priemerná doba, za ktorú firma dostane zaplatené za tovar, ktorý bol predaný. Ak je počet dní väčší ako 40 – 50 dní, znamená to problémy so splácaním distribútora tovaru, prípadne predajcu tovaru. Vzorec na výpočet Receivable days je definovaný ako podiel pohľadávok a tržieb vynásobený 365 (počtom dní v roku). Akcionár sa snaží vyhýbať problémom a navyše platí, že čím skôr dostane firma vyplatené peniaze, tým skôr môže uskutočniť ďalšiu investíciu, ktorá môže priniesť investorovi ďalší zisk. Receivable days teda zaradíme medzi vstupy.

Earnings per share – časť zisku firmy, ktorú dostane vyplatenú každý vlastník akcie. Je definovaný ako rozdiel čistého zisku a dividend z prioritných akcií predelený priemerným počtom akcií v obehu. Pri výpočte je lepšie použiť vážený priemer počtu akcií v obehu v priebehu fakturačného obdobia, pretože sa počet akcií v obehu môže meniť. Každý chce zarobiť čo najviac, a preto uprednostňuje akcie s vyšším Earnings per share, bude to teda výstup.

Cash flow from operations (operačné cash flow) – je to množstvo peňazí generované obchodnými operáciami. Tento údaj je dôležitý, pretože udáva, či je spoločnosť schopná generovať dostatočne kladný cash flow na udržanie rastu. Cash flow from operations vypočítame ako rozdiel tržieb a nákladov. Vyššia hodnota znamená lepšiu schopnosť rastu, tým pádom ho zaradíme medzi výstupy.

Revenue – po slovensky tržby, je to množstvo peňazí, ktoré firma utŕži za určité obdobie. Pre získanie čistého zisku treba od tržieb odpočítať náklady. Tržby vieme vypočítať sčítaním všetkých cien tovarov, prípadne služieb, ktoré si zákazníci kúpili. Aj v tomto prípade je lepšia väčšia hodnota faktoru, bude to teda opäť výstup.

Free cash flow – je to miera finančnej výkonnosti firmy, ktorá je daná rozdielom operačných cash flow a kapitálovými výdavkami. Toto číslo predstavuje peniaze, ktoré je spoločnosť schopná generovať, pričom sa do toho nerátajú peniaze potrebné na udržanie alebo rozšírenie kapitálu. Je to dôležitý faktor, pretože umožňuje firme zvyšovať zisk akcionárov. Free cash flow sa vypočíta ako EBIT (zisk pred zúročením a zdanením) + odpisy a amortizácia – zmena čistého pracovného kapitálu – kapitálové výdavky. Záporný Free cash flow nie je nutne zlý, pretože môže znamenať, že spoločnosť robí veľké investície. Všeobecne je však lepšia čo najväčšia hodnota Free cash flow, a teda aj tento faktor zaradíme medzi výstupy.

Extraordinary Items / Operational Income – je to pomer mimoriadnych položiek ku prevádzkovým výnosom. Pod pojmom mimoriadne položky sa chápu rôzne neobvyklé položky, väčšinou bývajú uvádzané v súvahách v poznámke k účtovnej závierke. Hodnota prevádzkových výnosov je výška zisku po odčítaní operačných nákladov. Teda čím väčší je pomer Extraordinary Items / Operational Income, tým firma dosiahla väčšie mimoriadne zisky (respektíve mimoriadne výdavky pri zápornom čísle) v pomere ku celkovým príjmom. Je teda predpoklad, že aj v budúcnosti by sme mohli očakávať takéto mimoriadne zisky, a teda uprednostňujeme väčšiu hodnotu tohto faktora. Zaradíme to teda medzi výstupy.

(Capital Expenditure + Research and Development)/ Depreciation&Amortization:

- Capital Expenditure (kapitálové výdavky) – sú to prostriedky používané na získanie alebo vylepšenie fyzických aktív ako napríklad nehnuteľností, priemyselných objektov alebo zariadenia. Týmto typom výdavkov sa firma snaží udržať, prípadne zvýšiť rozsah svojich operácií. Príkladom môže byť nová továreň alebo modernizácia výrobných liniek.
- Research and Development – sú to náklady vynaložené na výskum a vývoj. Firmy sú nútené konkurenciou do vývoja stále nových produktov, preto je potrebné vynaložiť prostriedky aj do výskumu.
- Depreciation&Amortization (odpisy & amortizácia) – sú to náklady spojené s opotrebovaním kapitálu v dôsledku starnutia. V účtovníctve sa takéto opotrebovane prejavuje tým, že hodnota účtovaného majetku sa rozpočíta na vopred daný počet rokov, teda do nákladov sa v roku nákupu započíta len určitá časť z nákupnej ceny.

Celkovo dáva tento faktor do pomeru náklady na udržanie, respektíve rozvoj firmy a náklady za opotrebovávanie kapitálu. Veľké číslo tohto pomeru znamená, že firma investuje do nových príležitostí na rozvoj a malé naopak, že firma veľmi neinvestuje do inovácií a využíva pôvodnú technológiu. Investícia do nových technológií zväčša znamená efektívnejšiu výrobu súčasného produktu alebo rozširovanie portfólia, naopak, žiadne investície do nových technológií indikuje, že firma nijako nenapreduje, a teda investícia do takejto firmy je rizikovejšia. Navyše nový produkt môže prilákať ďalších zákazníkov, čo zvýši zisk. Preto investor skôr uprednostní firmu, ktorá sa rozvíja a tento faktor zaradíme ku výstupom.

Change in Cash Flow from Operations / change in Goodwill – udáva ako veľmi sa zmenil operačný Cash flow v porovnaní s Goodwill-om. Oba faktory sú výstupy, takže chceme, aby boli čo najväčšie. Ak by boli aj Cash Flow from Operations aj change in Goodwill kladné, vieme dostať rovnakú hodnotu ich pomeru ako vtedy, keď budú oba záporné, čo je očividne horšia situácia. Preto tento faktor nedá investorovi informáciu o tom, či je preňho investícia výhodná, a teda ho nebudeme brať pri rozhodovaní do úvahy.

Change in Goodwill – sú to zmeny v Goodwill-e oproti predchádzajúcemu obdobiu. Pod pojmom Goodwill sa chápe rozdiel medzi trhovou hodnotou firmy a aktívami spoločnosti. Je to hodnota nehmotného majetku firmy, napríklad dobré vzťahy so zákazníkmi, dobré meno firmy alebo vysoká odbornosť zamestnancov. Čím je Goodwill vyšší, tým je vyššia pravdepodobnosť vyšších tržieb od zákazníkov, väčší zisk, a teda aj výnos akcionárov. Ak je zmena kladná, znamená to, že sa Goodwill zvýšil, a teda sa jedná o výstup.

Dividend payment – vyjadruje, či v danom období boli akcionárom vyplatené dividendy. 1 značí vyplatené, 0 nevyplatené dividendy. Vyplatené dividendy v predchádzajúcom období môžu byť pre investora na jednej strane lákavé, pretože očakáva, že sa budú vyplácať aj v budúcom roku, ale na druhej strane to môže byť negatívom, pretože sa tieto peniaze mohli investovať, z čoho by mohol budúci rok profitovať. Dividendy sa však väčšinou pre investorov považujú za vítané, preto ich uprednostníme aj my, a teda kritérium Dividend payment zaradíme medzi výstupy.

Growth in dividends – udáva, či dividendy v nasledujúcom období rástli, klesali alebo sa nezmenili. 1 znamená rast, -1 pokles a 0, že sa výška vyplatených dividend nezmenila. Pri predchádzajúcom kritériu Dividend payment sme povedali, že dividendy považujeme za pozitívum, a teda čím sú vyššie, tým je to pre nás, ako investorov lepšie. Z toho vyplýva, že uprednostňujeme rast výšky dividend pred poklesom, prípadne stagnácie ceny. Preto bude aj Growth in dividends považované za výstup.

Change in stocks outstanding – sú to zmeny v hodnote akcií, ktoré sú v obehu, za určité obdobie. Týmito akciami sa myslia všetky akcie spoločnosti, ktoré boli schválené, vydané a kúpené investormi, ktorí ich držia. Predstavujú vlastníctvo spoločnosti osobou vlastniacou akciu – akcionára. Od vlastných akcií sa odlišujú tým, že vlastné akcie vlastní samotná spoločnosť. To, že je hodnota Change in stocks outstanding kladná, znamená, že rastie celková hodnota vydaných akcií. To mohlo byť spôsobené vydaním nových akcií alebo rastom hodnoty súčasných akcií, avšak zo samotnej hodnoty faktora to zistiť nevieme. Vydanie nových akcií môže indikovať na jednej strane problémy firmy, ktorá sa snaží takto splatiť svoje dlhy ale môže to taktiež znamenať, že firma zbiera financie na nové investície, ktoré by mohli priniesť zisk. Pokiaľ kladnosť faktora spôsobilo zvýšenie hodnoty pôvodných akcií, je to pre budúceho akcionára dobrý dôvod, prečo investovať svoje financie práve do tejto firmy. V konečnom dôsledku výhody väčšej hodnoty tohto faktora prevažujú nad negatívami, preto ho zaradíme medzi výstupy.

Celkovo sme teda zo všetkých 19 faktorov, ktoré vyjadrujú dôveryhodnosť firmy, zaradili 5 do vstupov, 13 z nich sme označili ako výstupy a 1 z nich sme považovali za nezaujímavý faktor pre budúceho investora. Teraz sa pozrieme na faktory udávajúce ziskovosť v predchádzajúcich obdobiach.

Sales to price – vyjadruje pomer tržieb firmy ku cene všetkých vydaných akcií, teda koľko firma utŕžila peňazí z každej investovanej jednotky peňazí. S rastúcimi tržbami väčšinou rastie aj zisk, preto investor bude investovať skôr do firiem s väčším faktorom Sales to price.

Earnings per share to price – je to pomer ziskov na akciu, ktoré boli vyplatené akcionárom z časti zisku, ku cene jednej akcie. Aj v tomto prípade bude investor preferovať väčšiu hodnotu Earnings per share to price, pretože ak mala spoločnosť v predchádzajúcich obdobiach tento faktor vysoký, je pravdepodobné, že bude aj v nasledujúcom období bude vysoký, a teda na každú investovanú jednotku peňazí pripadne väčší zisk.

Cash flow from operations per share to price – udáva pomer faktora Cash flow from operations pripadajúci na jednu akciu a ceny jednej akcie. Cash flow from operations sme označili ako výstup, teda vysoká hodnota je pre budúceho akcionára príťažlivejšia. Ak ho dáme do pomeru k cene akcie, lepšie nám ukazuje ako efektívne sa z tohto pohľadu narába s investovaným kapitálom akcionárov.

Book value per share to price – je to podiel účtovnej hodnoty firmy pripadajúci na jednu akciu a ceny jednej akcie. Účtovnú hodnotu firmy vypočítame odčítaním nehmotných aktív (napríklad patenty, goodwill) a pasív od všetkých aktív firmy. Čím je účtovná hodnota firmy väčšia, tým sa predpokladá väčší zisk generovaný aktívami. V prepočítaní na jednu akciu a predelený cenou akcie opäť udáva výnosnosť akcie.

Všetky 4 faktory udávajúce výnosnosť akcií budeme považovať za výstupy, pretože investor sa snaží mať na akcií čo najvyššiu výnosnosť, a teda s rastúcim faktorom narastá záujem o danú akciu.

3 Využitie DEA pri hľadaní efektívnych akcií

V tejto kapitole využijeme teoretické poznatky z DEA modelov a vedomosti o faktoroch získané v predchádzajúcich kapitolách, ktoré sa dajú využiť pri výbere akcií, do ktorých investovať. Nebudeme teda využívať žiadne poznatky z finančnej matematiky, podnikových financií, či iných predmetov, ktoré sa zaoberajú tvorbou portfólia alebo rôznymi inými ekonomickými faktormi, ktoré súvisia s investíciami do akcií. Našou úlohou bude zistiť, či sa dá pomocou čisto matematického aparátu uľahčiť výber z veľkého množstva akcií, ktoré sú na trhu a zarobiť na tom. Ako sme uviedli v 1. kapitole, pomocou DEA modelov vieme zistiť, či je dané DMU efektívne alebo nie, prípadne určiť ich efektivitu. V našom prípade budú DMU predstavovať jednotlivé akcie, a teda budeme určovať efektivitu akcií. V predchádzajúcej kapitole sme si jednotlivé kritéria rozdelili do 2 skupín: tie, čo ukazujú dôveryhodnosť danej firmy, ktorá vydáva akcie a tie, ktoré ukazujú ziskovosť v predchádzajúcich obdobiach. Očakávame, že dôveryhodnejšie akcie budú vo všeobecnosti menej ziskové, pretože by inak nikto nechcel investovať do menej dôveryhodnej akcie, pokiaľ by ponúkala menší zisk ako dôveryhodná akcia. Preto by mali menej dôveryhodné firmy lákať investorov na väčší výnos, aby boli konkurencie schopné voči dôveryhodnejším akciám. V našom experimente teda budeme počítať efektivitu zvlášť pre kritériá ukazujúce dôveryhodnosť a zvlášť pre ukazovatele vyjadrujúce ziskovosť danej akcie.

V prvom kroku si rozdelíme akcie na tie, ktoré sú efektívne v dôveryhodnostných kritériách a ktoré nie. To isté spravíme s kritériami, ktoré zobrazujú výnosnosť daných akcií a budeme skúmať, ktorá skupina akcií (neefektívne alebo efektívne) reálne viac zarobila. Budeme v situácií, že máme k dispozícii dáta (hodnoty jednotlivých faktorov, ktoré sme si vysvetlili) z predchádzajúceho roku, prípadne z viacerých predchádzajúcich rokov, a rozhodujeme sa, do ktorých akcií investovať, prípadne, ktoré môžeme rovno vylúčiť. Ako investori, by sme určite chceli akciu, ktorá má nielen dobré predpoklady výnosu, ale aj nízku pravdepodobnosť, že investíciou do danej firmy prídeme o vložené peniaze. Preto budeme hľadať nejaký kompromis, ktorý bude prihliadať na obe požiadavky investora. To aká výhodná je investícia do danej skupiny akcií budeme zisťovať tak, že si porovnáme ceny akcií na začiatku najbližšieho roka (teda nasledujúceho, z ktorého máme posledná dáta) a na jeho konci. Ich pomer bude predstavovať percentuálny výnos, prípadne stratu, ktorú sme dosiahli investíciou na 1 rok. V nasledujúcom roku budeme mať ďalšie – novšie dáta, a teda sa môžeme znovu rozhodovať, do ktorých akcií investovať, preto budeme uvažovať len 1 ročnú investíciu. Dáta ktoré takto získame za jednotlivé skupiny budeme navzájom porovnávať a zisťovať, či rozdiel v ziskoch medzi jednotlivými skupinami je štatisticky významný alebo nie.

Ako zdrojové dáta budeme požívať údaje získané od spoločnosti Allianz DSS. V nich máme zoznamy akcií utriedené podľa odvetvia, ktorým sa daná firma zaoberá. Pre každú akciu máme hodnoty pre každé z dôveryhodnostných kritérií, ktoré pochádzajú z roku 2011. Čo sa týka kritérií výnosnosti, tie pochádzajú z troch nasledujúcich rokov 2009, 2010 a 2011. Keďže posledný rok, za ktorý máme údaje je 2011, budeme sa snažiť simulovať investora, ktorý nakupuje akcie na začiatku roku 2012 a predá ich na konci roku 2012.

Teraz potrebujeme vybrať DEA modely, ktoré budeme používať pri výpočte efektivity jednotlivých akcií pri jedných aj druhých kritériách. Čo sa týka kritérií dôveryhodnosti, máme tam niekoľko vstupov a niekoľko výstupov. Problém však je, že hodnoty niektorých faktorov sú nielen kladné, ale aj záporné. S tým si vie poradiť jedine úloha (AD-VRS), prípadne jeho upravená verzia (AD-W-VRS), avšak existuje aj druhá možnosť ako tento problém vyriešiť. Mohli by sme pre každú akciu zvýšiť hodnoty daného faktora o rovnakú konštantu tak, aby boli u každej akcie nezáporné. Túto úpravu vysvetlíme tak, že práve tú najmenšiu (zápornú) hodnotu daného faktora budeme považovať za „nulu“, teda číslo, ktoré menšie byť už nemôže. My sa však nebudeme teraz rozhodovať, ktorý z týchto pohľadov sa nám viac pozdáva, ale budeme pokusmi porovnávať, aké rozdiely budú medzi jedným a druhým výberom efektívnych akcií. Otázka teraz znie, či je vhodné používať variabilné výnosy z rozsahu alebo bude lepšie počítať s konštantnými. Jednotlivé kritériá sme neskúmali do hĺbky ako sa správajú, preto bude vhodné porovnať obe z týchto možností. Tieto modely sa líšia jedine v účelovej funkcii, ale oba modely vyberú ako efektívne rovnaké akcie. Rozdiel je potom len pri neefektívnych akciách, kde model (AD-W-VRS) dáva zmysluplnejšie výsledky (aj keď tieto hodnoty stále nevyjadrujú efektivitu danej akcie). Tie vieme následne lepšie použiť pri porovnávaní jednotlivých akcií. Dobrou vlastnosťou tohto modelu je aj to, že nemusíme rozlišovať efektivitu od pseudoefektivity a navyše sa nemusíme rozhodovať, či budeme požadovať vstupne alebo výstupne orientovaný model. Preto prvý model, ktorý použijeme bude model (AD-W-VRS):

$$\min_{\lambda, s^x, s^y} -((w_m^x)^T s^x + \left(w_s^y\right)^T s^y)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i + s^x = x_O$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \lambda_i - s^y = y_O$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

$$\lambda, s^x, s^y \geq 0$$

Povedali sme si, že chceme použiť aj model s konštantnými výnosmi z rozsahu. Na výber máme tri modely: vstupne orientovaný, výstupne orientovaný a aditívny. Ani jeden z nich nie je invariantný na posun, preto budú korešpondovať s názorom, že hoci vykonáme posun a modely nie sú invariantné voči posunu, nebude to problém. Nevýhodou orientovaných modelov je, že musíme ešte dodatočne skúmať pseudoefektivitu a ak sa jedná o pseudoefektivitu, nevieme porovnať ich neefektivitu voči akciám, kde sme vyčíslili efektivitu. Nevýhodou aditívneho modelu je, že v prípade neefektívnych akcií, hodnoty účelovej funkcie v optimálnom riešení sú zle interpretovateľné a nedajú sa použiť na porovnávanie „efektivity“ (efektivita je uvedená v úvodzovkách, pretože aditívny model nevyjadruje efektivitu tak, ako sme si ju uviedli v 1. kapitole, ale je to len akýsi rozdiel, ktorým by sme chceli vyjadriť ako veľmi sú hodnoty faktorov výhodné pre investora). Tento problém sa však dá zmierniť použitím modelu (AD-W-CRS). Lepšie sa nám teda zdá použiť práve tento model kvôli tomu, že sa v ňom nevyskytuje pseudoefektivita a nevýhodu, ktorá bola pre tento model sme čiastočne vyriešili, a teda budeme počítať „efektivitu“ aj pomocou neho.

Musíme sa ešte rozhodnúť, či použiť aj nejaký z modelov (BCC). Jedná sa o model s variabilnými výnosmi z rozsahu, avšak oproti aditívnemu modelu s variabilnými výnosmi z rozsahu, ktorý sme sa už rozhodli použiť, má rovnaké nevýhody ako (CCR) modely voči modelu (AD-W-CRS). Preto budeme „efektivitu“ v prípade kritérií hovoriacich o dôveryhodnosti jednotlivých firiem počítať dvoma spôsobmi: modelmi (AD-W-CRS) a (AD-W-VRS).

Zostáva nám ešte vybrať model na počítanie efektivity kritérií ukazujúcich výnosnosť investície v predchádzajúcich obdobiach. Táto situácia sa líši od dôveryhodnostných kritérií v tom, že ako faktory máme len výstupy bez vstupov. Na výber máme tak len dva modely pripadajúce do úvahy, a to výstupne orientovaný a aditívny (respektíve ešte aditívny s upravenými váhami). Výhodou v tejto situácií je to, že všetky hodnoty sú kladné, a preto nemusíme riešiť ich posun. Aj tu platí, že v prípade výstupne orientovaného modelu by sme sa museli okrem samotného riešenia úlohy zaoberať aj tým, či sme vypočítali efektivitu alebo pseudoefektivitu. Preto použijeme aditívny model (1.39), v ktorom použijeme upravené váhy, teda (AD-W-VRS) bez vstupov.

V dátach máme 9 kategórií, kde sú akcie zoradené podľa sektoru, v akom firma pôsobí. Pre jednotlivé sektory budeme „efektivity" počítať zvlášť, pretože každému sektoru sa mohlo dariť inak, preto budeme hľadať najlepšie hodnoty z daných kategórií. Teraz použijeme na tieto kategórie modely, ktoré sme vybrali a vypočítame optimálne hodnoty úloh.

Pre rozsiahlosť tabuliek, ktoré obsahujú celkovo 31 kritérií pre 50 až 545 akcií v jednotlivých kategóriách, uvedieme v Tab. 3.1 len 50 akcií z najrozsiahlejšej skupiny akcií, t.j. priemysel, a ich vypočítané hodnoty „efektivít". V Tab. 3.1 sú uvedené výstupy úloh lineárneho programovania desiatich náhodne vybratých akcií z kategórie priemysel. V stĺpci konšt.výn. sme používali model (AD-W-CRS) na kritériá dôveryhodnosti. Hodnoty stĺpca variab.výn. sme získali aplikovaním modelu (AD-W-VRS) takisto na kritériá dôveryhodnosti. V stĺpci výnosnosť sa nachádzajú vypočítané hodnoty použitím úlohy (AD-W-VRS) bez vstupov, na kritéria udávajúce ziskovosť investície. Hrubo sú vyznačené efektívne akcie podľa príslušného modelu, pričom za efektívne sme ich považovali, ak hodnota účelovej funkcie presiahla hodnotu -0,005. Podľa teórie sú akcie efektívne práve vtedy, keď je hodnota účelovej funkcie rovná 0, avšak treba uvažovať aj numerickú nepresnosť počítačov. Preto sme zvolili ako kritérium efektivity hodnotu -0,005, ktorá aj v prípade, že v skutočnosti daná akcia nie je efektívna, je tak blízko ku hranici efektívnosti, že ju môžeme zaradiť medzi efektívne.

akcia	konšt.výn.	variab.výn.	výnosnosť
6146 JP Equity	-5,3720	**0,0000**	-3,8923
6481 JP Equity	-8,8004	-0,8598	-3,8505
6767 JP Equity	-8,0074	**0,0000**	-2,8979
6806 JP Equity	**0,0000**	**0,0000**	-3,8338
6958 JP Equity	-10,9521	-1,4690	**0,0000**
7004 JP Equity	-19,6901	-1,1812	-3,2758
7224 JP Equity	-13,4691	**0,0000**	-2,8622
7701 JP Equity	-14,6961	-1,0664	-3,6661
7741 JP Equity	-6,2805	-0,6067	-3,8167
8020 JP Equity	-9,6990	-1,3300	**0,0000**
9076 JP Equity	-7,8523	-0,7930	**0,0000**
9107 JP Equity	-4,6557	**0,0000**	**0,0000**
9132 JP Equity	-3,1134	-0,3478	-3,5662
9301 JP Equity	-7,8828	-0,3879	-3,4344
9364 JP Equity	-2,7202	-0,7289	-3,2565
AAWW US Equity	**0,0000**	**0,0000**	-3,4911
ABBN VX Equity	-8,6149	-0,7657	-3,8132
ABFS US Equity	-2,7674	-1,5496	-3,6018
ACN US Equity	-3,6119	**0,0000**	-3,9741
ACS SM Equity	-24,3745	-1,3479	-3,2275
ADEN VX Equity	-7,2245	-0,7798	-3,8018
AME US Equity	-9,4163	-0,8801	-3,9593
ARE CN Equity	-9,8722	-0,6839	-3,4151
ATK LN Equity	-14,9834	**0,0000**	-4,3720
BHE US Equity	**0,0000**	**0,0000**	-3,4318
CGCBV FH Equity	-7,0658	-0,7196	-3,4527
CHG LN Equity	-10,1364	**0,0000**	-4,3739
CHRW US Equity	**0,0000**	**0,0000**	-4,0907
CLC US Equity	-5,0754	-0,3561	-3,9323
CNW US Equity	-6,3343	**0,0000**	-3,6223
COB LN Equity	-8,9608	-0,7917	-4,3732
COL US Equity	**0,0000**	**0,0000**	-3,9780
EMR US Equity	-8,9895	-0,6221	-3,9284
G1A GR Equity	-10,6748	**0,0000**	-3,7252
GBF GR Equity	-11,6014	-0,9685	-3,2865
GBX US Equity	-8,3684	-1,0559	-3,4540
GD US Equity	-5,4440	**0,0000**	-3,6136
GE US Equity	-8,0467	-0,8567	-3,5778
GEBN VX Equity	**0,0000**	**0,0000**	-3,9962
GEF US Equity	-7,3330	-0,5186	-3,1803
ITRK LN Equity	-10,4797	**0,0000**	-4,3760
ITT US Equity	-12,5878	-1,0860	**0,0000**
ITW US Equity	-7,4372	**0,0000**	-3,8630
JBHT US Equity	-3,2461	**0,0000**	-4,0063
LECO US Equity	-5,8357	**0,0000**	-3,8896
LEI AU Equity	-3,8975	-0,4590	-3,7078
LEO GR Equity	-7,7067	-0,9809	-3,3310
LG FP Equity	-8,5513	-0,9007	-3,0963
LLL US Equity	**0,0000**	**0,0000**	-3,1511
LMT US Equity	-6,6661	**0,0000**	-3,7088

Tab. 3.1 Vypočítané hodnoty „efektivít“ náhodných 10 akcií

Aby sme zistili, či sa dá metóda DEA použiť na výber akcií, musíme ju porovnať s reálnymi cenami akcií na začiatku a na konci nasledujúceho roku, ktoré získame z [3] a [7], a z nich vypočítame percentuálny nárast, respektíve pokles, ktorý hodnota akcie dosiahla v nasledujúcom roku, 2012. Tieto hodnoty nebudeme zisťovať pre všetky akcie, ale len pre niekoľko náhodne vybraných, pretože sa jedná spolu až o 1985 akcií. Vyberieme si teda 4 kategórie (Utilities, Consumer Goods, Technology a Industrials) a z každej zhruba 15% akcií, ktoré použijeme na overenie úspešnosti DEA modelov (z kategórie Utilities budeme pracovať s 25 akciami z celkových 100, z Consumer Goods s 34 z 306, z kategórie Technology s 24 zo 160 a v kategórií Industrials s 93 z celkových 545 akcií). Úspešnosť budeme zisťovať tak, že budeme testovať hypotézy, že stredná hodnota výnosu akcií istej vlastnosti je väčšia ako stredná hodnota výnosu akcií inej vlastnosti oproti hypotéze s opačnou nerovnosťou. Budeme robiť spolu 11 testov pre každú kategóriu akcií, z ktorej sme zisťovali ceny akcií. Piaty súbor dát (označíme ho all) vytvoríme tak, že doň vložíme všetky akcie, pre ktoré sme zistili mieru výnosov v nasledujúcom roku, zo všetkých štyroch kategórií. Hodnoty „efektivít“ nebudeme počítať odznovu, ale necháme pôvodné, teda tie, ktoré sme vypočítali v danom sektore. Tento krok zdôvodníme tým, že chceme pozorovať aj celkové výnosy najlepších akcií v daných sektoroch oproti horším akciám a na základe toho budeme ľahšie vedieť povedať, či všeobecne, naprieč celou ponukou akcií, sa dá hovoriť o tom, že niektorá skupina akcií je výnosnejšia ako iná. Preto všetky testy hypotéz spravíme aj pre tento súbor dát. Keďže nie všetky dáta pochádzajú z normálneho rozdelenia a chceme na všetky hypotézy použiť rovnaký test, budeme používať Wilcoxonov test, ktorý nevyžaduje normalitu dát.

Prvé tri testy budú zisťovať, či stredná hodnota výnosu efektívnych akcií podľa jednotlivých modelov z Tab. 3.1 je väčšia alebo menšia oproti strednej hodnote neefektívnych akcií. Ďalším testom budeme porovnávať strednú hodnotu akcií, ktoré sú efektívne podľa všetkých troch modelov oproti ostatným akciám. Takisto otestujeme strednú hodnotu výnosov akcií, ktoré sú efektívne zároveň v stĺpcoch variab.výn. a výnosnosť vo vypočítanej tabuľke (z ktorej sme vybrali dáta do Tab. 3.1) oproti ostatným akciám. Rovnaký test, ale pre efektívne akcie v stĺpcoch konšt.výn. a variab.výn. robiť nemusíme, lebo ak je akcia efektívna pri konštantných výnosoch z rozsahu, tak je aj pri použití variabilných výnosov z rozsahu. Teda by sa jednalo o rovnaký test ako keď testujeme efektívne akcie podľa konšt.výn. oproti ostatným akciám. To isté platí pre akcie, ktoré sú efektívne v konšt.výn. a výnosnosť, pretože by

sme testovali rovnakú hypotézu ako keď sú akcie efektívne vo všetkých stĺpcoch. Ďalej budeme testovať strednú hodnotu akcií, ktoré sú efektívne aspoň v jednom kritériu oproti ostatným neefektívnym akciám. Siedmym testom bude porovnanie výnosov akcií, ktoré sú efektívne v variab.výn. oproti efektívnym akciám aj v stĺpci konšt.výn.. V nasledujúcich testoch využijeme použitie modelu s upravenými váhami. Jeden test bude spočívať v tom, že si zoradíme hodnoty „efektivít“ stĺpca konšt.výn. od najmenšej po najväčšiu, z ktorých vyberieme najprv 25%, potom 50% akcií s najvyššou hodnotou. Z nich vyberieme len tie, ktoré sú efektívne v stĺpci výnosnosť a ich výnosy budeme porovnávať s ostatnými akciami. Druhý test bude rovnaký, ale namiesto zoraďovania akcií podľa konšt.výn. ich zoradíme podľa variab.výn. a ďalej postupujeme rovnako.
Testy spravíme tak, že si vypočítame priemernú hodnotu dát jednej aj druhej skupiny a testovať budeme to, či vieme zamietnuť, že pre skutočné stredné hodnoty platí opačná nerovnosť ako nám vyšli priemerné hodnoty z dát. Teda ak bude platiť pre stredné hodnoty jednotlivých skupín $\bar{x} < \bar{y}$, otestujeme takúto hypotézu:

$H_0: \mu_x \geq \mu_y$ vs. $H_1: \mu_x < \mu_y$

Pri výpočtoch budeme uvažovať 5% hladinu, to znamená, že hypotézu H_0 zamietame a prijmeme H_1, ak bude p-hodnota menšia ako 0,05. Výsledky testov (p-hodnoty) ako aj vypočítané priemerné hodnoty výnosov sú zobrazené v Tab. 3.2, kde 1. stĺpec obsahuje číslo testu, v 2. stĺpci sa nachádza krátky popis daného testu, z ktorého vždy prvé dva riadky vyjadrujú priemerné hodnoty výnosov (v %) zo skupiny akcií uvedenej v 3. stĺpci a v treťom riadku každého testu je p-hodnota daného testu. V tabuľke používame skratky: crs vyjadruje akcie zo stĺpca konšt.výn. z Tab. 3.1, vrs z variab.výn., e2 z výnosnosť a pod pojmom ostatné je skupina akcií, ktoré nepatria do skupiny uvedenej pod ňou. Hrubo je vždy vyznačená priemerná hodnota výnosu, ktorá je väčšia ako tá pri druhej skupine daného testu.

			Utilities	Cons.Goods	Technology	Industrials	all
1.	crs efektívne	ostatné	**5,27704**	**31,16251**	**20,94883**	18,0586	**20,9154**
		crs efektívne	1,626437	19,79982	0,361022	**19,4851**	14,17829
		p-hodnota	0,168	0,1781	0,07274	0,1664	0,03575
2.	vrs efektívne	ostatné	**5,647091**	**30,17622**	4,752417	17,26658	**20,44918**
		vrs efektívne	2,933716	27,46482	**25,69445**	**19,93647**	18,60965
		p-hodnota	0,1562	0,2365	0,2593	0,4793	0,1674
3.	e2 efektívne	ostatné	**4,755622**	21,6458	12,03614	16,45538	16,54469
		e2 efektívne	1,886975	**50,11108**	**22,76148**	**29,24134**	**31,85832**
		p-hodnota	0,1986	0,05138	0,06553	0,1023	0,06452
4.	efektívne vrs vs. crs	efektívne crs	1,626437	19,79982	0,361022	19,4851	14,17829
		efektívne vrs	**2,933716**	**27,46482**	**25,69445**	**19,93647**	**18,60965**
		p-hodnota	0,4105	0,3591	0,1158	0,194	0,1661
5.	všetky efektívne	ostatné	**4,262113**	**29,26026**	**17,21815**	18,24267	**20,0521**
		všetky	1,732631	21,93059	2,756027	N/A	8,465283
		p-hodnota	0,2353	0,4073	0,3443	N/A	0,1874
6.	vrs a e2 efektívne	ostatné	**5,202266**	25,21778	15,14656	**18,30162**	18,78228
		vrs a e2	-0,55805	**49,64053**	**18,28324**	15,56036	**27,91395**
		p-hodnota	0,0615	0,1167	0,3836	0,4736	0,3835
7.	aspoň 1 efektívne	ostatné	**4,625673**	25,5894	-8,74237	13,95232	16,98787
		aspoň 1	3,595647	**31,98458**	**25,86541**	**22,81903**	**21,96522**
		p-hodnota	0,2958	0,4325	0,0224	0,2008	0,4643
8.	25% vrs + e2 efektívne	ostatné	3,137085	25,40788	**16,87622**	**18,30162**	18,82014
		25% vrs+e2	**9,514682**	**60,20434**	-17,2781	15,56036	**30,24594**
		p-hodnota	0,3812	0,06436	0,1481	0,4736	0,3584
9.	25% crs + e2 efektívne	ostatné	**5,349609**	**30,13724**	**17,21815**	**18,39192**	**20,36871**
		25% crs+e2	-13,8468	13,75621	2,756027	4,511278	6,417403
		p-hodnota	0,006154	0,107	0,3443	0,2338	0,06437
10.	50% vrs + e2 efektívne	ostatné	**4,754598**	25,21778	15,14656	**18,41825**	18,9399
		50% vrs+e2	0,170089	**49,65053**	**18,28324**	12,97511	**25,6419**
		p-hodnota	0,1121	0,1167	0,3836	0,3763	0,4915
11.	50% crs + e2 efektívne	ostatné	**4,665011**	27,1716	15,1415	**18,74703**	**19,85955**
		50% crs+e2	0,546353	**37,43339**	**17,67814**	7,020585	17,99429
		p-hodnota	0,1392	0,4955	0,3032	0,134	0,1426

Tab. 3.2 Tabuľka s priemernými hodnotami výnosov a p-hodnotami jednotlivých testov

Teraz si postupne rozoberieme všetky testy a ich výsledky z Tab. 3.2.

V prvom teste sme porovnávali hodnoty výnosov akcií, ktoré sú označené ako efektívne v stĺpci konšt.výn. s ostatnými akciami. Môžeme si všimnúť, že jedine v prípade akcií z priemyselného odvetvia (Industrials) mali efektívne akcie väčšiu priemernú hodnotu výnosov, v ostatných prípadoch bola väčšia pri neefektívnych akciách. Čo sa týka p-hodnôt v jednotlivých odvetviach, ani jedna z nich nebola menšia ako 0,05, a preto nemôžeme prehlásiť, že skutočná stredná hodnota výnosov je naozaj väčšia, respektíve menšia, v prípade efektívnych akcií na hladine významnosti 5%. Keď sme však dali všetky dáta do jedného súboru dát (stĺpec all), zistili sme, že neefektívne akcie majú štatisticky významne väčší priemer výnosov ako efektívne akcie, a preto bola hypotéza H_0 zamietnutá. To znamená, že hoci dáta v jednotlivých sektoroch túto hypotézu nevyvrátili (v odvetví priemysel sa dokonca k nej prikláňali), stredná hodnota výnosu efektívnych akcií z týchto 4 sektorov je na 95% menšia ako v prípade neefektívnych akcií. Znamená to, že výnos akcií, ktoré vyšli efektívne z kritérií dôveryhodnosti pri použití konštantných výnosov z rozsahu je menší ako pri neefektívnych akciách. Tento výsledok nás veľmi neprekvapí, pretože, ako sme už uviedli vyššie, keby mali dôveryhodné akcie vyšší výnos ako neefektívne, nikto by nemal motiváciu investovať do neefektívnych.

Druhý test testoval prakticky to isté, čo prvý, akurát sme namiesto konštantných výnosov z rozsahu používali variabilné výnosy z rozsahu a tým sa efektívnymi stali viaceré akcie, ktoré boli pri konštantných výnosoch z rozsahu neefektívne. Keď sa pozrieme do Tab. 3.2, dve odvetvia mali väčšie výnosy u efektívnych a dve u neefektívnych akcií. Ani tu sa však nepodarilo ani jednému zo sektorov vyvrátiť svoju hypotézu H_0, nižšie p-hodnoty však mali sektory, kde mali efektívne akcie nižšiu priemernú hodnotu výnosov. Keď sa pozrieme do stĺpca all, zistíme, že celkovo mali vyšší výnos neefektívne akcie, ale ani tu sa nepodarilo ukázať, že by to sme vedeli s 95% pravdepodobnosťou potvrdiť. Záver k tomuto testu spravíme taký, že asi je výnos vyšší u neefektívnych akcií, ale nevieme to povedať s akceptovateľnou presnosťou.

Predpoveď tretieho testu je taká, že výnos u efektívnych akcií v kritériách ziskovosti by mal byť vyšší. Tú si teraz porovnáme s výsledkami testu v Tab. 3.2. Môžeme si všimnúť, že jedine v kategórií energií (Utilities) je výnos vyšší u neefektívnych akcií. Čo sa týka p-hodnôt, v prípade efektívnych akcií sú veľmi blízko ku kritériu zamietania hypotéz H_0, avšak ani jeden sektor ju nezamieta. Použitím dát zo všetkých sektorov tiež dostaneme, že efektívne akcie majú väčší priemerný výnos, ale ani to sa to nepodarilo testom potvrdiť. Aby sme mohli zamietnuť hypotézu H_0, museli by sme testovať na hladine významnosti 7%. Keďže ale testujeme na hladine 5%, nemôžeme prehlásiť, že H_0 zamietame, ale môžeme povedať, že je vysoko pravdepodobné, že efektívne akcie v kritériách ziskovosti majú vyššiu strednú hodnotu výnosov ako neefektívne akcie.

V týchto troch testoch sme si ukázali, že efektívne akcie v jednotlivých ohľadoch majú tendenciu sa správať tak, ako sme predpokladali na začiatku, hoci sa nám to podarilo ukázať s dostatočnou presnosťou len v jednom teste. Ukazuje sa, že DEA modely vedia celkom dobre vybrať skutočne tie akcie, ktoré by sme očakávali. Preto budeme teraz vyhodnocovať rôzne kombinácie efektívnych a neefektívnych akcií tak, aby boli dostatočne dôveryhodné, ale aj výnosné. Najprv sa však pozrieme aký je rozdiel medzi efektívnymi akciami v dôveryhodnostných kritériách použitím konštantných a variabilných výnosov z rozsahu.

Vo štvrtom teste sme porovnávali výnosy efektívnych akcií v stĺpci konšt.výn. s výnosmi akcií v stĺpci variab.výn.. Z Tab. 3.2 je vidieť, že vyšší výnos dosahovali efektívne akcie podľa modelu s variabilnými výnosmi z rozsahu v každom sektore. Ani tu sa to však nepodarilo štatisticky dokázať ani v jednom prípade a ani pri zlúčení všetkých dát. P-hodnota je pri použití všetkých dát (stĺpec all) porovnateľná s druhým testom, a teda to uzavrieme rovnako. Efektívne akcie pri použití variabilných výnosov z rozsahu asi dosahujú väčší výnos ako tie, čo sú efektívne podľa modelu s konštantnými výnosmi z rozsahu.

Nasledujúci, piaty, test sa zaoberal porovnávaním výnosov akcií, ktoré sú efektívne vo všetkých kritériách a ostatných akcií. Problém tohto testu je ten, že len veľmi malý počet akcií bolo efektívnych podľa všetkých troch modelov. V sektore priemyslu sa dokonca nenašla ani jedna takáto akcia, preto sme v ňom test uskutočniť nemohli. V ostatných odvetviach bol priemer výnosov väčší vždy v prípade akcií, ktoré boli aspoň v jednom kritériu neefektívne. Hoci rozdiely v priemerných hodnotách výnosov sú pomerne veľké, ochota testu zamietať hypotézu H_0 je nízka. To je spôsobené práve tým, že máme len veľmi málo takých akcií, ktoré sú efektívne vo všetkých prípadoch. Zlúčením všetkých dát sa ochota zamietania zvýšila, avšak nie dostatočne na to aby sme mohli povedať, že tieto najefektívnejšie akcie majú všeobecne nižší výnos ako ostatné. Aj tu sa preto budeme len domnievať, že to tak platí, ale s istotou to povedať nevieme.

Teraz sa pozrieme na test (označený ako šiesty v Tab. 3.2), kde rozdelíme akcie na tie, ktoré sú efektívne aspoň podľa jedného modelu a ktoré nie. V každom z odvetví je stredná hodnota výnosov väčšia v prípade efektívnych akcií okrem sektoru energií (Utilities). Pri pohľade na p-hodnoty vidíme, že testy sú veľmi neochotné zamietať až na odvetvie technológií (Technology), kde dokonca došlo ku zamietnutiu hypotézy H_0. V tomto teste je vidno, že bolo rozumné počítať efektivity zvlášť pre jednotlivé odvetvia, pretože práve v odvetví technológií to vyzerá tak, že sa oplatí vybrať také

akcie, ktoré sú efektívne aspoň podľa jedného z modelov. Všeobecne pre všetky druhy akcií sa však zdá, že rozdiel vo výnosoch akcií v týchto dvoch skupinách nebude veľký.
Nasledujúce testy (v Tab. 3.2 8. až 11. test) budú vychádzať z predpokladu, že investor chce výnosné a dôveryhodné akcie. V treťom teste, kde sme sa zaoberali efektívnymi akciami v kritériách výnosnosti, nám vyšlo, že sme danú hypotézu síce nezamietli, ale boli sme veľmi blízko ku hranici zamietania, a teda si dáme požiadavku, že chceme len také akcie, ktoré sú efektívne podľa kritérií výnosnosti. V podmienke na efektivitu v dôveryhodnostných kritériách poľavíme a nebudeme chcieť len efektívne, ale určitý počet akcií, ktoré majú najvyššiu hodnotu „efektivít". Testy spravíme pre 25% akcií s najvyššou hodnotu „efektivity", potom pre 50% v modeli s variabilnými aj konštantnými výnosmi z rozsahu, kde budeme porovnávať výnosy akcií patriacej do tejto skupiny akcií s výnosmi zvyšných akcií.
Najprv sa pozrieme na test, kde sme porovnávali výnosy akcií, ktoré patria medzi 25% akcií s najvyššou hodnotou „efektivity" v dôveryhodnostných kritériách s použitím modelu s variabilnými výnosmi z rozsahu a zároveň sú efektívne v kritériách výnosnosti s ostatnými akciami. Podľa výsledkov z jednotlivých sektorov nie je veľmi jasné, kedy by mala byť hodnota výnosov vyššia, pretože v dvoch prípadoch bol priemerný výnos vyšší u efektívnejších akcií a v dvoch bol nižší. Ani pohľad na p-hodnoty nám nedá jednoznačnú odpoveď, ktoré výnosy by mali byť vyššie. Jedine v prípade sektoru spotrebný tovar (Consumer Goods) je p-hodnota blízko pri hranici zamietania, ale nepotvrdzuje výsledok, ktorý vyšiel z priemerných výnosov jednotlivých skupín akcií. Pri pohľade do stĺpca všetkých akcií (all) bol výnos vyšší v prípade efektívnejších akcií, ale ochota zamietnuť opačné tvrdenie je nízka. Preto to vyzerá, že rozdiel vo výnosoch daných skupín akcií nebude veľký.
Teraz sa pozrieme na rovnaký test, kde sme akurát namiesto variabilných výnosov z rozsahu použili konštantné. V tomto prípade sa všetky odvetvia zhodli v tom, že menej efektívne akcie by mali mať nižšiu výnosnosť ako tie efektívnejšie podľa priemerných hodnôt výnosov. Čo sa týka p-hodnoty, tá sa v jednotlivých sektoroch líši, ale v prípade energií (Utilities) je oveľa menšia ako 0,05, a preto nám hovorí, že minimálne v tomto sektore je stredná hodnota výnosov efektívnejších akcií nižšia ako v prípade ostatných na hladine významnosti 5%. Priemerný výnos efektívnejších akcií zo všetkých sektorov je prirodzene tiež nižší, ale podľa p-hodnoty to nevieme potvrdiť. Tá je síce blízko ku hranici zamietania, ale museli by sme test robiť na hladine významnosti 7% aby sme mohli naše tušenie potvrdiť. Preto tento test uzavrieme tak, že

pravdepodobne je stredná hodnota výnosov menej efektívnych akcií vyššia ako v prípade efektívnejších, ale potvrdiť sa nám to podarilo len v sektore energií.

Ďalšie 2 testy sú identické ako predchádzajúce, len v nich predpokladáme, že nám stačia akcie, ktoré patria medzi 50% s najvyššou efektivitou v kritériách dôveryhodnosti s použitím príslušných výnosov z rozsahu. Z Tab. 3.2 si môžeme všimnúť, že v prípade variabilných sú výsledky odlišné ako keď sme používali 25% najspoľahlivejších akcií v kritériách dôveryhodnosti. Stále však platí, že efektívnejšie akcie majú väčší výnos len v dvoch odvetviach a v dvoch je menší. P-hodnoty sú tiež veľmi podobné ako pri teste s 25%, preto ani tu nevieme povedať, ktorá skupina akcií dosahuje väčších výnosov. Keď vychádzame z dát zo všetkých odvetví, priemerná hodnota výnosov je aj tu väčšia v prípade efektívnejších akcií, ale ochota zamietania je nízka. Preto je ťažké povedať, ktoré akcie majú väčšiu výnosnosť, ale vyzerá to tak, že nie je veľmi odlišná.

V poslednom teste skupinu efektívnejších akcií tvorili akcie, ktoré patria medzi 50% najefektívnejších v dôveryhodnostných kritériách pri použití konštantných výnosov z rozsahu a boli efektívne v kritériách udávajúcich výnosnosť. Ich výnos sme porovnávali s ostatnými akciami. V dvoch odvetviach mali efektívnejšie akcie vyšší výnos, v dvoch bola situácia opačná. Avšak p-hodnoty sú výrazne menšie v prípade odvetví, kde je priemerný výnos menší v prípade efektívnejších akcií ako ostatných. Preto sa domnievame, že efektívnejšie akcie majú asi menší výnos. Toto podporuje aj porovnanie priemerných výnosov za všetky odvetvia. Dokonca aj p-hodnota je relatívne nízka, avšak nie natoľko, aby sme mohli túto domnienku potvrdiť. Preto sa uspokojíme so záverom, že asi sú efektívnejšie akcie z tohto testu menej výnosne ako ostatné.

Teraz musíme na základe týchto testov zhodnotiť, ktorú skupinu akcií si vybrať, ak chceme nielen maximalizovať svoj výnos, ale aj mať akcie, ktoré sú dostatočne dôveryhodné. Pri posledných štyroch testoch sme si povedali, že chceme, aby skupinu efektívnejších tvorili len akcie, ktoré sú efektívne v kritériách ziskovosti, a to aj napriek tomu, že na hladine významnosti 5% sa nám nepodarilo ukázať, že výnos je vyšší. Musíme teraz vybrať metódu, ktorá vyberie dostatočne efektívne akcie s čo najvyšším výnosom. Keď sme porovnávali výnosy efektívnych akcií v dôveryhodnostných kritériách s konštantnými a variabilnými výnosmi z rozsahu, vyšlo nám, že výnos je pri použití variabilných výnosov z rozsahu asi väčší ako pri konštantných. To nevzbudzuje veľkú istotu, preto spravíme ešte porovnanie výnosov efektívnych akcií podľa kritérií ziskovosti a 25%, respektíve 50%, „najefektívnejších" akcií v dôveryhodnostných kritériách použitím konštantných a variabilných výnosov z rozsahu.

		Utilities	Cons.Goods	Technology	Industrials	all
25%	crs	-13,8468	13,75621	**2,756027**	4,511278	6,417403
	vrs	**9,514682**	**60,20434**	-17,2781	**15,56036**	**30,24594**
	p-hodnota	0,1	0,0341	0,3187	0,45	0,1277
50%	crs	**0,546353**	37,43339	17,67814	7,020585	17,99429
	vrs	0,170089	**49,65053**	**18,28324**	**12,97511**	**25,6419**
	p-hodnota	0,4163	0,2197	0,3543	0,3636	0,2844

Tab. 3.3 Porovnanie výnosov pri použití konštantných a variabilných výnosov z rozsahu

Z Tab. 3.3 je vidieť, že aj pri použití 25%, aj 50% najefektívnejších akcií podľa dôveryhodnosti bol výnos vyšší použitím konštantných výnosov z rozsahu len v jednom sektore. Preto pohľadom na priemerné výnosy to vyzerá tak, že z celkového pohľadu vedia variabilné výnosy z rozsahu vybrať výnosnejšie akcie. Čo sa týka p-hodnôt, tie takisto majú väčšiu tendenciu zamietať fakt, že by použitie konštantných výnosov z rozsahu malo vyberať výnosnejšie akcie. Overiť sa to však podarilo len v sektore spotrebných tovarov pri výbere 25% najefektívnejších akcií z kritérií dôveryhodnosti. Za všetky sektory taktiež prevláda výnos pri variabilných výnosoch z rozsahu, ale tu sa to už nepodarilo dokázať, pretože p-hodnoty sú väčšie ako 0,05. Všetky testy však preferovali variabilné výnosy z rozsahu, preto aj my budeme uprednostňovať najefektívnejšie akcie z kritérií dôveryhodnosti použitím modelu s variabilnými výnosmi z rozsahu. Zostáva ešte posledná otázka, či vyberať 25% alebo 50% najefektívnejších akcií podľa tohto modelu. Porovnaním priemerných výnosov použitím variabilných výnosoch z rozsahu pri 25% a 50% najefektívnejších akcií zistíme, že len v odvetví technológií (Technology) bol výnos vyšší pri použití 50%. Aj celkovo, pre všetky akcie, vyšla priemerná hodnota výnosov väčšia v prípade 25% najefektívnejších akcií. Preto by sa nám určite nepodarilo toto tvrdenie vyvrátiť žiadnym testom. My však chceme čo najdôveryhodnejšie akcie, preto uprednostňujeme práve skupinu s 25% najdôveryhodnejšími akciami. Navyše je pravdepodobné, že výberom tejto skupiny akcií budeme mať vyšší výnos ako keby sme požadovali až 50% najefektívnejších akcií.

Výsledkom týchto testov sme došli k záveru, že najlepšia skupina akcií, do ktorých sa oplatí investovať sú tie akcie, ktoré sú podľa kritérií výnosnosti efektívne a zároveň patria medzi 25% najefektívnejších akcií v dôveryhodnostných kritériách s použitím variabilných výnosov z rozsahu, ktorých priemerný ročný výnos bol 30,24594%. Je však možné, že použitím dát z iného roku, prípadne rozšírením o hodnoty výnosov z iných odvetví by sa náš výber zmenil. Využitím vedomostí z DEA modelov sa nám však podarilo nájsť akcie, ktoré majú celkom dobrý predpoklad aby investorovi zarobili.

Záver

Táto práca bola venovaná hľadaniu efektívnych akcií pomocou metódy DEA. Postupne sme sa oboznámili s princípmi DEA, určili faktory, ktoré sú dôležité pre akcionára pri výbere jednotlivých akcii a ukázali ako sa dá táto metóda využiť pri hľadaní tých „dobrých“.

Ako prínos tejto práce by som uviedol využitie lineárneho programovania v DEA modeloch aj čitateľom, ktorí nedisponujú poznatkami z tejto problematiky, nakoľko v práci boli prehľadne spracované základné DEA modely s popisom potrebným na pochopenie. Ďalej sme sa v 2. kapitole venovali ekonomickým kritériám, ktoré nám hovoria o rôznych vlastnostiach danej firmy, ktoré sú viac alebo menej dôležité pri rozhodovaní, či sa oplatí do danej akcie investovať alebo nie. Poznatky z prvých dvoch kapitol sme využili v 3. kapitole, kde sme venovali hľadaniu spôsobu na meranie efektivity akcií pomocou metódy DEA na nájdenie efektívnych akcií. Výsledkom tohto skúmania bolo nájdenie skupiny akcií, ktoré sú pre investora dostatočne výnosné, ale aj dôveryhodné. Prínosom pre autora bolo prehĺbenie poznatkov z DEA modelov a ich využitie nielen na školských príkladoch.

Cieľom práce bolo nájdenie efektívnych akcií pomocou metód DEA. Možným rozšírením tejto práce by teda mohlo byť nielen hľadanie efektívnych akcií, ale mohla by sa vyjadrovať aj superefektivita efektívnych akcií a tým vybrať tie „najlepšie“ akcie z efektívnych akcií. Takisto by sa dala skúmať a porovnávať nielen výnosnosť jednotlivých akcií, ale aj volatilita, teda rizikovosť danej investície.

Zoznam použitej literatúry

[1] Cooper, W. W., Seiford, L. M., Tone, K.: *Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References, and DEA-Solver Software,* 2nd ed., Springer, New York, 2007

[2] Halická, M.: *DEA modely*, prednášky, FMFI UK, Bratislava, 2013

[3] Investing & Stock Research by Company and Industry – Businessweek, dostupné na internete (24.5.2014): http://investing.businessweek.com/research/company/overview/overview.asp

[4] Investopedia, dostupné na internete (10.12.2013): www.investopedia.com

[5] Mlynárik, M.: *DEA modely. Assurance Region model*, Bakalárska práca, FMFI UK, Bratislava, 2007, dostupné na internete (7.12.2013): http://diplomovka.sme.sk/zdroj/3250.pdf

[6] Ray, S. C.: *Data Envelopment Analysis: Theory and Techniques for Economics and Operation Research*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2004

[7] Stock quotes, investing & personal finance, news - MSN Money, dostupné na internete (24.5.2014): http://money.msn.com/