UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Simulácia voľného trhu prostriedkami jazyka R

BAKALÁRSKA PRÁCA

2014 Ondrej Kováč

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Simulácia voľného trhu prostriedkami jazyka R

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program:	Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	RnDr. Igor Kossaczký, CSc.

Bratislava 2014

Ondrej Kováč

Abstrakt v štátnom jazyku

KOVÁČ, Ondrej: Simulácia voľného trhu prostriedkami jazyka R [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: RNDr. Igor Kossaczký, CSc., Bratislava, 2014, 35 s.

V našej práci sa zaoberáme modelom voľného trhu. Na analýzujeme modelu používame teoretické výsledky týkajúce sa Brownovho pohybu s driftom. Odvodili sme Laplaceovu transformáciu rozdelenia tohto pohybu. Tú sme potom využili na odhad pravdepodobosti krachu účastníka trhu. Implementáciou modelu v R sme ilustrovali možnosti tohto jazyka na prácu s ekonomickými modelmi, ktorých základom je prvok náhody. Analyzovali sme vplyv zdanenia na jednoduchých modeloch voľného trhu. Simulovali sme modely s rôznymi nákladovými funkciami. Sledovali sme vplyv parametrov týchto funkcií na vývoj modelov. Spolu s tým sme sledovali vplyv redistribúcie bohatstva na vývoj niekoľkých ukazovateľov: rozptyl a celková suma bohatstva a počet účastníkov na trhu.

Kľúčové slová: Stochastické procesy, Brownov pohyb s driftom, model voľného trhu, programovací jazyk R

Abstract

KOVÁČ, Ondrej: Simulation of simple free market model using R [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: RNDr. Igor Kossaczky, CSc. Bratislava, 2014, 35p.

In our work we investigate simple free market model. We use teoretical results of Brownian motion with drift to analyze our market model. The work provide theoretical solution of Laplace transformation of these stochastic process. Using this we estimate probability of bancrupt of market competitor. By implemantation this free market model we illustrate siutability of R for work with economic model, based on randomness. We made simulations of models with different cost functions. We find out the influence of parameters of cost function on evolution of these market models.Along with it we observe influence of redistribution of wealth on few indicators: variance and total sum of wealth and number of competitors on market.

Keywords: Stochastic proces, Brownian motion with drift, free market model, language R

Obsah

Zoznam obrázkov

Úvod

Pozorovanie trhu, jeho popis a predpovedanie jeho stavu v budúcnosti patrí medzi základné ciele ekonómie. Vzniká množstvo rôznych modelov, ktoré sa snažia popísať správanie sa účastníkov predpovedať vývoj trhu. Ruka v ruka s touto snahou prichádza k rozvoju nových oblastí matematiky akou je napríklad teória hier ale aj stochastický kalkulus. Medzi základné modely trhu patrí určite model dokonale konkurenčného trhu, nazývaného aj voľný trh, ktorého modifikáciou sa zaoberáme vo svojej práci. Ideálne vlastnosti tohto modelu síce nie sú v reálnom svete pozorované, ale predstavuje dobrý základ pre ďaľší výskum.

My sme sa rozhodli vniesť trochu náhody do sveta v ktorom vládne "neviditeľná ruka trhu"(pozri [6]). To nás priviedlo k štúdiu stochastických procesov, najmä Brownovho pohybu, nazývaného aj Wienerov proces [7] . Tieto procesy sa skúmajú najmä v modeloch cien aktív [3] ale aj ľudskej populácie. My sme sa naproti tomu rozhodli skúmať vývoj trhu v upravenom modeli s dokonalou konkurenciou. Naším cieľom je analyzovať správanie sa jednoduchých modelov pomocou vhodných stochastických procesov. Tieto modely implementujeme pomocou jazyka R, ktorý je prispôsobený nilen an analýzu dát, ale aj na prácu s náhodnými veličinami.

V 1. kapitola sa sústredíme na základné pravdepodobnostné rozdelenia a vybudujeme teóriu stochastických procesov, konkrétne Brownovho pohybu s driftom a volatilitou. V 2. kapitole odvodíme model trhu a s pomocou vybudovanej teórie odhnadneme jeho správanie. Pomocou vybudovanej teórie odhadneme pravdepodobnosť krachu predajcu na trhu. Posledná kapitola je venovaná implementácii modelu v jazyku R a numerickým experimentom. Ukážeme vplyv daní na vybrané ukazovatele a porovnáme modely s rôznymi funkciami nákladov pre rôzne vstupné parametre.

1 Matematický základ

1.1 Pojmy z teórie pravdepodobnosti

Ku zavedeniu stochastikých procesov a modelu trhu budú potrebné nektoré pojmy z teórie pravdepodobnosti. Tie si na tomto mieste pripomenieme. Budeme postupovať najmä podľa kap. 7 v [8], text doplníme o vlastné komentáre.

Jedným zo základných pravdepodobnostných rozdelení je binomické rozdelenie. Opisuje pravdepodobnosť nastatia určitého počtu javov z n pokusov, keď pravdepodobnosť javu je p.

Definícia 1.1. *Hovoríme, že náhodná veličina X má binomické rozdelenie s parametrami $n \in \mathbb{N}, p \in (0,1)$ ak*

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Píšeme $X \sim Bin(n,p)$.

Najpoužívanejšie spojité rozdelenie je normálne. Často sa nazýva aj Gaussove rozdelenie a možno s ním dobre modelovať množstvo javov v prírode aj spoločnosti.

Definícia 1.2. *Náhodná veličina X má normálne rozdelenie s parametrami $\mu \in \mathbb{R}; \sigma > 0$, ak je jej hustota rovná*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \tag{2}$$

Potom píšeme $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Veta 1.3. *Moivre-Laplaceova veta Nech X je náhodná premenná s binomickým rozdelením s parametrami n, p. Potom pre každé$x \in \mathbb{R}$ platí*

$$\lim_{n \to \infty} P(\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\inf}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \tag{3}$$

Veta 1.3 sa nazýva aj Centrálna limitná veta. Hovorí, že pre dostatočne veľké n môžeme binomické rozdelenie aproximovať normálnym rozdelením s parametrami (np,np(1-p)).

Definícia 1.4. *Nech množina $X_1, X_2 \ldots X_n$ má pravdepodobnostnú funkciu*

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \frac{N!}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} \prod p_i^{x_i}, \tag{4}$$

kde x_i sú nezáporné celé čísla spĺňajúce $\sum x_i = N$ a $p_i > 0; \sum p_i = 1$. Potom združené rozdelenie náhodných premenných $X_1, \ldots X_n$ nazývame multinomické rozdelenie.

Všimnime si, že marginálne rozdelenie jednotlivých $X_1, \ldots X_n$ je binomické.

Definícia 1.5. *Majme náhodný vektor $X = (X_1, \ldots, X_n)^T$. Nech $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)^T$ je daný vektor a V je symetrická kladne definitná matica typu $n \times n$. Potom hovoríme, že X má n-rozmerné normálne rozdelenie s parametrami (μ, V) , ak pre ľubovolný vektor $c \in \mathbb{R}_n$ platí*

$$c^T X \sim N(c^T \mu, c^T V c). \tag{5}$$

Ak má X n-rozmerné normálne rozdelenie s parametrami (μ, V), značíme to ako $X \sim N(\mu, V)$.

Definícia 1.6. *Nech X je nezáporná spojitá náhodná premenná s hustotou $f(x)$. Potom*

$$\mathscr{L}_X(s) = E[e^{-sX}] = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dt \tag{6}$$

je Laplaceova transformácia X.

1.2 Stochastické procesy

V nasledujúcich dvoch podkapitolách si priblížime základy teórie stochastických procesov. Ako zdroj poznatkov sme použili [4; 3; 5]. Stochastický proces je pomenovanie pre systém náhodných premenných $X(t)$ závislých od času t, ktoré sú definované na tom istom pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathscr{S}, P)$.

Čas môže byť spojitý, $t \geq 0$ alebo diskrétny. V danom čase t sú vlastnosti náhodnej premennej $X(t)$ dané pravdepodobnostným rozdelením $X(t)$.

1.2.1 Brownov pohyb

Brownov pohyb sa v súčastnosti využiva nielen na modelovanie dejov vo fyzike ale aj vo finančnej matematike. Možno ho odvodiť zo zovšeobecneného procesu náhodnj prechádzky

$$v(t + \delta t) = v(t) + \epsilon_{t+\delta t} \sqrt{\delta t} \tag{7}$$

kde $\epsilon_{t+\delta t}$ predstavuje časový rad nekorelovaných veličín s nulovou strednou hodnotou a konštantným rozptylom. Pre $\delta t \to 0$ je možné použitím centrálnej limitnej vety ukázať, že proces v(t) konverguje k Brownovmu pohybu.

Definícia 1.7. *Brownov pohyb $B(t)$ je stochastický proces s nasledujúcimy vlastnosťami:*

- *Pre všetky $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ sú prírastky*

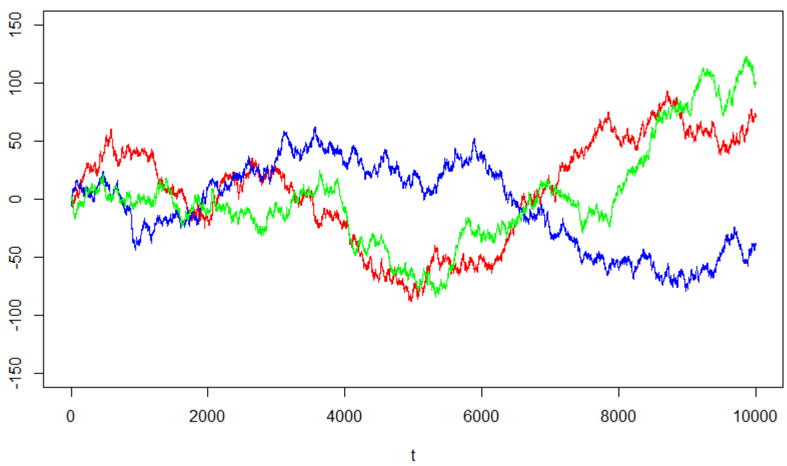
$$B(t_1) - B(t_0), B(t_2) - B(t_1), \ldots, B(t_m) - B(t_{m-1}) \tag{8}$$

  nezávislé.

- *$B(t) - B(s)$ má normálne rozdelenie so strednou hodnotou 0 a disperziou $t - s$.*

- *$B(t), t \geq 0$ sú spojitou funkciou času t.*

Na obrázku 1 môžeme vidieť tri rôzne cesty Brownovho pohybu začínajúce v 0.



Obr. 1: Brownov pohyb

Fakt, že Brownov pohyb začal v bode x, budeme značiť $B^x(t)$, B(t) budeme označovať proces začínajúci v 0.

Teda platí:

$$P(B^x(t) \in (a,b)) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t^2}} dy \tag{9}$$

Funkcia

$$p_t(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t^2}} \tag{10}$$

označuje pravdepodobnosť prechodu z x do y za čas t.

Každý Brownov pohyb sá dá previesť na pohyb začinajúci v 0, keďže platí $B^x(t) - x = B^0(t)$.

Definícia 1.8. *Definujme min* $\emptyset := \infty$. *Potom čas* $T^x(a)$ *nazveme čas prvého prechodu bodom a ak platí*

$$T^x(a) = min\{t, B^x(t) = a\}. \tag{11}$$

Veta 1.9. $P(T^x(a) < \infty) = 1$ *pre všetky* a, $x \in \mathbb{R}$.

Dôkaz uvedieme neskôr, pozri časť 1.3.

Veta 1.10. *Nech* $a \in \mathbb{R}$ *Potom Laplaceova transformácia náhodnej premennej T(a) je:*

$$E[e^{-\alpha T(a)}] = e^{-|a|\sqrt{2\alpha}} \tag{12}$$

a hustota T(a) je:

$$f_{T(a)}(x) = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi}} x^{-3/2} e^{-\frac{a^2}{2x}}. \tag{13}$$

Dôkaz 1.10 vynecháme, presahuje totiž rámec tejto práce. Platnosť 13 vyplýva priamo 1.10, keďže

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} f_{T(a)}(x) dx = e^{-|b|\sqrt{2\alpha}}. \tag{14}$$

Strednú hodnotu T(x) získame z rovnice

$$E[T(x)] = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\delta E[e^{-\alpha T(a)}]}{\delta \alpha} \tag{15}$$

$$E[T(x)] = \lim_{\alpha \to 0} \frac{|x|}{\sqrt{2\alpha}} e^{-|x|\sqrt{2\alpha}} = \infty \tag{16}$$

pre všetky $x \neq 0$.

Nech B(t) je Brownov pohyb začínajúci v nule. Definujme

$$M(t) = \max_{0 \le s \le t} B(s) \text{ a } m(t) = \min_{0 \le s \le t} B(s)$$

Veta 1.11. *Pre x>0 platí*

$$P(M(t) \ge x) = 2P(B(t) \ge x) = 2(1 - \Phi(\frac{x}{\sqrt{t}})),$$

kde $\Phi(x)$ *je distribučná funkcia normálneho rozdelenia.*

Dôkaz:

$$P(M(t) \geq x) = P(T(x) \leq t) = \int_0^t \frac{x}{\sqrt{2\pi}} u^{\frac{-3}{2}} e^{-\frac{x^2}{2u}} du \tag{17}$$

Po substitúcii $\frac{x^2}{u} = \frac{y^2}{t}$,

$$u^{-\frac{-3}{2}} du = -2du^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x\sqrt{t}} dy \tag{18}$$

dostávame

$$= 2\int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}} dy \tag{19}$$

čo je rovné

$$2(1 - \Phi(\frac{x}{\sqrt{t}})).$$

Pre x<0 platí analógia predchádzajúcej vety.

1.3 Brownov pohyb s driftom

Táto podkapitola je spracovaná podľa [2].

Pri modelovaní vývoja mnohých systémov sa používa transformácia Brownovho pohybu na pohyb s driftom. Hlavná oblasť jeho využitia je vo finančnej matematike pri modelovaní hodnoty aktív [3]. V biológii sa využíva na simuláciu vývoja populácie živočíchov.

Definícia 1.12. *Nech $\mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+$ a $B(t)$ je Brownov pohyb. Stochastický proces*

$$X(t) = \mu t + \sigma B(t)$$

nazveme Brownov pohyb s driftom μ a volatilitou σ.

Funkcia hustoty pravdepodobnosti X(t) pre proces začínajúci v x_0 je

$$f(x, t, x_0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x - x_0 - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}} \tag{20}$$

Nech $h > 0$. Pozrime sa teraz na čas prvého prechodu bodom h, $T_X^{x_0}(h)$. Najskôr nájdeme Laplaceovu transformáciu náhodnej premennej $T_X^{x_0}(h)$.

Označme podmienenú hustotu pravdepodobnosti $T_X^{x_0}(h)$ ak $T_X^{x_0}(h) < \infty$ ako $g(t, h, x_0)$. Označme Laplaceovu transformáciu funkcií f a g

$$f^*(x, \alpha, x_0) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} f(x, t, x_0) dt \tag{21}$$

a

$$g^*(h,\alpha,x_0) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} g(h,t,x_0)dt \tag{22}$$

Veta 1.13. *Ak $x_0 < h < x$ potom*

$$P(T_X^{x_0} < \infty) g^*(h,\alpha,x_0) = \frac{f^*(x,\alpha,x_0)}{f^*(x,\alpha,h)}. \tag{23}$$

Dôkaz: $X(t)$ sa môže dostať z bodu x_0 do bodu x v čase t, tak, že najskôr dosiahne bod h v čase s a potom x v čase $t-s$. Teda

$$f(x,t,x_0) = P(T_X^{x_0} < \infty) \int_0^t g(h,s,x_0) f(x,t-s,a)dt \tag{24}$$

Spravme Laplaceovu transformáciu oboch strán rovnosti. Dostaneme

$$f^*(x,\alpha,x_0) = P(T_X^{x_0} < \infty) \int_0^\infty g(h,s,x_0) \times \int_s^\infty e^{-\alpha t} f(x,t-s,h)dtds. \tag{25}$$

Substituujme $t - s = \nu$

$$f^*(x,\alpha,x_0) = P(T_X^{x_0} < \infty) \int_0^\infty e^{-\alpha s} g(h,s,x_0)ds \times \int_0^\infty e^{-\alpha\nu} f(x,\nu,h)d\nu. \tag{26}$$

Teda

$$f*(x,\alpha,x_0) = P(T_X^{x_0} < \infty) g^*(h,\alpha,x_0) f*(x,\alpha,h). \tag{27}$$

□

Aby sme mohli využiť túto vetu, potrebujem nájsť Laplaceovu transformáciu (21) funkcie hustoty pravdepodobnosti 20 v bodoch x_0 a a. Označme $c = \frac{(x-x_0)^2}{\sigma^2}$ a $d = \frac{(x-x_0)}{\sqrt{\mu^2+2\sigma^2\alpha}}$ Potom

$$g^*(x,\alpha,x_0) = \frac{1}{\sigma c} e^{-\frac{x-x_0}{\sigma^2}(\sqrt{\mu^2+2\sigma^2\alpha}-\mu)} \times \int_0^\infty t \frac{c}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{c(t-d)^2}{2d^2 t}} dt = \frac{d}{\sigma\sqrt{c}} e^{\frac{x_0-x}{\sigma^2}(\sqrt{\mu^2+2\sigma^2\alpha}-\mu)} \tag{28}$$

Teraz použitím vety 1.13 získame

$$P(T_X^{x_0} < \infty) g^*(h,\alpha,x_0) = e^{-\frac{x_0-h}{\sigma^2}(\sqrt{\mu^2+2\sigma^2\alpha}-\mu)} \tag{29}$$

Kladný drift Pre $\mu > 0$ dostaneme z rovnice 29

$$P(T_X^{x_0} < \infty) g^*(h,\alpha,x_0) = e^{-\frac{(h-x_0)\mu}{\sigma^2}(1-(1+\frac{2\sigma^2\alpha}{\mu^2})^{1/2})} = e^{-\frac{\lambda}{\kappa}(1-(1+\frac{2\sigma^2\alpha}{\lambda})^{1/2})} \tag{30}$$

kde $\lambda = \frac{h-x_0}{\mu}$ a $\kappa = \frac{(h-x_0)^2}{\sigma^2}$

Pre $\alpha = 0$ je Laplaceova transformácia g^* rovná 1. Keď teda do rovnosti 30 dosadíme $\alpha = 0$, dostaneme $P(T_X^{x_0} < \infty) = 1$.

Záporný drift Pre $\mu < 0$ dostaneme z rovnice 29

$$P(T_X^{x_0} < \infty)g^*(h, \alpha, x_0) = e^{-\frac{(h-x_0)\mu}{\sigma^2}(1+(1+\frac{2\sigma^2\alpha}{\mu^2})^{1/2})} = e^{-\frac{\lambda}{\kappa}(1+(1+\frac{2\sigma^2\alpha}{\lambda})^{1/2})} \tag{31}$$

Pre $\alpha = 0$ dostaneme

$$P(T_X^{x_0} < \infty) = e^{-\frac{2\lambda}{\kappa}} = e^{-\frac{2(h-x_0)\mu}{\sigma^2}} \tag{32}$$

Nulový drift Pre $\mu = 0$ dostaneme z rovnice 13

$$P(T_X^{x_0} < \infty)g^*(h, \alpha, x_0) = e^{-\frac{(h-x_0)}{\sigma^2}(2\sigma^2\alpha)^{1/2})} \tag{33}$$

Keď teda do rovnosti 33 dosadíme $\alpha = 0$, dostaneme $P(T_X^{x_0} < \infty) = 1$ čo dokazuje vetu 1.9.

2 Model trhu

2.1 Úvod

Slovom trh sa v minulosti označovalo miesto, kde sa stratávali kupci a predajcovia a vymieňali si medzi sebou produkty a služby. V dnešnej dobe už trh nie je len konkrétnym miestom. Označuje celú oblasť v rámci ktorej predajcovia súťažia medzi sebou o zákazníkov. Alfred Marshall definoval trh ako oblasť, v rámci ktorej prebieha medzi predajcami a kupcami tak slobodná interakcia, že ceny za rovnaký tovar majú tendenciu sa rovnať. Väčšina trhov obsahuje viacero medzičlánkov medzi prvým predajcom tovaru a posledným kupcom. Vo všeobecnosti je účinkom trhu prenos komodity z roztrúsených zdrojov k roztrúseným spotrebitelom.

Vzor nášho modelu je trh s pizzou vo veľkom meste. Tento trh obsahuje veľké množstvo pizzérii, ktoré si navzájom konkurujú cenami, keďže vyrábujú väčšinou rovnaké druhy pizze. Takmer všetky majú aj vlastnú donáškovú službu a sú teda dostupné pre všetkých obyvateľov danej oblasti. Súťažia teda o zákazníka so všetkými prevádzkami v meste. Rozhodnutie zákazníkov, s ktorého podniku si objednajú pizzu, je ovplyvnené okrem ceny aj množstvom náhodných skutočností. Modelujem správanie sa trhu jednej komodity, kde kupcami sú koneční spotrebitelia. Množstvo kupcov na trhu nie je konštatné, mení sa v čase. Túto skutočnosť modelujeme stochastickým procesom, ktorý vnáša do modelu prvok náhody.

2.2 Popis modelu

Modelujeme trh s dokonalou konkurenciou, spĺňajúci nasledujúce podmienky:

- Na trhu je veľké množstvo malých predajcov a kupcov, žiadny z nich nedokáže ovplyvniť cenu.
- Predmet nákupu je nediferencovaný, rozhodnutia o kúpe sú motivované len cenou.
- Každý predajca vie obslúžiť všetkých zákazníkov.

Medzi podmienkami nie je zaradená podmienka na voľný vstup, ktorá sa v modeloch bežne vyskytuje. V našom modeli nebudú vstupovať na trh nový predajcovia. Predpokladáme, že všetci vhodný už na trhu sú.

Splnenie týchto podmienok zaručí rovnosť ceny u všetkých predajcov. Všetkých zákaznikov totiž získajú predajcovia s najnižšou cenou. Keďže cena je rovnaká, zákazníci si vyberajú náhodne, od ktorého predajcu si kúpia produkt. S rovnakou pravdepodobnosťou výberu každého predajcu, keďže rozhodnutia sú motivované len cenou, ktorá je všade rovnaká.Zákazník sa rozhoduje náhodne pri každom kuse tovaru. Potom je jedno, koľko je zákazníkov, záleží len na tom, koľko tovaru si kúpia. Predpokladajme teda, že každý zákazník kúpi, v danom čase, jeden kus produktu od náhodného predajcu.

2.3 Tržby, náklady, cena

Počet zákazníkov aj množstvo tovaru predaného v čase t označme $Z(t)$. Nech množstvo predaného tovaru v čase t je náhodná premenná so strednou hodnotou v množstve tovaru predaného v čase $t-1$. Teda očakávané celkové tržby su rovné predchádzajúcim tržbám. Potom očakávaná hodnota tržby pre jedného predajcu je $1/n$ celkovej očakávanej tržby. Keďže zákazníci sa rozhodujú iba podľa ceny, predajcovia nastavia cenu čo najnižšie. Teda ich očakávaný zisk je blízky nule, pri kladnom zisku by vedeli podliezť ceny ostatných. Preto žiadny predajca nemôže mať vyššie náklady ako ostatní.

Z rovnice očakávané tržby = očakávané náklady

$$P \cdot E[Z(t)]/N = c(E[Z(t)]/N) \tag{34}$$

vyjadríme cenu P(t) jedného kusu produktu v čase t.

$$P(t) = \frac{c(E[Z(t)]/N)}{E[Z(t)]/N} = \frac{c(Z(t-1)/N)}{Z(t-1)/N} \tag{35}$$

V modeli budeme skúmať dve základné nákladové funkcie:

- S konštantnými konštantnými nákladmi.
- S klesajúcimi hraničnými nákladmi

Naviac každý predajca má fixné náklady, napr. prenájom miesta na predaj. Predpokladajme, že tieto náklady sú pre všetkých predajcov rovnaké. Nákladovú funkciu s rastúcimi hraničnými nákladmi nebudeme v modeli skúmať, keďže v realite nie je u malých predajcov pozorovaná. Veľké firmy môžu mať takúto nákladovú funkciu, keď platia nepriame náklady kvôli sťaženej organizácii práce. Ako predstaviteľa druhej triedy nákladových funkcií sme vybrali $c(x) = f + k\sqrt{x}$, kde k je vhodná kladná konštanta.

Označme počet predajcov N a očíslujme ich prirodzenými číslami od 1 po N. Množstvo tovaru ktorý predal predajca i v čase t označme $K_i(t)$.

Lema 2.1. *Pre daný čas t je $K_i(t) \sim Bin(Z(t), \frac{1}{N})$*

Pre každého zákazníka je pravdepodobnosť výberu predajcu i rovná $1/N$. Teda pravdepodobnosť, že počet zákazníkov, ktorý si v čase t vybrali predajcu i je rovný k je daná výrazom

$$\binom{Z(t)}{k} \frac{1}{n}^k (1 - \frac{1}{N})^{N-k} \tag{36}$$

Veta 2.2. *Nech p je vektor dĺžky N, ktorý má všetky súradnice rovné $1/N$. Potom združené rozdelenie náhodných premenných $K_1(t), K_2(t), \ldots, K_N(t)$ je multinomické rozdelenie s parametrami $(Z(0), p)$.*

Dôkaz: Medzi N predajcov sa rozdelí $Z(t)$ zákazníkov. Združená pravdepodobnosť

$$P(K_1(t) = k_1, K_2(t) = k_2, \ldots, K_N(t) = k_n)$$

pre všetky

$$k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0; \sum_{i=1}^{N} k_i = Z(t),$$

je preto vyjadrená výrazom

$$\frac{Z(t)!}{\prod_{i=1}^{N} k_i!} \prod p_i^{k_i}$$

,

$$\sum_{i=1}^{N} p_i = N \cdot \frac{1}{N} = 1$$

Teda združené rozdelenie náhodných premenných $K_1(t), K_2(t), \ldots, K_N(t)$ spĺňa definíciu multinomického rozdelenia.

2.4 Pravdepodobnosť krachu

V tejto časti odhadujeme správanie sa modelu. Predpokladajme, že predajca i má vstupný kapitál h. Keď jeho množstvo peňazí klesne na nulu, tak skrachoval a musí z trhu odísť. Nás zaujíma, aká je pravdepodobnosť krachu. Na odhad tejto pravdepodobnosti použijeme poznatky s kapitoly 1.

Pre dostatočne veľké $Z(t)$ môžeme marginálne rozdelenie náhodných premenných $K_i(t)$ aproximovať podľa vety 1.3 normálnym rozdelením s parametrami $(Z(t)/N, Z(t)\frac{N-1}{N^2})$.

Označme

$$K_i'(t) = \frac{N \cdot K_i(t) - Z(t)}{\sqrt{Z(t)(N-1)}}$$

Rozdelenie premennej $K_i'(t)$ aproximujeme normálnym rozdelením so strednou hodnotou 0 a disperziou 1.

Predpokladajme teraz že počet zákazníkov konštantný v čase, Z(t)=Z(0), a nákladová funkcia predajcu i je v tvare $c(x) = f + q \cdot K$. Definujme kumulovaný zisk predajcu i do času t $V_i(t) = \sum_{j=1}^{t}[P(t)K_i(j) - c(K_i(j))]$ Pri konštantnom Z(t) je cena rovnako konštantná a rovná

$$P(t) = \frac{c(Z(0)/N)}{Z(0)/N} = \frac{f \cdot N}{Z(0)} + q \tag{37}$$

Potom

$$V_i(t) = \sum_{j=1}^{t}[\frac{f \cdot N}{Z(0)}K_i(j) - f] = -t \cdot f + \frac{f \cdot N}{Z(0)} \sum_{j=1}^{t} K_i(j) \tag{38}$$

Teraz upravíme V_i do tvaru $t \cdot g + Q \cdot B(t)$, kde Q, g sú konštanty a B(t) je Brownov pohyb začínajúci v 0. Na to potrebujeme znormovať $K_i(j)$

$$V_i(t) = -t \cdot f + \frac{f \cdot (N-1)}{\sqrt{Z(0)}} \sum_{j=1}^{t}[K_i'(j) + \frac{Z(0)}{N}] \tag{39}$$

Nahradíme $Q = \frac{f \cdot (N-1)}{\sqrt{Z(0)}}$ a $g = f(-1 + \frac{\sqrt{Z(0)} \cdot (N-1)}{N})$ a dostávame žiadaný tvar

$$V_i(t) = t \cdot g + Q \cdot B(t).$$

$V_i(t)$ je Brownov pohyb s driftom g a volatilitou Q.

$g = f(-1 + \frac{\sqrt{Z(0)} \cdot (N-1)}{N}) > 0$, Teda $V_i(t)$ je pohyb s kladným driftom. Keďže chceme skúmať proces vzhľadom na hranicu, ktorá je menšia ako začiatočný bod, upravíme $V_i(t)$ na proces so záporným driftom.

$$V_i'(t) = -V_i(t) = -g \cdot t + Q \cdot B(t), \tag{40}$$

lebo $B(t) = -B(T)$.

Zvoľme hranicu $h > 0$. Potom podľa rovnice 32 je pravdepodobnosť, že proces $V_i'(t)$ dosiahne hranicu h v konečnom čase rovná

$$P(T_{V'}(h) < \infty) = e^{-\frac{2hg}{Q^2}} \tag{41}$$

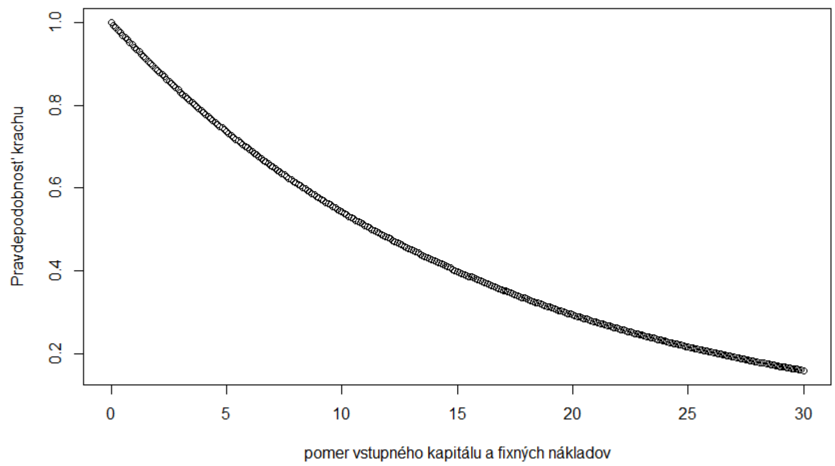
Táto pravdepodobnosť je zároveň rovná pravdepodobnosti, že proces $V_i(t)$ dosiahne v konečnom čase hranicu -h. Dosadením výrazov pre g a Q do 41 dostaneme

$$P(T_V(-h) < \infty) = e^{-\frac{2hg}{Q^2}} = e^{-\frac{2hN(-N+\sqrt{Z(0)}(N-1))}{f\cdot(N-1)^2 Z(0)}} \tag{42}$$

Pre veľké N je 42 priližne rovná

$$e^{-\frac{2h(-1+\sqrt{Z(0)})}{f\cdot Z(0)}} \tag{43}$$

Táto pravdepodobnosť závisí od Z(0) pomeru f a h, teda fixných nákladov a vstupného kapitálu. Na obrázku 2 môžeme vidieť, že táto pravdepodobnosť s rastúcim pomerom h/f klesá k nule. Pre rastúci počet zákazníkov klesá vplyv pomeru h/f, čo môžeme

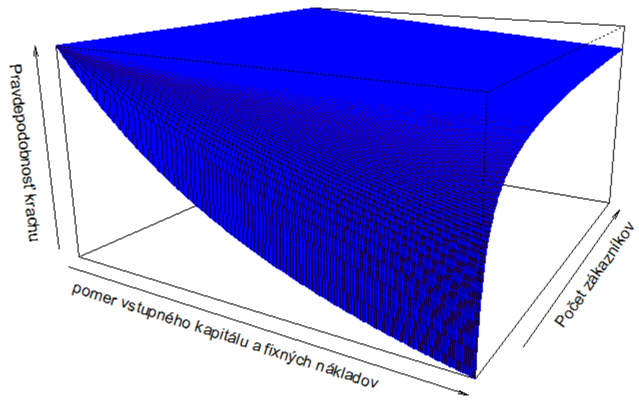


Obr. 2: Závislosť pravdepodobnosti krachu od pomeru h/f

vidieť na obrázku 3 .

2.5 Modelovanie počtu zákazníkov

Pre protreby nášho modelu budeme čas modelovať diskrétne. Spojité modelovanie času má zmysel pri modelovaní správania finančného trhu, kde transakcie prebiehajú vo



Obr. 3: Závislosť pravdepodobnosti krachu od pomeru h/f a počtu zákazníkov

veľmi malých časových intervaloch, rádovo v milisekundách. Na trhu, kde sa tovar predáva konečnému spotrebiteľovi, sa rozhodnutia dejú maximálne na dennej báze. V reálnom svete nebýva počet zákazníkov konštatný, my ho budeme modelovať pomocou normálneho rozdelenia nasledovne. Pre počet zákazníkov v čase t, $Z(t)$, bude platiť

$$Z(t) \sim N(Z(t-1), 1) \text{ pre všetky } t \in \mathbb{N}$$

Lema 2.3. *Nech* $t = 0, 1, 2, \ldots$ *a* $Z(t) \sim N(Z(t-1), 1)$ *pre všetky* $t > 0$ *potom* $Z(t) \sim N(Z(0), t)$

Dôkaz: Dokážeme indkuciou cez t. Pre $t = 1$ zjavne platí $Z(1) \sim N(Z(0), 1)$. Predpokladajme platnosť pre $t = k$. Potom $Z(k+1) \sim N(Z(k), 1)$ čo je ekvivalentné $Z(k+1) \sim N(0,1) + Z(k)$ kde $N(0,1)$ a $Z(k)$ sú nezávislé. Potom $Z(k+1) \sim N(0,1) + N(Z(0), k) = N(Z(0), k+1)$.

Veta 2.4. *Z(t) je Brownov pohyb zo začiatkom v Z(0).*

Dôkaz:

Všetky prírastky $Z(1) - Z(0), Z(2) - Z(1), \ldots, Z(n) - Z(n-1)$ sú náhodné premenné z normálneho rozdelenia so strednou hodnotou 0 a disperziou 1. Zároveň sú jednotlivé prírastky navzájom nezávislé, čím je splnená prvá vlastnosť Brownovho pohybu. $Z(t)-$

$Z(s) = Z(t) - Z(t-k)$ pre nejaké $k \in \mathbb{N}$. To môžeme napísať ako

$$Z(t) - Z(t-k) = (Z(t) - Z(t-1) + Z(t-1) - Z(t-2) + \ldots Z(t-k+1) - Z(t-k)$$

Teda $Z(t)-Z(t-k) \sim N(0,k)$, teda $Z(t)$ spĺňa aj druhú vlastnosť Brownovho pohybu. Keďže $Z(t)$ je definovnaný iba v diskrétnych bodoch, je spojitý v každom bode svojho definičného oboru. □

Nevýhodou tohto modelu počtu zákazníkov je záporný počet zákazníkov v nejakom čase s pravdepodobnsťou 1. My sme v simulácii obmedzení hornou hranicou času T. Pravdepodobnosť nastatia situácie $Z(t) < 0$ v čase $t \leq T$ je rovná pravdepodobnosti prekročenia hranice $-Z(0)$ brownovým pohybom začínajúcim v 0. Teda

$$P(\min_{0 \leq t \leq T} Z(t) < 0) = P(\tau(-Z(0)) < T) \leq P(T(-Z(0)) < T) =$$

$$= \int_{-\infty}^{T} \frac{Z(0)}{\sqrt{2\pi}} x^{-3/2} e^{-\frac{Z(0)^2}{2x}} dx$$

Táto pravdepodobnosť je pre hodnoty $Z(0) = 1000000, T = 10000$, použité v simulácii správania sa modelu zanedbateľne malá. Pri dlhších časových intervaloch sa ale začína blížiť k 1. Tento problém môžeme vyriešiť jednoduchou úpravou modelu, kde $Z(t)$ nahradíme $0 : Z'(t) := \max 0, Z(T)$.

2.6 Dane a prerozdelovanie

V experimente budeme sledovať aj vplyv daní na trh. Každý predajca , ktorého aktuálne množstvo kspitálu je kladné odvedie pomernú časť svojho majetku odvedie do spoločnej poklanice. Z nej potom každý dostane rovnaké množstvo kapitálu. Teda chudobnejší získaju kapitál, keďže zaplatili menej ako dostali a bohatší ho stratia. Medzi predajcov sa rozdelí celá odvedená suma, nič sa nespotrebuje na obsluhu daňového systému. Budeme sledovať vplyv výšky zdanenia na nasledovné ukazovatele:

- Počet zostávajúcich predajcov
- Celkové množstvo kapitálu na trhu
- Rozptyl kapitálu

2.7 Zhrnutie

V časti 2.4 sme odvodili približnú hodnotu, pre pravdepodobnosť krachu predajcu. Predpokladali sme tam, že počet zákazníkov je v čase nemenný a dostatočne veľký. Táto pravdepodobnosť sa s rastúcim pomerom vstupnného kapitálu k fixným nákladom zmenšuje, predajca vie pri veľkom vstupnom kapitále nahradiť straty z období, kde mal málo zákazníkov. Pri zväšujúcom sa počte zákazníkov, klesá vplyv vstupného kapitálu, narastá totiž rozptyl ziskov. V našom modeli je ale počet zákazníkov nekonštatná náhodná premenná, majúca vlastnosti Brownovho pohybu. Očakávame, že táto zmena oproti predpokladom nebude mať veľký vplyv na správanie sa modelu.

3 Implementácia a experimenty

V tejto kapitole je obsiahnutý popis implementácie modelu a výsledky vykonaných numerických experimentov.

3.1 Implementácia modelu

3.1.1 Čo je R

R je jazyk a prostredie vyvinuté pre štatistické výpočty. Umožňuje využívať širokú škálu štatistických techník a ľahko vytvoriť dobre vyzerajúce kvalitné grafy. Je považované za odlišnú implementáciu softwéru S, na ktorý sa podobá. Jednoducho sa v ňom vytvárajú náhodné vektory z množstva preprogramovaných rozdelení. Umožnuje sledovanie vývoja modelu v reálnom čase rýchlym vykreslovaním pekných grafov.

3.1.2 model

Najskôr vygenerujeme počet zákazníkov v jednotlivých časoch, keďže nezávisí od ostatných parametrov, ani od vývoja modelu. funkcia rnomr generuje čísla z normálneho rozdelenia so zadanou strednou hodnotou a disperziou.

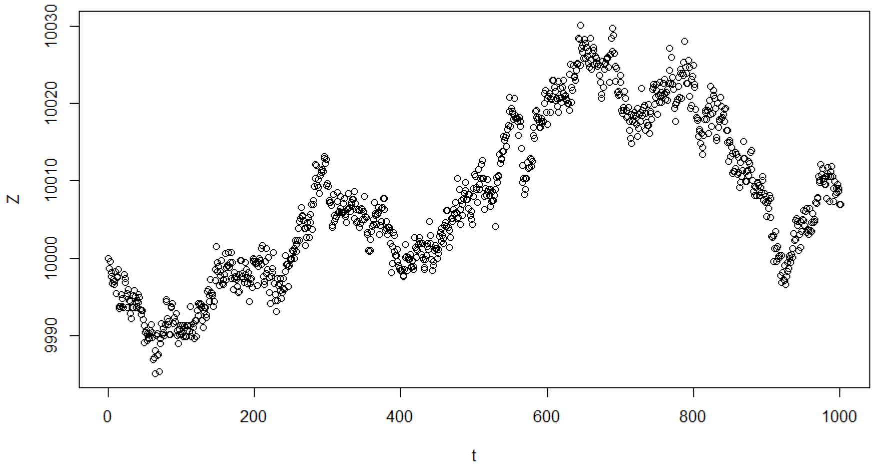
```
 for(i in 1:T)
Z[i+1]<-rnorm(1,Z[i],1)
 Z[i+1]<-max(0,Z[i+1])
```

Na obrázku 4 môžeme vidieť správanie sa Z(t) v závislosti od času pre $Z(0) = 10000$.

Dôležitým rvkom našej implementácie modelu je funkcia gain(x,i), ktorá pre daný čas generuje tržby jednotlivých predajcov. V rámci nej najskôr vygenerujeme vektor pravdepodobností p požadovanej dĺžky. V druhom kroku pomocou predprogramovanej funkcie multinom(k, N, p) vytvoríme vektor s multinomického rozdelenia s parametrami Z(t) a p.

```
gain<-function(x,i){


prob<-runif(length(x[,1]),1,1)  - vektor pravdepodobností
r<-rmultinom(1,Z[i],prob)       - generujeme vektor z multinomického roz
```

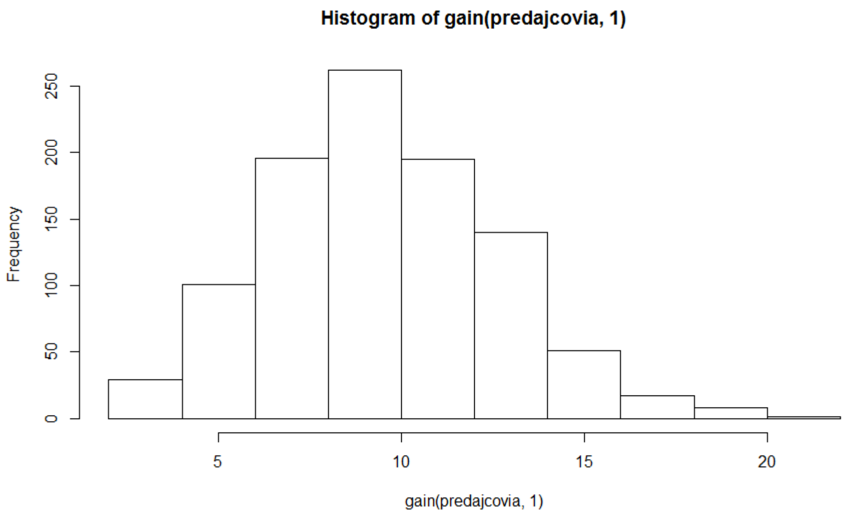


Obr. 4: Vývoj počtu zákazníkov v čase

r

}

Pre veľký počet zákazníkov sú marginálne rozdelenia jednotlivých súradníc vektora r podobné normálnemu rozdeleniu. Na obrázku 5 môžeme vidieť približnú hustotu tohto rozdelenia.



Obr. 5: Histogram funkcie gain v čase 1

Nasleduje samotný experiment, ktorý pozostáva z opakovania veľkého množstva iterácii. Na začiatku každej iterácie vypočítame tržnú cenu, za ktorú sa bude predávať.

```
P<-(cost(Z[i]/n)/(Z[i]/n))
```

Množstvo kapitálu jednotlivých predajcov v každej iterácii meníme o zisk=gain-náklady. vykonali sme simulácie pre dve triedy nákladových funkcií, ktoré sú popísané v časti. ??. Potom sa vykoná zdanenie zisku a spätné prerozdelenie. Zdaňujeme len tých ktorých aktualny kapitál je kladný. Vypočítame čelkovú sumu vyzbieraných daní a tie potom rovnomerne rozdelíme medzi všetkých predajcov. Výšku daní označujeme $w \in [0, 1)]$.

```
 predajcovia[,1]<-predajcovia[,1]+zisk
tax<-sum(w*predajcovia[predajcovia[,1]>0,1])
predajcovia[predajcovia[,1]>0,1]<-predajcovia[predajcovia[,1]>0,1]*(1-w
predajcovia[,1]<-predajcovia[,1]+tax/n
```

Na konci iterácie predajcovia, ktorých kapitál nie je kladný, skrachujú a odchádzajú z trhu.

3.2 Výsledky

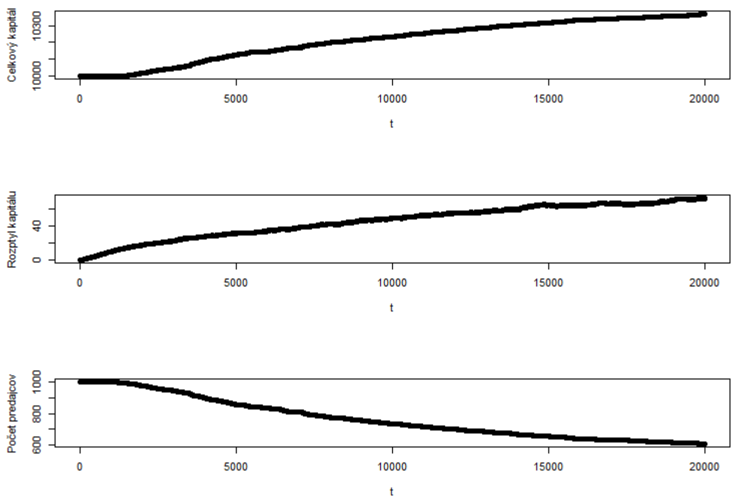
3.2.1 I. trieda nákladových funkcií

Všetci predajcovia majú nákladovú funkciu v tvare c(x)=f+gx. Nastavme f=1, g=1. Na obrázku 6 vidíme vývoj trhových ukazovateľov v modeli neobsahujúcom dane. Počet predajcov postupne klesá ale zároveň pozorujeme nárast kapitálu. Rozptyl kapitálu sa zväčšuje, teda majetková nerovnosť narastá.

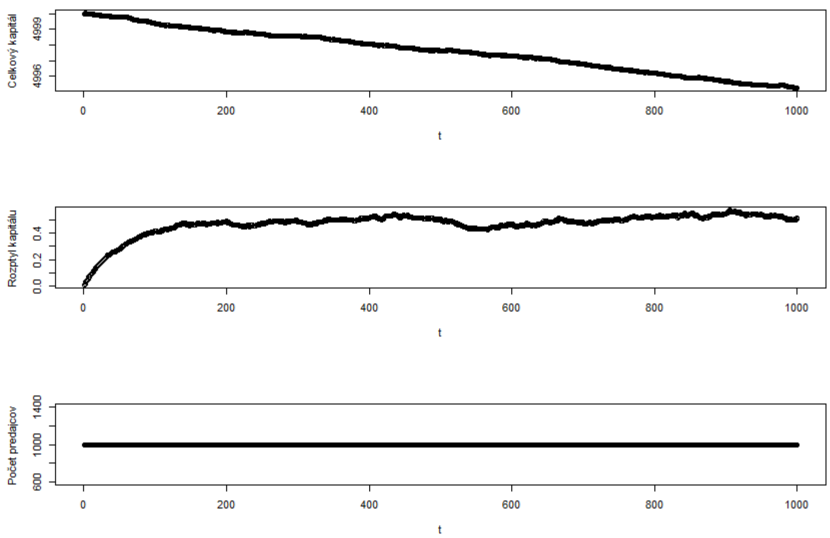
Na obrázku 7 vidíme vývoj trhových ukazovateľov v modeli obsahujúcom dane vo výške 0,01. Počet predajcov sa nemení aj rozptyl kapitálu sa ustálil. Celkový kapitál sa zmenšuje.

Pozrime sa teraz na vývoj trhu po zavedení daní na obrázku ??. V čase 1000 sme zaviedli dane s cielom zvrátiť rast rozptylu. Zaviedli sme rovnaké dane vo výške 0,01. Vidíme, že zavedenie daní prinieslo očakávaný efekt: Rozptyl kapitálu klesol na nízke hodnoty. Rovnako sa ale zastavil rast celkového bohatstva.

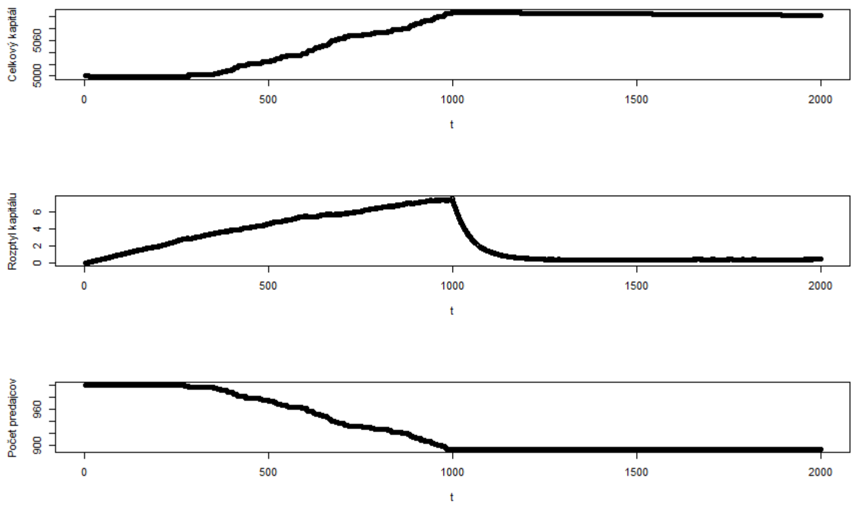
Na porovnanie vývoj trhu s konštatným počtom zákazníkov a s daňami (obrázok 9) aj bez daní (obrázok 10).



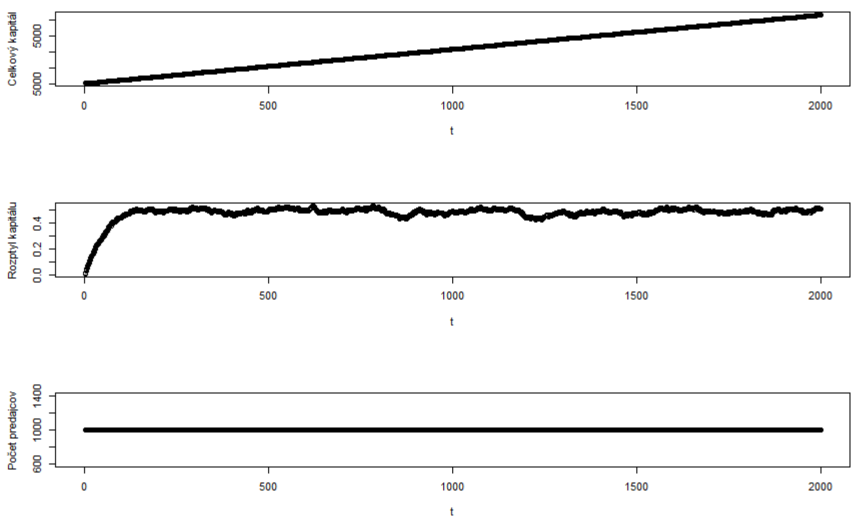
Obr. 6: Vývoj trhových ukazovateľov v čase bez daní



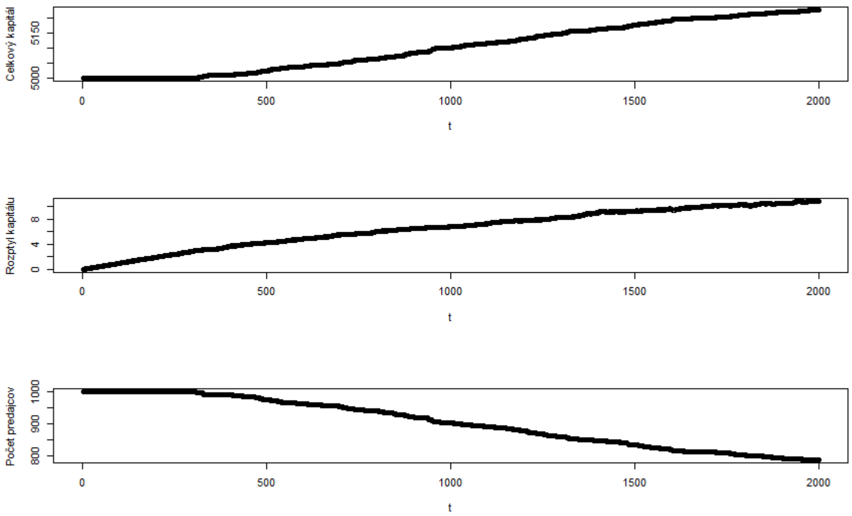
Obr. 7: Vývoj trhových ukazovateľov v čase s daňami



Obr. 8: Vývoj trhových ukazovateľov v čase po zavedení malých daní

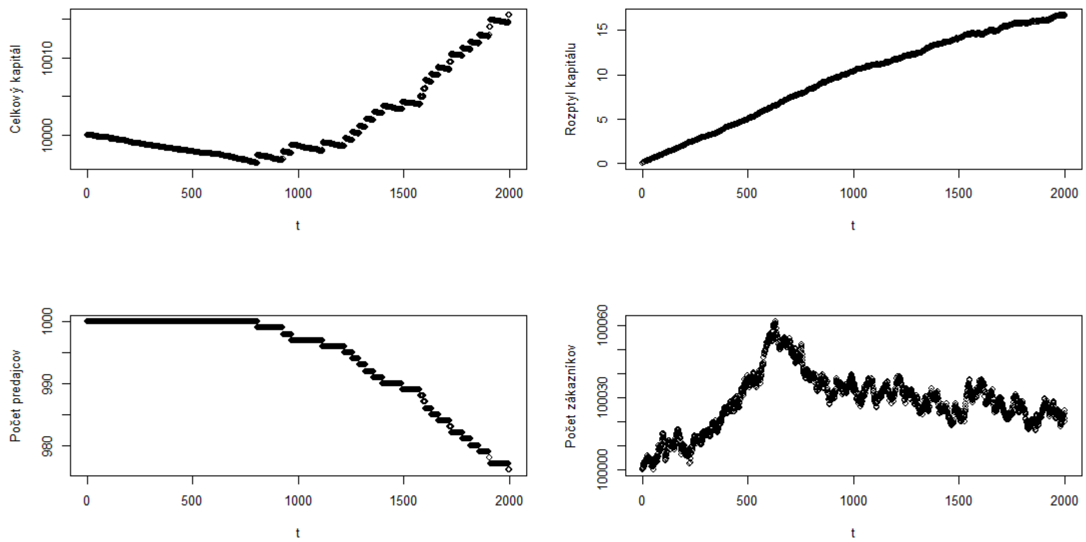


Obr. 9: Vývoj trhových ukazovateľov v čase s daňami a s konštatným počtom zákazníkov



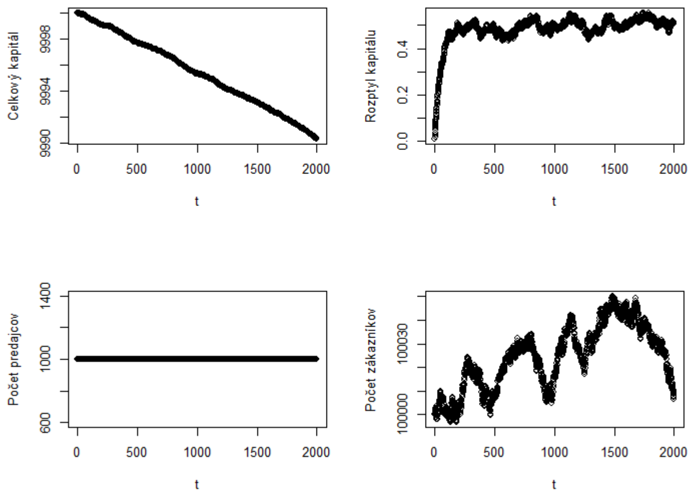
Obr. 10: Vývoj trhových ukazovateľov v čase bez daní s konštatným počtom zákazníkov

Predstavme si trh so zanedbateľnými variabilnými nákladmi, napríklad internetová zábava. Teda nastavíme g=0, f=1. Na obrázku 11 môžeme vidieť, že keď začal klesať počet predajcov, začalo stúpať celkové bohatstvo. Je to spôsobené tým, že skrachovaný predajca si so sebou odnáša dlhy.



Obr. 11: Vývoj trhových ukazovateľov v čase bez daní pre nulové variabilné náklady

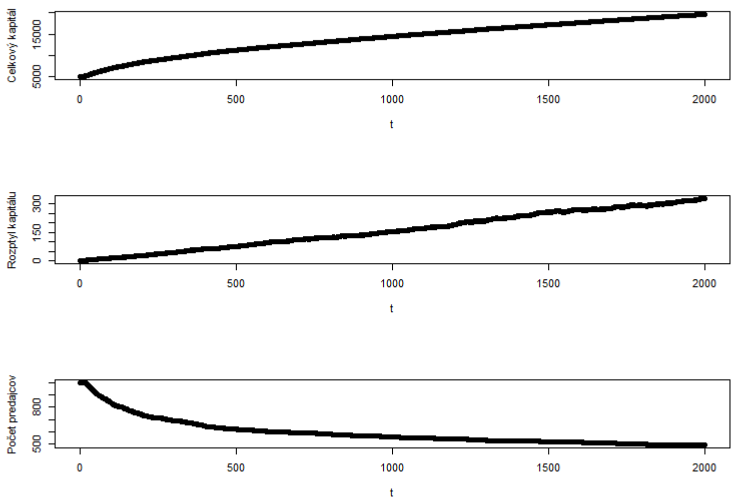
Ten istý trh, tentoraz s daňami môžeme vidieť ná obrázku 12. Pozorujeme veľmi mierny pokles celkového bohatstva a rozptyl kapitálu oscilujúci okolo jednej hodnoty.



Obr. 12: Vývoj trhových ukazovateľov v čase s daňami pre nulové variabilné náklady

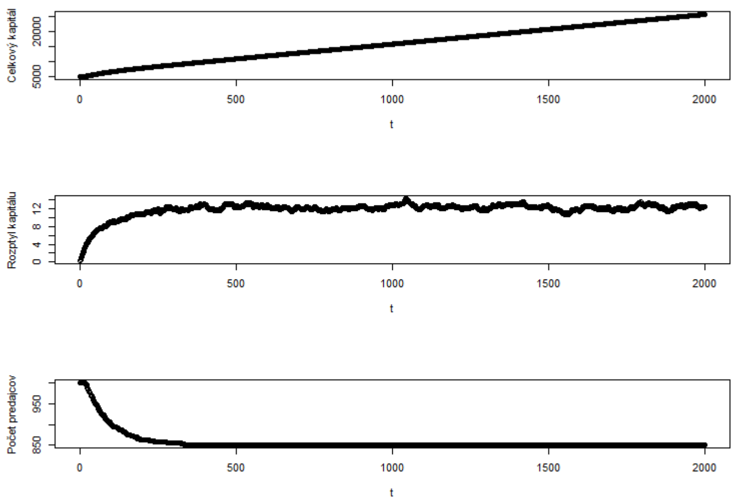
3.2.2 II. trieda nákladových funkcií

Všetci predajcovia majú nákladovú funkciu v tvare $c(x) = k\sqrt{x}$. Nastavme k=1. Pri tomto tvare nákladovej funkcie predajcovia v priemere zarobia viac, ako minú a teda celkové bohatstvo bude rásť.



Obr. 13: Vývoj trhových ukazovateľov v čase bez daní

Na obrázku 14 pozorujeme ustálenie trhu na rovnovážnom počte predajcov, oscilovanie rozptylu okolo jednej hodnoty a lineárny nárast bohatstva.



Obr. 14: Vývoj trhových ukazovateľov v čase s daňami

3.3 Zhrnutie

Simulovanie modelu nám umožnilo sledovať vplyv daní na vývoj trhových ukazovateľov. Zavedenie daní dokáže zabrániť krachu predajcov ale má aj neželaný efekt na výšku celkového bohatstva. Vplyv aj malých daní je dostatočný aby zvrátil negatívne trendy vo vývoji trhu. Prílišný nárast nerovnosti v bohatstve sa dá zastaviť malým prerozdeľovaním majetku. Pre rôzne nastavenia vstupných parametrov môžeme získať model rôznych typov trhu z reálneho sveta. napríklad trh s filmami má veľké fixné a zanedbateľne variabilné náklady. Na druhej strane predaj ručne vyrábaných vecí cez internet sa vyznačuje malými fixnými a vysokými variabilnými nákladmi.

Záver

V tejto práci sme sa venovali skúmaniu jednoduchého modelu trhu s dokonalou konkurenciou. Využili sme prostriedky jazyka R na jeho jednoduchú implementáciu. Teoretický model Brownovho pohybu s driftom a odvodenie tvaru jeho Laplaceovej transformácie nám v časti 2.4 poslúžili ako základ pre lepšie pochopenie a odhad správania sa modelu v závislosti od vstupných parametrov. V závislosti od vstupných parametrov sme odhaadli pravdepodobnosť krachu učastníka trhu. V kapitole 3 sme sa venovali implementácii modelu v jazyku R. Načrtli sme možnosti tohto modelu v rámci sledovania vplyvu daní na rôzne typu trhu. Práca nám priniesla základný vhľad do problematiky stochastických procesov a pomohla prehĺbiť naše znalosti z oblasti modelovania. Priestor na zlepšenie práce existuje vo vyladení parametrov aby sa viac podobali reálnemu svetu. Naša práca môže pomôcť k lepšiemu pochopeniu princípov trhu a jeho modelovania.

Literatúra

[1] Encyclopæpedia Britannica Online, dostupné na internete (3.5.2014): http://www.britannica.com/EBchecked/topic/365647/market

[2] Chikara, R. S., Folks, J. L.: *The inverse Gausian distribution*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1988

[3] Derenik, D.: *Stochastické metódy v ekonómii a financiách*, diplomová práca, PF MU, Brno, dostupné na internete (3.5.2014): http://is.muni.cz/th/127833/prif_m/DerenikDP.pdf

[4] Fima, C. K.: *Introducion to Stochastic calculus with applications* , Imperial College Press, London, 1998

[5] Shreve, S. E.: *Stochastic Calculus for Finance II*, Springer, New York, 2004

[6] Smith, A.:*An Inquiry into the Nature and causes of the Wealth of Nations* Methuen & Co., Ltd., London, 1904

[7] Molini, A. a kol.:*First passage time statistics of Brownian motion with purely time dependent drift and diffusion* Physica A, 2011, 1841-1852

[8] Beyer, W. H *CRC Standard Mathematical Tables, 28th ed.* , CRC Press, Boca Baton, 2003

Príloha A

Kód simulácie

```
n=1000
T=20000
Z<-runif(T+1,100000,100000)
w=0
f=1
g=1
k=1
predajcovia<-cbind(runif(n,10,10),runif(n,0,0))
rozptyl<-runif(T,0,0)
wealth<-runif(T,10000,10000)
predava<-runif(T,1000,1000)
#koniec definovania parametrov
for(i in 1:T)
Z[i+1]<-max(0,rnorm(1,Z[i],1))

gain<-function(x,i){
prob<-runif(length(x[,1]),1,1)
r<-rmultinom(1,Z[i],prob)
r
}

\\cost<-function(x){
\\c<-k*sqrt(x)
\\c
\\}
cost<-function(x){
c<-f+q*x
c
}
```

```
#koniec definovania funkcií

P<-(cost(Z[1]/n)/(Z[1]/n))
for (i in 1:T) {
money[i]<-sum(predajcovia[,1])
gainp<-gain(predajcovia,i)
zisk<-P*gainp-cost(gainp)
P<-(cost(Z[i]/n)/(Z[i]/n))
predajcovia[,1]<-predajcovia[,1]+zisk
tax<-sum(w*predajcovia[predajcovia[,1]>0,1])
predajcovia[predajcovia[,1]>0,1]<-predajcovia[predajcovia[,1]>0,1]*(1-w
predajcovia[,1]<-predajcovia[,1]+tax/n
predajcovia<-predajcovia[predajcovia[,1]>=0,]
n<-length(predajcovia[,1])
rozptyl[i]<-var(predajcovia[,1])
wealth[i]<-sum(predajcovia[,1])
plot(table(cut(predajcovia[,1],breaks=(-100:100),labels=(-100:99))))
predava[i]<-n
}
#Vykreslenie ukazovatelov
par(mfrow=c(3,1))
plot(wealth,xlab="t",ylab="Celkový kapitál")
plot(rozptyl,xlab="t",ylab="Rozptyl kapitálu")
plot(predava,xlab="t",ylab="Počet predajcov")
```