

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



MODELOVANIE EXTERNALÍT PROSTRIEDKAMI

TEÓRIE HIER

Bakalárska práca

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



MODELOVANIE EXTERNALÍT PROSTRIEDKAMI
TEÓRIE HIER

Bakalárska práca

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika

Študijný odbor: 1114 aplikovaná matematika

Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Školiteľ: doc. RNDr. Ján Pekár, PhD.

Bratislava, 2014

Ľubomír Melíšek



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Ľubomír Melišek
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Modelovanie externalít prostriedkami teórie hier / *Modeling externalities by means of game theory*

Cieľ: Praca sa venuje použitiu aparátu teórie hier v skúmaní vplyvu externalít na správanie sa ekonomických agentov. Okrem zosumarizovania teórie bude vyriešených viacero vzorových problémov.

Vedúci: doc. RNDr. Ján Pekár, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Dátum zadania: 18.10.2013

Dátum schválenia: 14.11.2013 doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

študent

vedúci práce

ČESTNÉ VYHLÁSENIE

Vyhlasujem, že som túto bakalársku prácu písal samostatne, na základe vlastných teoretických poznatkov a s využitím uvedenej literatúry a pod vedením vedúceho bakalárskej práce.

.....
Lubomír Melišek

POĎAKOVANIE

Touto cestou by som sa chcel poďakovať vedúcemu mojej bakalárskej práce doc. RNDr. Jánovi Pekárovi, PhD. za trpezlivosť, pomoc a cenné rady ktoré mi pomohli pri písaní práce .
Ďakujem aj svojej rodine a všetkým priateľom, ktorí ma podporovali.

Abstrakt

MELIŠEK, Ľubomír: Modelovanie externalít prostriedkami teórie hier [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. RNDr. Ján Pekár, PhD., Bratislava, 2014

Predmetom bakalárskej práce je zoznámiť sa s externalitami z pohľadu teórie hier a prakticky ich aplikovať na konkrétne príklady. Práca sa stručne zaoberá úvodom do teórie hier a zobrazením troch hlavných typov hier pri dvoch hráčoch - Prisoners' Dilemma, Game of Chicken a Assurance Game. Časť práce bude rozobrať tieto hry pri veľkom počte hráčov a ukázať spôsob, ako sa dá nájsť optimálna výplata spoločnosti. Hlavnou súčasťou práce je porozumieť externalitám, ich vznikom a následkom, naučiť sa ich rozlišovať a takisto odvodzovať zmeny vo výplatách jednotlivca (marginálny osobný prírastok) a spoločnosti (marginálny spoločenský prírastok).

Kľúčové slová: externality, Prisoners' Dilemma, Game of Chicken, Assurance Game, výplata spoločnosti, marginálny osobný prírastok, marginálny spoločenský prírastok

Abstract

MELIŠEK, Lubomír: Modeling externalities by means of game theory [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. RNDr. Ján Pekár, PhD., Bratislava, 2014

The subject of the thesis is to become familiar with externalities from the perspective of game theory and practically apply them to specific examples. Work was briefly engaged introduction to game theory and displaying three main types of games for two players - Prisoners' Dilemma, Game of Chicken and Assurance Game. Part of the work will be analyze these games for a large number of players and show the way, how does one find the optimal total social payoff. The main part of the work is to understand externalities, their origin and consequences, learn to distinguish them and also derive changes in the payoffs of the individual (marginal private gain) and society (marginal social gain).

Key words: externalities, Prisoners' Dilemma, Game of Chicken, Assurance Game , total social payoff, marginal private gain, marginal social gain

Obsah

Obsah.....	8
Úvod.....	9
1 Úvod do teórie hier	10
2 Nekooperatívne hry s dvoma hráčmi.....	13
2.1 Prisoners' Dilemma	13
2.2 Game of Chicken	14
2.3 Assurance Game	16
2.4 Všeobecne o nekooperatívnych hrách s dvoma hráčmi.....	16
3 Nekooperatívne hry s viacerými hráčmi a ich riešenie	18
3.1 Výplata spoločnosti.....	18
3.2 Prisoners' Dilemma, Game of Chicken a Assurance Game s N hráčmi	19
3.3 Riešenia kolektívnych problémov.....	21
4 Externality	24
4.1 Pozitívne externality	27
4.2 Negatívne externality	30
5 Riešené príklady	33
5.1 Externality v pokri	39
Záver.....	42
Zoznam použitej literatúry.....	43

Úvod

Teória hier je jedným z odvetvia aplikovanej matematiky. Zaoberá sa predpokladaným a skutočným správaním jednotlivcov v hrách a ich optimálnymi stratégiami. Teória hier sa dá aplikovať v rôznych oblastiach ako je ekonómia, biológia, politológia alebo psychológia. V tejto bakalárskej práci sme sa zaoberali modelovaním externalít prostriedkami teórie hier, kooperatívnymi hrami a ich využitím v ekonomickej sfére.

Kooperatívnymi hrami a ich riešením sa filozofi a ekonómovia zaoberajú už veľmi dlho. V 17. storočí britský filozof T. Hobbes argumentoval, že spoločnosť upadne do tzv. vojny všetkých proti všetkým, ak sa nebudú uplatňovať pravidlá z jeho knihy *Leviathan* a v 18. storočí francúzsky filozof J.J.Rousseau popisoval väznovu dilemu v jeho knihe *Discourse of Inequality*. V 60-tych rokoch 20. storočia M. Olson publikoval *The Logic of Collective Action*, kde poukazoval na to, že najlepší kolektívny výsledok by mal prevládať vtedy, ak každý z hráčov vykonáva určenú funkciu, teda kým sa dosahuje Nashovo ekvilibrium [8].

Kooperatívna hra je založená na tom, že musí existovať dohoda medzi hráčmi a skupinami. V priebehu hry koná hráč s ohľadom na to, aká je jeho dohoda s ostatnými hráčmi. Hráči teda navzájom spolupracujú. Teória kooperatívnych hier vysvetľuje fungovanie hodnoverných dohôd. Pracuje s dvoma typmi hráčov, prvým je účastník (angl. participant) a druhým absentér (angl. shirker). Celková výplata spoločnosti potom závisí od toho, koľkí z hráčov budú účastníkmi a koľkí budú absentérmi, a ich individuálnych výplat.

Cieľom tejto bakalárskej práce bolo oboznámenie sa s kooperatívnymi hrami a vplyvom externalít na všetkých hráčov. Bližšie sme sa zaoberali hrami typu väznova dilemma (angl. Prisoners' Dilemma), Game of Chicken a Assurance Game, pri ktorých sme čerpali hlavne z [2], [3], [5] a [7]. Ďalej bolo naším cieľom rozlišovať pozitívne a negatívne externality, ich aplikáciu v ekonomickej oblasti (napríklad [1], [2], [6]) a využiť tieto poznatky vo všeobecnosti a na vypočítanie a prezentovanie výsledkov konkrétnych príkladov.

1. Úvod do teórie hier

Teória hier sa zaoberá situáciami, v ktorých si istý počet hráčov vyberá akciu, ktorú vykoná, a úžitok alebo stratu, ktorú utrpí, nezáleží iba na jeho rozhodnutiach, ale taktiež na akciách ktoré si zvolia ostatní hráči. „Teória hier poskytuje všeobecné matematické metódy pre analyzovanie situácií, v ktorých sa dvaja alebo viac jednotlivcov rozhoduje tak, že ich rozhodnutia ovplyvnia stav jedného alebo druhého.“ [2]

Cieľom teórie hier nie je zistiť návod, ako danú hru hrať, ale skôr pochopiť, aké typy hier ľudia hrajú a aká voľba stratégií sa od nich dá očakávať. Základom analýzy je predpoklad, že hráči majú jasne definovaný cieľ, ktorý sa pokúšajú dosiahnuť, a takisto je od hráčov vyžadované racionálne uvažovanie. Teória hier sa samozrejme zaoberá aj situáciami, v ktorých hráči neuvažujú racionálne alebo majú iba obmedzené informácie pre analýzu, týmito situáciami sa však nebudeme zaoberať.

Definícia 1.1 Strategickou formou hry, resp. hrou v normálnom tvare sa nazýva trojica

$$\{N, \{S_i\}_{i \in N}, \{u_i: S_1 \times \dots \times S_N \rightarrow \mathbb{R}\}_{i \in N}\},$$

kde N je konečná množina hráčov ($N = \{1, \dots, n\}$), S_i je množina stratégií i -teho hráča a u_i je výplatná funkcia i -teho hráča.[6]

Pre kompaktný zápis hier v normálnom tvare sa v prípade dvoch hráčov využívajú prevažne tabuľky, kde každý riadok označuje stratégie prvého hráča, každý stĺpec označuje stratégie druhého hráča a čísla v tabuľke označujú úžitok pre hráčov v prípade voľby daných stratégií.

Napríklad pri známej detskej hre „kameň, papier, nožnice“ je množina hráčov $N=2$, množina stratégií pre každého hráča je $\{K - \text{kameň}, P - \text{papier}, N - \text{nožnice}\}$ a výplaty môžu byť 1 v prípade výhry, -1 v prípade prehry a 0 ak nastane remíza. Tabuľka výplat bude potom vyzeráť:

		Hráč 2		
		K	P	N
Hráč 1	K	0,0	-1,1	1,-1
	P	1,-1	0,0	-1,1
	N	-1,1	1,-1	0,0

Jedným z kľúčových pojmov v teórii hier je riešenie hry. Za riešenie sa spravidla považuje metóda, ktorá nám pre danú hru ukáže, akú stratégiu a postup by sme mali od racionálne uvažujúcich hráčov očakávať. Jedným z najznámejších riešení je tzv. Nashovo ekvilibrium. Je to také riešenie danej hry, pri ktorom žiadny z hráčov nemôže zvýšiť svoj profit jednostrannou zmenou svojej stratégie.

Definícia 1.2 Strategický vektor $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ sa nazýva Nashovo ekvilibrium v čistých stratégiách, ak pre každého hráča $i \in N$ a každú stratégiu $s_i \in S_i$ platí:

$$u_i(s^*) = u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)$$

Výplatový vektor $u(s^*)$ je ekvilibrium výplat zodpovedajúci Nashovmu ekvibriu s^* . [7]

Nashovo ekvilibrium sa spravidla označuje NE.

Napríklad pre nasledujúcu hru bude NE dvojica stratégií (C,F).

		Hráč 2		
		D	E	F
Hráč 1	A	1,7	8,2	4,3
	B	6,1	1,6	4,3
	C	3,3	2,3	5,5

Nie pre každú hru však vieme nájsť NE v čistých stratégiách. Pre ďalšiu hru NE v čistých stratégiách neexistuje, preto ho budeme hľadať v zmiešaných stratégiách.

		Hráč 2	
		y	1-y
		C	D
Hráč 1	x	A3,2	-1,4
	1-x	B-2,1	0,0

Chceme maximalizovať výplaty oboch hráčov, ktoré majú tvar:

$$\pi_1 = x(3y + (-1)(1-y)) + (1-x)((-2)y + 0(1-y))$$

$$\pi_2 = y(2x + 1(1-x)) + (1-y)(4x + 0(1-x))$$

Ich prvou deriváciou dostaneme:

$$\frac{d\pi_1}{dx} = 6y - 1 = 0 \quad \frac{d\pi_2}{dy} = 1 - 3x = 0$$

$$\text{Z toho } y = \frac{1}{6} \quad x = \frac{1}{3}$$

NE v zmiešaných stratégiách teda bude $(\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B, \frac{1}{6}C + \frac{5}{6}D)$.

Výplaty hráčov, ak obaja použijú zmiešané stratégie budú

$$\pi_1 = x\pi_1(A, \frac{1}{6}C + \frac{5}{6}D) + (1-x)\pi_1(B, \frac{1}{6}C + \frac{5}{6}D) = -\frac{1}{3}$$

$$\pi_2 = y\pi_2(\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B, C) + (1-y)\pi_2(\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B, D) = \frac{4}{3} [3]$$

2. Nekooperatívne hry s dvoma hráčmi

V tejto kapitole rozoberieme problém Milana a jeho suseda, ktorí bývajú v domovej štvrti trpiacej častými výpadkami prúdu. Obom by prinieslo úžitok, keby sa neďaleko ich domov postavilo niekoľko slnečných panelov produkujúcich energiu potrebnú na udržanie chodu domácností v čase, keď elektrina vypadne. Môžu sa teda spojiť a spoločne vytvoriť malú slnečnú elektrárňu, alebo ju jeden z nich môže postaviť na vlastné náklady, pričom ten druhý z nej bude profitovať zadarmo. Preto sa obaja budú snažiť vyhnúť starostiam a výdajom, ktoré táto stavba vyžaduje. Toto je podstata ich strategického vzájomného pôsobenia a kvôli tomu sa ťažko upevňujú ich kolektívne skutky.

Tento systém slnečných panelov má dve dôležité vlastnosti. Jeho výhody sú nevylúčiteľné, teda aj osoba, ktorá sa nezapojila do výstavby tohto projektu, bude mať z neho úžitok, a zároveň sú tieto výhody nekonkurujúce, čo znamená, že nebudú nijak zmenšené samotnou skutočnosťou, že aj niekto iný bude z neho rovnako profitovať. Hospodári nazývajú podobný projekt rýdzo verejný prospech (pure public good). Naproti tomu, rýdzo súkromný prospech (pure private good) je plne vylúčiteľný a konkurenčný; kto sa nezapojí, nebude mať z projektu žiadny prospech a jediný, kto z neho bude profitovať, je jeho vlastník.

2.1 Prisoners' Dilemma

Náklady a výnosy obsiahnuté v tomto projekte, závisia na tom koľko hráčov sa zapojí. Každý z nich dokončí projekt za 8 týždňov, ak však budú pracovať spolu, zaberie im to iba 5 týždňov. Spolu takisto postavia panely lepšej kvality. Každý z nich získa profit 6 týždňov práce v prípade projektu, ktorý staval niekto z nich individuálne, a 10 týždňov v prípade projektu, ktorý stavali spolu. Túto hru vieme zapísať do tabuľkovej formy (S – stavať, N – nestavať):

		Sused	
		S	N
Milan	S	5,5	-2,6
	N	6,-2	0,0

Tab. 2.1 Prisoners' Dilemma verzia I

Čísla v tabuľke predstavujú počet týždňov, ktoré každý zo susedov ušetril v prípade kladných čísiel, alebo stratil, v prípade záporných čísiel. Teda Milanova najlepšia odpoveď, ak by sa jeho sused rozhodol nestavať, je takisto nestavať. V prípade, žeby sa sám rozhodol postaviť systém solárnych panelov, je jeho výplata (6) menej ako jeho náklady (8). Naopak v prípade, ak by sa Milanov sused rozhodol postaviť systém na vlastné náklady, Milan bude mať z neho osoh (6), avšak jeho náklady budú nulové. Takto by mal z projektu väčší úžitok, ako keby ho

stavali obaja. V tomto prípade by bol Milan tzv. čierny pasažier (free rider), ktorý profituje na susedovom úsilí. Vo všeobecnosti je teda pre Milana lepšie nestavať bez ohľadu na to, pre čo sa rozhodne jeho sused. Toto isté však platí aj pre jeho suseda. Dominantnou stratégiou pre každého z nich je nestavať, ale obaja by boli radšej, ak by tento systém spoločne postavili. Táto kolektívna hra sa nazýva **Väzňova dilema** (Prisoners' Dilemma).

V tejto hre sa dá vidieť jedna z najväčších prekážok v kolektívnych hrách. Optimálna individuálna voľba každého hráča je (v tomto prípade) nestavať bez ohľadu na to, čo si vyberie druhý hráč. Táto voľba však nie je optimálna z pohľadu spoločnosti, ktorú títo dvaja hráči tvoria. Spoločenské optimum v kolektívnych hrách nastáva, ak je súčet výplat hráčov maximalizovaný. Vo väzňovej dileme je spoločenské optimum $(S,S)=(5,5)=10$, aj keď NE pre túto hru je $(N,N)=(0,0)=0$. Štúdium kolektívnych hier sa preto zameralo na metódy, ako zlepšiť správanie sa hráčov, aby sa NE priblížilo aj k spoločenskému optimu. V ďalších hrách ukážeme, ako sa rozdiel medzi NE a spoločenským optimom postupne stráca.

V druhom prípade znížime výnosy hráčov v prípade projektu, ktorý stavajú spolu, na 6,8. Tabuľka výplat bude vyzeráť nasledovne:

		Sused	
		S	N
Milan	S	1,8,1,8	-2,6
	N	6,-2	0,0

Tab. 2.2 Prisoners' Dilemma verzia II

Táto hra je stále Väzňovou dilemou, NE je stále $(N,N)=(0,0)=0$, ale spoločenské optimum už nie je v prípade $(S,S)=(1,8,1,8)=3,6$, ale v prípade $(S,N)=(N,S)=4$, teda v prípade, ak sa jeden rozhodne stavať a druhý nestavať. Pri novom spoločenskom optime v tomto prípade sa však vynára nový problém: kto by sa mal rozhodnúť postaviť solárne panely a mať zápornú výplatu, zatiaľ čo druhý by ako čierny pasažier dosiahol úžitok 6?

2.2 Game of Chicken

V ďalšej hre sa pozrieme na to, čo sa stane ak trochu znížime náklady. Každý z nich by sám dokončil projekt za 5 týždňov a spolu by im to zabralo 4,5 týždňa. Výnosy ostanú rovnaké, ako v prvom prípade. Z tabuľky potom môžeme vidieť, že Milanova najlepšia odpoveď je nestavať, ak sa sused rozhodne stavať, a naopak stavať, ak sused nestavia. Takýto typ hry sa nazýva **Game of Chicken**.

		Sused	
		S	N
Milan	S	5,5,5,5	1,6
	N	6,1	0,0

Tab. 3.3 Game of Chicken verzia I

NE sú teda dve a spoločná výplata hráčov je v oboch prípadoch 7, čo je však menej ako v prípade, ak by stavali obidvaja.

Ak by sme chceli nájsť ekvilibrium v zmiešaných stratégiách, dostali by sme nasledovné rovnice:

$$\pi_1 = x(5,5y + 1(1-y)) + (1-x)(6y + 0(1-y)) = (-1,5)xy + x + 6y$$

$$\pi_2 = y(5,5x + 1(1-x)) + (1-y)(6x + 0(1-x)) = (-1,5)xy + y + 6x$$

Po následnej derivácii dostaneme

$$\frac{d\pi_1}{dx} = 1 - 1,5y = 0 \quad \frac{d\pi_2}{dy} = 1 - 1,5x = 0$$

Teda $x=y=\frac{2}{3}$, a výplaty hráčov sú $\pi_1=\pi_2=4$, ale spolu je to stále menej ako v prípade, ak budú stavať obaja.

Ak by sme však opäť znížili výnosy v prípade spoločného projektu na 6,8, ich výplaty by boli 2,3 pre každého a teda iba 4,6 spolu, zatiaľ čo v prípade, kde stavia iba jeden je spoločná výplata stále 7, a teda aj pre spoločenské optimum je najlepšie, ak bude stavať iba jeden z nich.

		Sused	
		S	N
Milan	S	2,3,2,3	1,6
	N	6,1	0,0

Tab. 3.4 Game of Chicken verzia II

2.3 Assurance Game

Posledný typ hry, ktorý ukážeme, sa nazýva **Assurance Game**. Náklady v prípade ak stavia iba jeden budú 8, ak stavajú obaja 5, ale výnosy v prípade projektu na ktorom sa podieľa jeden človek budú iba 3, zatiaľ čo ak budú stavať obaja, ich výplaty budú 9.

		Sused	
		S	N
Milan	S	4,4	-5,3
	N	3,-5	0,0

Tab. 3.5 Assurance Game

Môžeme vidieť, že tieto zmeny znížili výplaty v prípade čierneho pasažiera tak veľmi, že teraz ak sa jeden z nich rozhodne stavať, najlepšia odpoveď druhého je tiež stavať. Táto hra má dve NE v čistých stratégiách, a to ak si obaja zvolia stavať alebo si obaja zvolia nestavať.

Spoločenské optimum nastáva v jednom z nich, ak si zvolia stavať – (S,S)=(4,4)=8.

2.4 Všeobecne o nekooperatívnych hrách s dvoma hráčmi

Vo všeobecnosti by tabuľka pre takúto hru vyzerala

		Sused	
		S	N
Milan	S	$b_2 - c_2, b_2 - c_2$	$b_1 - c_1, b_1$
	N	$b_1, b_1 - c_1$	0,0

kde b_1 sú výnosy a c_1 sú náklady v prípade projektu jedného hráča, a b_2 a c_2 sú výnosy, resp. náklady v prípade projektu dvoch hráčov.

Hra by bola Vážňovou dilemou, ak platia nerovnice

$$b_1 > b_2 - c_2, \quad 0 > b_1 - c_1, \quad b_2 - c_2 > 0.$$

Prvá z nich hovorí, že najlepšia odpoveď na S je N, druhá že najlepšia odpoveď na N je tiež N, a tretia že (S,S) obaja preferujú pred (N,N).

Ak by hra bola Game of Chicken, museli by platiť nerovnice

$$b_1 > b_2 - c_2, \quad b_1 - c_1 > 0.$$

Tieto nerovnice hovoria o tom, že každý z hráčov chce stavať, ak ten druhý nestavia, a nestavať, ak druhý stavia.

Pre obe tieto hry môžeme mať dve verzie, verziu I (kde spoločenské optimum je v prípade ak obaja stavajú) ak

$$2(b_2 - c_2) > 2b_1 - c_1,$$

a verziu II (v ktorej spoločenské optimum je v prípade ak stavia iba jeden z nich) ak

$$2(b_2 - c_2) < 2b_1 - c_1.$$

Nakoniec, hra sa nazýva Assurance Game, ak platí

$$b_1 < b_2 - c_2, \quad 0 > b_1 - c_1, \quad b_2 - c_2 > 0.$$

Tieto nerovnice vravia, že najlepšia odpoveď na S je tiež S, na N je N a obaja majú väčšie výplaty v prípade (S,S) ako v (N,N). [5]

3. Nekooperatívne hry s viacerými hráčmi a ich riešenie

V tejto kapitole postupne rozoberiem kolektívne problémy vo veľkých skupinách, ich analýzu a riešenia.

3.1 Výplata spoločnosti

Na začiatok budeme pracovať s rovnakým projektom ako v predchádzajúcej kapitole, rozšírime však počet hráčov. Budeme mať populáciu N susedov, z ktorých každý sa rozhoduje, či sa do projektu zapojí alebo nie. Ak sa n z nich rozhodne zapojiť, budeme týchto hráčov nazývať „účastníkmi“ (ang. participant), a zvyšných, čo sa rozhodnú uliať, budeme volať „absentérmi“ (ang. shirker). Každý z účastníkov utrpí stratu (ang. cost) c , ktorá závisí na ich množstve n , označíme teda túto funkciu $c(n)$. Takisto každý z hráčov, či už účastník alebo absentér, získa profit (ang. benefit) b , ktorý taktiež závisí od čísla n , a túto funkciu označíme $b(n)$. Výplata každého z účastníkov teda bude $p(n)=b(n)-c(n)$ a každého z absentérov $s(n)=b(n)$.

Z pohľadu jednotlivca máme n účastníkov a $(N-n)$ absentérov. Ak sa jednotlivец rozhodne nezúčastniť sa, množstvo účastníkov bude stále n a jeho výplata bude $s(n)$. Ak sa rozhodne zúčastniť, zvýši sa počet účastníkov na $n+1$ a jeho výplata bude $p(n+1)$. Jeho konečné rozhodnutie závisí na porovnaní týchto dvoch výplat. Rozhodne sa zúčastniť v prípade ak $p(n+1)>s(n)$, a rozhodne sa uliať sa v prípade ak $p(n+1)<s(n)$. Chovanie hráčov v rôznych situáciách sa mení v závislosti od toho, ako sa menia hodnoty $p(n+1)$ a $s(n)$.

Zostrojíme tretiu funkciu zobrazujúcu celkovú výplatu všetkých hráčov, teda výplatu spoločnosti, a označíme ju $T(n)$. Bude pozostávať z hodnôt $p(n)$ pre každého z n účastníkov a z hodnôt $s(n)$ pre každého z $(N-n)$ absentérov:

$$T(n) = np(n) + (N-n)s(n)$$

Aby sme lepšie porozumeli tomu, aké rozdelenie má byť medzi účastníkmi a absentérmi, prepíšeme túto funkciu na

$$T(n) = Ns(n) - n[s(n) - p(n)],$$

odkiaľ vidíme, že výplatu spoločnosti môžeme počítať, ak každému z N hráčov priradíme výplatu absentérov a potom odčítame extra výnosy absentérov od každého z n účastníkov.

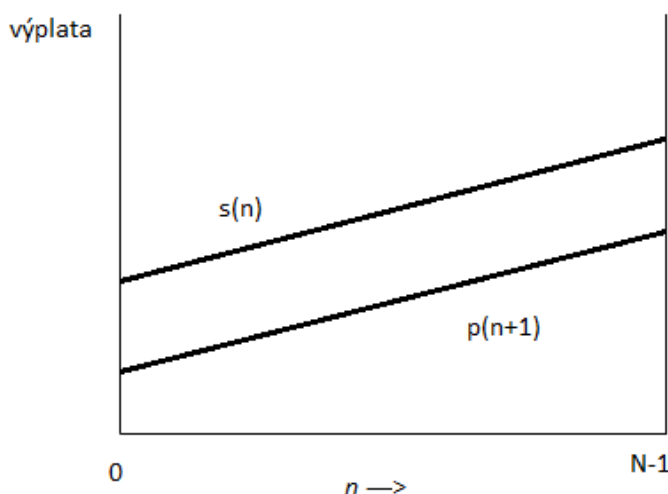
Normálne by sme očakávali, že hodnota $s(n)$ bude narastať s tým, ako bude rásť n , a teda bude rásť aj hodnota $Ns(n)$. Ak však s rastom n bude hodnota $[s(n) - p(n)]$ narastať len pomaly, $T(n)$ sa bude zväčšovať a svoje maximum dosiahne ak $n=N$. Ale vo všeobecnosti $T(n)$ nadobúda svoje maximum pre nejakú hodnotu $n<N$. Súhrnná výplata spoločnosti môže byť maximalizovaná aj s pripustením niekoľkých absentérov.

Nakreslíme grafy, kde zobrazíme funkcie $p(n+1)$ a $s(n)$, ktoré nám pomôžu určiť, ktorý typ hry, ktoré sme rozobrali v predchádzajúcej kapitole, má najlepší spoločenský prínos. Na horizontálnej (x-ovej) osi zobrazíme n od 0 po $N-1$ a na vertikálnej (y-ovej) osi budú výplaty.

Dve rozdielne priamky budú zobrazovať $p(n+1)$ a $s(n)$. Keďže n môže nadobúdať iba kladné celé hodnoty, tieto priamky teoreticky pozostávajú iba z jednotlivých bodov, ak je však N dostatočne veľké, tieto body budú dosť blízko pri sebe a môžeme ich spojiť jednou čiarou.[8]

3.2 Prisoners' Dilemma, Game of Chicken a Assurance Game s N hráčmi

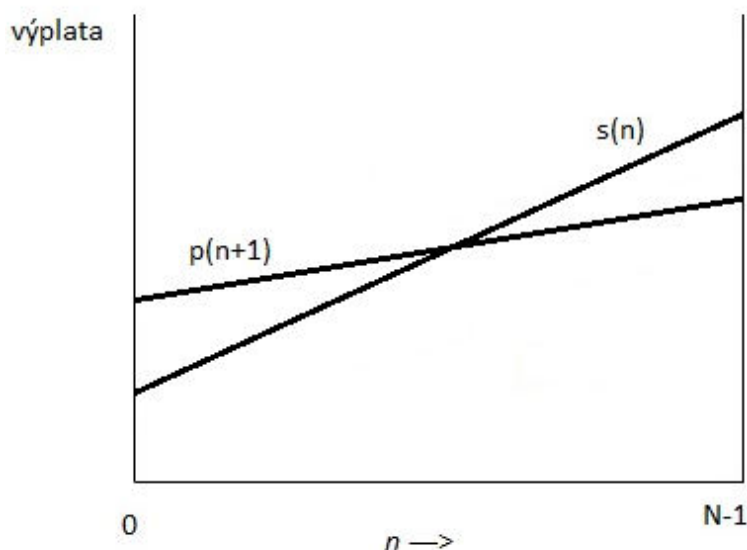
Graf 3.1 zobrazuje prípad, kedy priamka $s(n)$ leží priamo nad priamkou $p(n+1)$. Toto je **Väzňova dilema**. Vidíme, že v tomto type hry nezáleží na tom, koľko ostatných hráčov je účastníkmi (akú veľkú hodnotu n nadobúda), výplata jednotlivca je stále väčšia pokiaľ je absentérom, a ekvilibrium je v bode, keď sú všetci absentérmi. Obe priamky však rastú s tým, ako rastie n , preto bez ohľadu na to, akú akciu si jednotlivec vyberie, preňho je vždy lepšie ak je čo najviac ľudí účastníkmi. Musí platiť $s(0) < p(N)$, teda výplata jednotlivca v prípade, kde sú všetci, vrátane neho, absentérmi, je menšia ako v prípade, kde sú všetci, vrátane neho, účastníkmi.



Graf 3.1

V prípade väzňovej dilemy platí, že celková výplata spoločnosti nie je maximálna, ak budú všetci hráči účastníkmi. V skutočnosti, ak sa medzera medzi $s(n)$ a $p(n)$ bude rozširovať dostatočne rýchlo s tým, ako bude rásť n , negatívny dopad hodnoty $s(n) - p(n)$ pre $T(n)$ preváži, preto je lepšie nechať niekoľko ľudí uliať sa. Samozrejme to spôsobí nerovnosti vo výplatách, kde absentéri na tom budú lepšie ako účastníci, čo zväčšuje ťažkosti pre spoločnosť pri riešení tejto dilemy.

Graf 3.2 predstavuje Game of Chicken. V tejto hre pre malé hodnoty n je $p(n+1) > s(n)$, teda ak sa pár hráčov rozhodne zapojiť, aj pre určitého jednotlivca je lepšie ak sa zapojí; ale pre veľké hodnoty n je $p(n+1) < s(n)$, takže ak sa zapojí príliš veľa hráčov, je preňho lepšie uliať sa. Ak sa priamky v grafe pretnú v bode, ktorý reprezentuje celá hodnota n , táto hra má NE pri takomto počte účastníkov. Ak sa tak nestane, hra nemá NE, ale v praxi sa jeden človek zmení z absentéra na účastníka alebo naopak, podľa toho, či je n po zaokrúhlení na jednotky menšie alebo väčšie ako súčasná hodnota n .

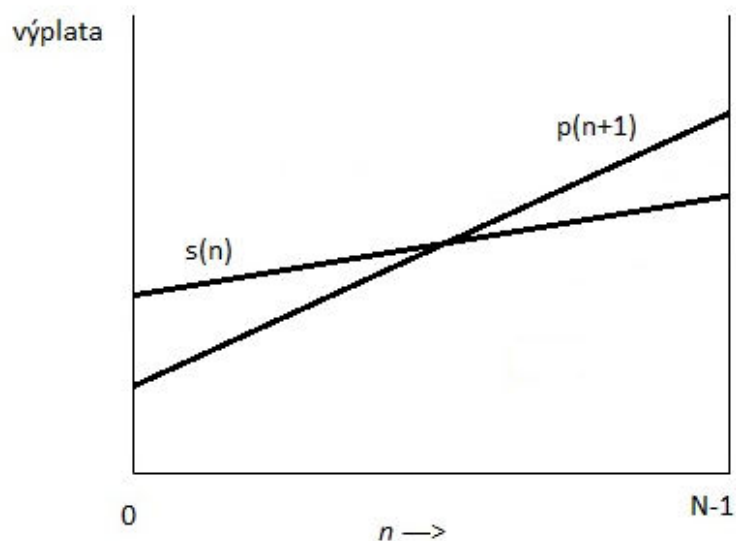


Graf 3.2

Ak sa hodnota výplat $p(n)$ zvyšuje s tým, ako narastá počet účastníkov, a hodnota výplat $s(n)$ nie je oveľa väčšia ako $p(n)$, potom celková spoločenská výplata je maximálna, ak sú všetci účastníkmi. Ale vo všeobecnosti môže byť lepšie, ak niekoľko z nich ostane absentérmi. Tu môžeme vidieť hlavný rozdiel medzi verziami I a II ukázaných v predchádzajúcej kapitole.

Na Grafe 3.3 si ukážeme Assurance Game. Tu pre malé hodnoty n platí $p(n+1) < s(n)$, čiže ak malý počet hráčov bude účastníkmi, pre jednotlivého hráča je lepšie byť absentér, zatiaľ čo pre väčšie hodnoty n platí $p(n+1) > s(n)$, takže ak je veľa hráčov účastníkmi, lepšie preňho bude ak sa zúčastní tiež. Ak počet hráčov N je veľmi veľký, každý jeden hráč spôsobí iba malý rozdiel, takže $p(n+1)$ je skoro to isté ako $p(n)$. Z vyjadrení $p(n) = b(n) - c(n)$ a $s(n) = b(n)$ jasne vidieť, že $p(n)$ bude vždy menej ako $s(n)$, preto sa jednotliviec bude chcieť vždy uliať v prípade, kedy bude N veľmi veľké, dokonca aj keď sa bude hra javiť ako Assurance Game. Kvôli tomuto sa veľa kolektívnych problémov pri veľkých skupinách takmer vždy prejaví ako Vážnova dilema.

Vo všeobecnosti preto musíme výplaty $p(n)$ a $s(n)$ interpretovať ako funkcie od n , nie konkrétnymi hodnotami výnosov a nákladov. Potom tam neexistuje žiadny automatický predpoklad ohľadom toho, ktorá z výplatových funkcií je väčšia a hra sa môže vyvinúť do všetkých troch situácií - Prisoners' Dilemma, Game of Chicken alebo Assurance Game. Vo väčšine prípadov tieto funkcie zakreslené v grafe netvorí priamku a môžu sa pretnúť aj niekoľkokrát. Potom samozrejme môže existovať niekoľko ekvilibríí a každé z nich môže byť reprezentované iným typom hry. [2]



Graf 3.3

3.3 Riešenia kolektívnych problémov

V tejto časti sa budeme venovať koncepčným a praktickým riešeniam kolektívnych problémov. Spoločným znakom všetkých troch spomenutých hier je potreba prinútiť jednotlivca konať kooperatívne, alebo spôsobom, ktorý je v najlepšom záujme pre celok, aj napriek individuálnym potrebám hráčov, ktorí chcú konať tak, aby to bolo čo najvýhodnejšie pre nich.

Problémy spojené s potrebou dosiahnuť spoluprácu a ich riešenia nie sú v ľudskej spoločnosti ničím neobyčajným. Naproti tomu príroda nám poskytuje niekoľko zaujímavých príkladov, napríklad u mravcov alebo včiel, kde jedinec obetuje aj svoj život pre záujmy spoločnosti, čo biológovia vysvetľujú tým, že sú geneticky blízko spriaznení. Taktiež môžeme vidieť úzku spoluprácu v skupinách zvierat, napr. ryby, vtáky, opice atď, ktorá sa prejavuje v zdieľaní potravy, výchove mláďat alebo unikaniu predátorom. Tento typ správania je vysvetlený inštinktom, kde výhody spolupráce sú tak veľké, že sa oplatí byť ochotný spolupracovať, a nie byť individualistom.

Ľudská spoločnosť sa však viac spolieha na účelné spoločenské a kultúrne zvyky, normy a sankcie, ktoré sa snažia navodiť kooperatívne správanie u svojich jednotlivých členov. Tieto metódy sú uvedomelé, rozvážne pokusy navrhnuť takú hru, aby sa vyriešili kolektívne problémy. K otázke metód riešenia potom pristupujeme z hľadiska typu hry, ktorý sa hrá.

Riešenie je najjednoduchšie v prípade Assurance Game. Potom v každého osobnom záujme je vybrať si akciu, ktorá je pre spoločnosť najlepšia, ak hráč očakáva, že ostatní sa budú riadiť rovnako. Spoločenské optimum je súčasne aj NE, problémom však je, že ekvilibrií môže byť aj viac, spoločensky menej výhodných. Pre dosiahnutie najlepšieho NE je treba zabezpečiť

konvergenciu hráčov do tohto optima. Táto konvergencia môže byť dôsledkom spoločenskej zvyklosti alebo dohovoru a je v záujme všetkých riadiť sa podľa nej tak dlho, ako sa od očakáva aj od ostatných, aby robili to isté. Jednotlivé výplaty hráčov sú však často dané tak, hlavne vo veľkých skupinách, že hra nadobúda formu Prisoners' Dilemma. Na dosiahnutie spoločensky najvýhodnejšieho výsledku slúžia tri metódy – sankcie a odmeny, periodické obmieňanie účastníkov a absentérov a iniciatívnosť niektorých hráčov.

Spoločnosť môže potrestať hráča, ktorý nehrá podľa pravidiel alebo sa sebecky snaží vytvoriť čo najväčší profit pre seba, niekoľkými rôznymi spôsobmi. Jeden je pomocou sankcií navrhnutých ostatnými hráčmi, alebo to môže byť vylúčením z budúcich hier. Spoločnosť taktiež môže navrhnúť normy správania, ktoré zmenia jednotlivé výplaty tak, aby vyvolala spoluprácu medzi hráčmi. Tieto normy sa ustanovovali postupne, procesom vzdelávania a vývojom kultúry. Normy sa od zvykov líšia hlavne tým, že jednotlivec sa nemusí nutne správať presne podľa noriem iba preto, že ostatní očakávajú, že sa tak bude správať. Spoločnosť môže takisto odmeniť vhodné akcie, hrané hráčmi, takisto ako môže potrestať tie nežiaduce. Rôzne spoločnosti a kultúry si počas histórie vytvárali rôzne zvyklosti, dohody a normy na dosiahnutie rovnakého cieľa. Každá firma alebo prevádzka má svoje vlastné spôsoby ako riadiť pracovný proces. Rozdiely medzi týmito spôsobmi sú niekedy dosť chýlostivé a ťažko postrehnuteľné, ale mnohokrát práve kvôli nim niektorá fúzia nevyšla.

Čo je často potrebné k udržaniu spolupráce je vedomie každého hráča, že jeho osobný výnos v prípade podvádzania je krátkodobý a od jeho odhalenia bude je výplata nižšia, ako by mal v prípade spolupráce od začiatku. Hráči musia vedieť, že podvádzanie nie je dlhodobou prosperujúcou činnosťou, môže byť rýchlo odhalené a trest bude okamžitý a tvrdý. Tresty ale nikdy nie sú ľahké, v podstate aj preto, že vo väčšine reálnych situácií výplaty hráčov nie sú úplne určené pôsobením hráčov, ale môžu byť určené aj nejakým náhodným kolísaním. Podvádzanie jedného alebo viacerých hráčov nemusí byť spozorované hneď a ostatní hráči o tom ani nemusia vedieť. Dokonca ja keď vedia, že sa podvádzalo, nemusia vedieť s istotou kto podvádzal. A potrestať niekoho, o kom si nie sú úplne istý, či podvádzal, je kontraproduktívne – podnet na spoluprácu sa môže otupiť, ak bol potrestaný nevinný. Sankcie so sebou súčasne prinášajú ďalšie kolektívne problémy. Ak napríklad skupina obchodníkov potrestá jedného z nich tým, že ho vylúčia a prestanú s ním obchodovať, potom aj oni sa musia vzdať výhod plynúcich z obchodovania s ním.

Úspešné vyriešenie kolektívnych problémov závisí na úspešnom odhaľovaní podvodníkov a ich trestaní. V malých skupinách, kde sa hráči lepšie poznajú a majú o sebe a svojich akciách lepšie informácie, je jednoduchšie niekoho odhaliť pri podvádzaní. Takisto sa ľahšie dohodnú na uložení trestu pre podvodníka. Kvôli tomuto by si mali malé skupiny samy riešiť svoje kolektívne problémy. Niektorí cudzí by nemuseli odhaliť podvádzanie alebo uložiť primeraný trest. Preto sa niekedy reakcie vládnej politiky na riešenie týchto problémov ukázali ako mylné.

Teraz sa pozrieme na Game of Chicken v kolektívnych hrách. Tu podstata nápravy závisí od toho, či sa najväčšia celková výplata spoločnosti dosiahne vtedy, keď sa zapoja všetci hráči (verzia I) alebo keď spolupracuje iba časť hráčov a ostatní sa môžu uliať (verzia II). V prvom

případe, keď každý z hráčov má pokušenie nehrať a získať lepšiu individuálnu výplatu, sa problémy riešia podobne ako v prípade Prisoners' Dilemma. Druhý prípad je odlišný, v jednom ohľade jednoduchší a v druhom komplikovanejší. Pokiaľ sú raz hráči rozdelení na účastníkov a absentérov, nikto nemá motív na prehodenie k druhej skupine. Avšak pri dosiahnutí NE budú mať vždy absentéri lepšiu výplatu ako účastníci, čo vytvára nové problémy v hre, napätie a spory, ktoré ak sú veľké, môžu ohroziť celú štruktúru spoločnosti.

Tento problém sa často rieši pravidelným obmieňaním účastníkov a absentérov, čo po čase vyrovnáva ich výplaty.

Niekedy sa problémy rôznych výplat vo verzii II Prisoners' Dilemma alebo Game of Chicken rieši nie obnovením rovnováhy, ale pomocou utláčania a donucovania, čo prinúti ovládanú podskupinu spoločnosti prijať menšie výplaty a umožní vládnucej podskupine užívať si väčšie výplaty. Týranie a poškodzovanie rasových a národných menšín alebo žien v minulosti poskytuje veľa názorných príkladov. Ak je raz zavedený takýto systém, žiadny člen utlačovanej podskupiny nemôže robiť nič, aby túto situáciu zmenil, musia sa všetci spojiť a pokúsiť sa zmeniť celý systém, čo samozrejme vyvolá množstvo ďalších kolektívnych problémov.

Rozlišujeme aj možnosť iniciatívnosti hráčov, kde každá skupina má niekoľko členov, ktorí bez nároku na odmenu vynaložia osobné úsilie vedúce k prospechu celej spoločnosti. Ak sa v skupine nachádza dostatok takýchto hráčov, kolektívne problémy zmiznú. Veľa škôl, kostolov, nemocníc alebo pamiatkových budov počítajú s pomocou od dobrovoľníkov. Toto riešenie častejšie funguje v relatívne malých skupinách, kde dobrovoľníci zbližša a skôr vidia ovocie ich práce. [4]

4. Externality

Vrátime sa späť k porovnaniu Nashovho ekvilibria a spoločenského optima v kolektívnych hrách. Máme pred sebou dva problémy; koľko hráčov musí byť účastníkmi a koľko absentérmi, aby sem dosiahli spoločenské optimum, a ako sa tento počet líši od toho, ktoré predstavuje NE. Hráči, čo chcú byť účastníkmi, si vyberajú akciu P a hráči, čo chcú byť absentérmi, si zvolia akciu S. Pripomeňme si funkciu celkovej výplaty spoločnosti $T(n)$:

$$T(n) = np(n) + (N-n)s(n)$$

Teraz si predstavme, že jeden hráč zmení svoju akciu z S na P. Počet účastníkov tým vzrastie na $(n+1)$ a počet absentérov sa zníži na $(N-n-1)$, výplata spoločnosti potom bude vyzerat':

$$T(n+1) = (n+1)p(n+1) + (N-n-1)s(n+1)$$

Nárast (pokles) celkovej výplaty je rozdiel medzi $T(n)$ a $T(n+1)$:

$$\begin{aligned} T(n+1) - T(n) &= (n+1)p(n+1) + (N-n-1)s(n+1) - np(n) - (N-n)s(n) = \\ &= [p(n+1) - s(n)] + n[p(n+1) - p(n)] + (N-n-1)[s(n+1) - s(n)] \end{aligned}$$

Rov. 4.1

Keďže tento jeden hráč je iba malou časťou celej skupiny, zmena spôsobená jeho prebehnutím k druhej akcii je takisto malá, resp. marginálna. Táto rovnica zobrazuje, ako je marginálna zmena celkovej výplaty rozdelená na marginálne zmeny vo výplatách pre jednotlivé podskupiny spoločnosti. Prvá časť rovnice $[p(n+1) - s(n)]$ je zmena vo výplate hráča, ktorý menil svoju akciu. Rozdiel medzi výplatou, ktorú obdržal, keď si volil akciu S, teda $s(n)$ a výplatou, ktorú bude mať po preskočení na akciu P, teda $p(n+1)$. Druhá časť $n[p(n+1) - p(n)]$ predstavuje rozdiel vo výplatách všetkých ostatných hráčov, ktorí si zvolili akciu P a $(N-n-1)[s(n+1) - s(n)]$ rozdiel medzi výplatami absentérov, ktorých počet sa o jedného znížil.

V terminológii teórie hier sa vplyv, po zmene stratégie jedného hráča, na výplatu spoločnosti nazýva **marginálny spoločenský prírastok** (ang. marginal social gain). Pozostáva z dvoch častí. Prvou je zmena vo výplate hráča, ktorý zmenil stratégiu, a nazýva sa **marginálny osobný prírastok** (ang. marginal private gain). Zvyšok pozostáva z efektu, ako táto zmena stratégie hráča pôsobí na ostatných hráčov, resp. ich výplaty. Nazýva sa to **efekt prelievania** (ang. spillover effect) alebo **externalita**. Keďže zvažujeme iba malú zmenu, môžeme to nazvať **marginálnym efektom prelievania** (marginal spillover effect).

Pre zmenu akcií jedného hráča z P na S alebo naopak, môžeme prepísať Rov. 4.1 ako

$$\text{marginálny spoločenský prírastok} = \text{marginálny osobný prírastok} + \text{marginálny efekt prelievania}$$

$$(msp = mop + mep)$$

Rov. 4.2

Pre spomenutý prípad, keď jeden hráč preskočí z akcie S na P potom máme

marginálny spoločenský prírastok = $T(n+1) - T(n)$

marginálny osobný prírastok = $p(n+1) - s(n)$

marginálny efekt prelievania = $n[p(n+1) - p(n)] + (N-n-1)[s(n+1) - s(n)]$

Uvedieme konkrétny príklad. Každý deň cestuje vlakmi z jedného mesta do druhého 3500 ľudí. Každý z nich môže ísť vlakom EuroCity (akcia P) alebo osobákom (akcia S). Cesta osobákom trvá 100 minút bez ohľadu na to, koľko ľudí ním cestuje, zatiaľ čo cesta EČečkom trvá iba 50 minút, ak vlak nie je preťažený. Preťaženie nastáva, ak vlak vezie nad 500 ľudí a každý človek navyše spôsobuje meškanie vlaku o 0,02 minúty. Výplaty budeme merať podľa toho, koľko času ušetrí od dvoch hodín. Potom výplata hráčov cestujúcich osobákom je konštantná $s(n) = 20$ minút, bez ohľadu na počet n .

Ale výplata hráčov, ktorých preváža EC závisí od n ; $p(n) = 70$, ak $n \leq 500$, ale narastá o $1/50$ za každého ďalšieho hráča nad 500 osôb. Potom $p(n) = 70 - (n-500)/50$ pre hodnoty $n > 500$.

Teraz si zoberme, že EČečkom cestuje 2000 ľudí, ostatní pôjdu osobákom. Meškanie vlaku potom bude $(2000-500)/50 = 30$ minút. Každému hráčovi, ktorý si vybral akciu P bude priradená výplata $p(n) = 70 - 30 = 40$. Ak sa niekto, kto cestuje osobákom, rozhodne pre cestu EČečkom, meškanie vlaku sa pre každého hráča s akciou P zvýši na 30,02 minút a ich výplata bude $p(n+1) = 39,98$. Táto výplata je stále väčšia ako v prípade výberu akcie S, ale každý z 2000 ostatných hráčov z akciou P utrpí stratu 0,02 minúty. Celková výplata týchto hráčov sa potom zníži o $2000 * 0,02 = 40$ minút. Pre hráča, ktorý zmenil akcie, je táto zmena pozitívna, keďže $p(n+1) > s(n)$ ($39,98 > 20$). Ale táto zmena horšie pôsobí na celkovú výplatu spoločnosti, ktorá sa zníži o 40 (minúty stratené hráčmi s akciou P) – 19,98 (minúty získané hráčom ktorý zmenil svoju stratégiu) = 20,02 minút. Rozdiel medzi $T(n+1)$ a $T(n)$ je v tomto prípade záporný.

$$N = 3500, \quad n = 2000$$

$$p(n) = p(2000) = 40, \quad p(n+1) = p(2001) = 39,98$$

$$s(n) = s(2000) = 20, \quad s(n+1) = s(2001) = 20$$

$$p(n+1) - s(n) = p(2001) - s(2000) = 39,98 - 20 = 19,98$$

$$n[p(n+1) - p(n)] + (N-n-1)[s(n+1) - s(n)] = 2000(39,98 - 40) + 1499(20 - 20) = -40$$

$$T(n+1) - T(n) = 19,98 - 40 = -20,02$$

Marginálny spoločenský prírastok aj efekt prelievania má zápornú hodnotu, zatiaľ čo marginálny osobný prírastok je kladný. Táto zmena stratégie jedného hráča z S na P spôsobila úžitok iba tomu jedinému hráčovi.

V prípadoch, keď efekt prelievania alebo externalita nadobúda záporné hodnoty, nazývame túto externalitu negatívnou. Negatívna externalita vzniká, keď akcia niektorého z hráčov spôsobí zníženie výplat ostatných hráčov (nie nutne všetkých), aj celkovej výplaty spoločnosti. Tento hráč však túto externalitu neberie veľmi na vedomie pri zmene svojej stratégie, pretože preňho má pozitívny marginálny osobný prírastok. Spoločnosť by bola samozrejme radšej, keby každé individuálne rozhodnutie nie je sebecké a vedie ku kladnému marginálneho spoločenského prírastku. Ak je spoločenský prírastok záporný, ale osobný prírastok je kladný, hráč svojou zmenou stratégie uškodil spoločnosti. Hráči ale často berú ohľad iba na zvýšenie svojej výplaty, preto sa negatívne externality vyskytujú častejšie, ako by si spoločnosť želala. Naopak, stratégie s pozitívnymi externalitami si hráči vyberajú málokedy.

V prípadoch keď je počet hráčov N veľký, napr. v tisícoch, jedinec je charakterizovaný iba ako veľmi malá časť celku. Kvôli tomuto môžeme n považovať za kontinuálnu premennú. Ak $T(n)$ je výplata spoločnosti, efekt na zmenu n môžeme vyrátať pomocou derivácie $T'(n)$.

$$\begin{aligned} T'(n) &= p(n) + np'(n) - s(n) + (N - n)s'(n) = \\ &= [p(n) - s(n)] + np'(n) + (N - n)s'(n) \end{aligned}$$

Rov. 4.3

Vidíme, že táto rovnica je ekvivalentnou k Rov. 4.1. $T'(n)$ reprezentuje marginálny spoločenský prírastok. Marginálny osobný prírastok je $p(n) - s(n)$, čo je iba rozdiel medzi výplatami pre akciu P a S, keďže zmena akcie jedného hráča zmenila ostatným ich výplatu iba o malú čiastku. Keď sa ale tieto čiastky zrátajú, nie sú už zanedbateľné, čo prezentuje $np'(n)$, rovnako aj $(N - n)s'(n)$, kde sú zahrnuté všetky zmeny výplat hráčov hrajúcich akciu S. Posledné dva výrazy charakterizujú marginálny efekt prelievania.

V príklade s vlakmi sme mali $p(n) = 70 - (n-500)/50 = 80 - 0,02n$ a $s(n) = 20$. Marginálny osobný prírastok bude $p(n) - s(n) = 60 - 0,02n$. Keďže $p'(n) = -0,02$ a $s'(n) = 0$, efekt prelievania je $-0,02n + 0(N - n) = -0,02n$, čo v prípade ak $n = 2000$ je -40 . Vidíme, že sme sa dostali k rovnakému výsledku ako predtým, ale výpočet bol trochu jednoduchší. [2]

4.1 Negatívne externality

Ak si n hráčov vyberá akciu P, v našom prípade jazdu na vlaku EC, ďalší hráč uvažuje o zmene akcie zo S na P, rozhodne sa pre túto zmenu ak platí $p(n+1) > s(n)$. Výplata spoločnosti narastá, ak $T(n+1) - T(n) > 0$. Vychádzajúc z Rov. 4.1 a Rov. 4.2 vieme určiť, že marginálny osobný prírastok bude kladný ak

$$70 - (n + 1 - 500)/50 > 20$$

$$79,98 - 0,02n > 20$$

$$n < 2999,$$

a marginálny spoločenský prírastok bude kladný ak

$$70 - (n + 1 - 500)/50 - 20 - 0,02n > 0$$

$$59,98 - 0,04n > 0$$

$$n < 1499,5.$$

Keď teda dáme hráčom slobodnú voľbu, do EČečka ich nastúpi skoro 3000, aj keď každý, kto tam nastúpi, keď ich tam bude nad 1499, znižuje výplatu spoločnosti. Spoločnosť by bola najradšej, keby sa počet cestujúcich držal na počte 1499.

Tieto výsledky si zobrazíme na Grafe 4.1. Na horizontálnu os nanesieme hodnoty n počtu hráčov cestujúcich v EC. Na vertikálnej osi meriame výplaty hráčov. Výplata každého hráča cestujúceho osobákom je konštantná a rovná 20 pre ľubovoľnú hodnotu $n \in (0, 3500)$, a je prezentovaná priamkou $s(n)$. Výplata pre každého, kto sa rozhodol zmeniť svoju stratégiu zo S na P je prezentovaná priamkou $p(n+1)$. Táto ostáva konštantná na hodnote 70 pokiaľ EC nie je preťažené ($n < 500$) a potom začne klesať o 0,02 pre každý nárast n o 1. Obe priamky sa pretnú v bode, kde $n = 2999$, a platí $p(n+1) = s(n)$. V tomto bode je marginálny osobný prírastok rovný 0. Všade naľavo od tohto bodu každý hráč počíta s tým, že v prípade zmeny jeho akcie zo S na P bude mať pozitívny zisk.

Ak by sme považovali n za kontinuálnu premennú ($p(n+1) = p(n)$), potom by prienik nastal v bode $n = 3000$, namiesto 2999. Vidíme, že v praxi je v tom veľmi malý rozdiel. V tomto bode teda hra nadobúda Nashovo ekvilibrium. Znamená to, že ak dáme všetkým 3500 hráčom slobodnú voľbu, 3000 z nich nastúpi do EC a 500 pôjde osobákom.

Riešenie hry z pohľadu najlepšieho spoločenského výsledku ale bude iné. Spoločnosť profituje z nárastu n ak $T(n+1) - T(n) > 0$, a naopak, stráca ak $T(n+1) - T(n) < 0$. Vezmeme Rov. 4.1 a upravíme ju iným spôsobom ako predtým

$$\begin{aligned} T(n+1) - T(n) &= (n+1)p(n+1) + (N-n-1)s(n+1) - np(n) - (N-n)s(n) = \\ &= \{p(n+1) + n[p(n+1) - p(n)]\} - \{s(n) + [N-(n+1)][s(n+1) - s(n)]\}. \end{aligned}$$

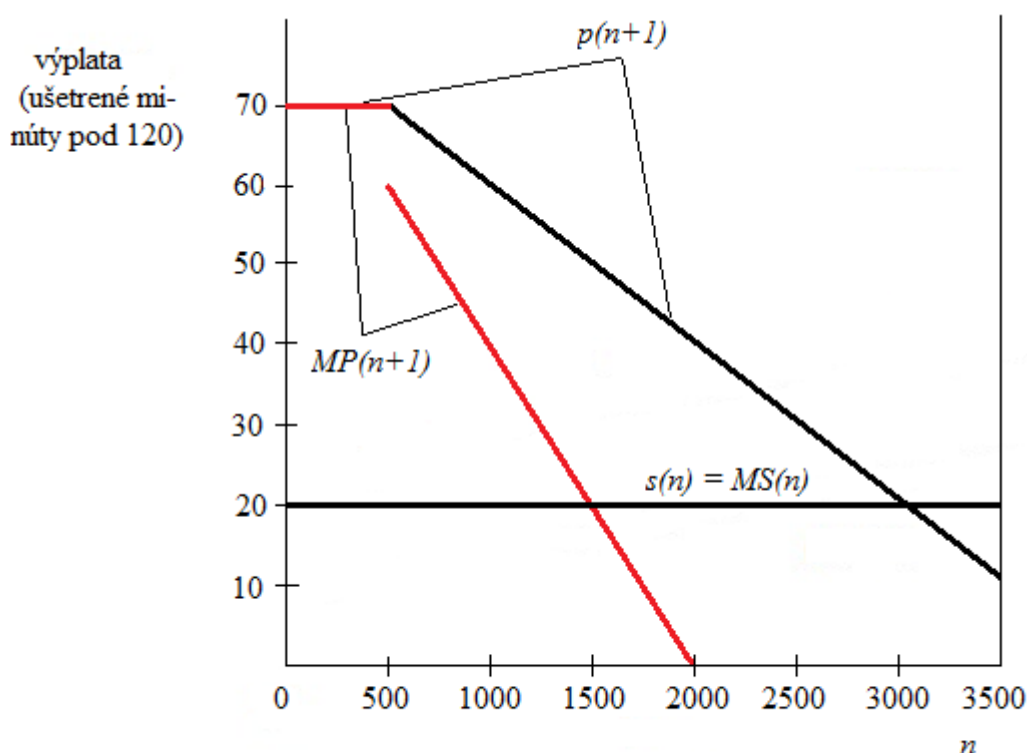
Rov.4.4

Prvá časť predstavuje efekt na výplatu hráčov voliacich si stratégiu P. Výplata hráča, ktorý zmenil svoju akciu $p(n+1)$ a zmeny vo výplate $p(n+1) - p(n)$ pre všetkých ostatných hráčov n hrajúcich akciu P. Túto časť nazývame marginálna spoločenská výplata (ang. marginal social payoff) pre skupinu hráčov hrajúcich P, ktorých počet vzrástol z n na $n+1$, alebo skrátené $MP(n+1)$. Podobne druhú časť rovnice nazveme marginálna spoločenská výplata pre skupinu hráčov hrajúcich S, resp. $MS(n)$. Výplata spoločnosti, ak jeden hráč mení svoju akciu zo S na P, narastá, ak $MP(n+1) > MS(n)$, a klesá v opačnom prípade.

V našom príklade s vlakmi máme $MP(n+1) = 70$ pre $n < 500$, pre vyššie hodnoty n platí

$$MP(n+1) = 70 - (n + 1 - 500)/50 + (-0,02)n = 79,98 - 0,04n,$$

zatiaľ čo $MS(n) = 20$ pre všetky hodnoty n . Na Grafe 4.1 je $MP(n+1)$ zobrazená červenou priamkou.



Graf 4.1

Všimnime si, že $MP(n+1)$ splýva s $p(n+1)$ pre $n < 500$ (kým EC nie je preťažený) a $MS(n)$ splýva so $s(n)$ na celej dĺžke intervalu. Ale pre $n > 500$ sa krivka $MP(n+1)$ dostane pod $p(n+1)$ práve kvôli negatívnemu efektu prelievania. Spoločenský prírastok zo zmeny akcie hráča je menší ako osobný prírastok tohto hráča.

$MP(n+1)$ a $MS(n)$ krivky sa pretnú v $n = 1499,5$ teda približne 1500. Vľavo od tohto bodu platí $MP(n+1) > MS(n)$ a spoločnosť profituje zo zmeny akcie jedného hráča zo S na P.

Napravo je to naopak a spoločnosť v tom prípade trpí stratou pri zmene stratégie. Spoločensky optimálne rozdelenie pasažierov je 1500 cestujúcich v EC a 2000 v osobáku.

Rôzne kultúrne a politické skupiny používajú rôzne spôsoby na dosiahnutie spoločensky optimálneho rozdelenia hráčov, pričom každý z nich má svoje výhody aj nedostatky. Spoločnosť by mohla jednoducho obmedziť prístup do EC na 1500 ľudí. Ako ale rozhodne, ktorí z hráčov to budú? Mohli by sa riadiť podľa pravidla kto prv príde, ten prv melie. Ale potom by všetci hráči chceli byť na nástupišti skôr, aby mohli cestovať EČečkom, čo by im mohlo spôsobiť plytvanie časom a v konečnom dôsledku zníženie ich ušetreného času. Byrokratická spoločnosť môže nastaviť kritériá založené na výpočtoch potrieb a zásluh určených úradníkmi. Potom každý bude vykonávať nejaké nákladné aktivity na splnenie týchto kritérií. V politickej spoločnosti môžu vláda uprednostniť svojich voličov, prispievateľov alebo skupiny a firmy, s ktorými kšeftujú. V skorumpovanej spoločnosti si výhody môžu užívať hráči, ktorí podplatili úradníkov alebo politikov. Rovnostárska spoločnosť môže rozdeliť hráčov pomocou lotérie, alebo periodicky (napr. každý mesiac) striedať ľudí cestujúcich EČečkom.

Veľa ekonómov ale uprednostňuje systém poplatkov. Každý, kto chce jazdiť vo vlaku EC musí zaplatiť poplatok (daň) t , primeranú k ušetrenému času. Potom výplata hráča, ktorý jazdí v EC, bude $p(n) - t$ a NE bude hodnota n , pre ktorú platí $p(n) - t = s(n)$. Vieme, že spoločensky optimálna hodnota n je 1500. Použitím výrazu $p(n) = 80 - 0,02n$ a $s(n) = 20$, pričom $n=1500$, zistíme, že $p(n) - t = s(n)$ (hráči sú neutrálni pri výbere medzi EC a osobákom) vtedy, keď $50 - t = 20$, resp. $t=30$. Ak napr. hodnota jednej hodiny je spoplatnená daňou 5€, 30 minút bude stáť 2,50€. Toto je poplatok alebo mýto, ktorý keď sa zavedie, udrží počet hráčov cestujúcich EČečkom na spoločensky optimálnej hodnote.

Ak by v EC cestovalo 1500 ľudí, pridaním jedného hráča narastie ich čas strávený vo vlaku o 0,02 minúty a ich daň sa zvýši o 1/600 €. Každý z nich teraz platí cenu za negatívnu externalitu vyvolanú hráčom, ktorý je tam navyše. Z toho dôvodu ich to núti vybrať si spoločensky optimálnu akciu, každý z nich prijal myšlienku externality. Hráči, ktorých akcia vyvolala poškodenie ostatných, by mali platiť za spôsobenú škodu, ale výnosy z daní nie sú priamo použité na ich kompenzáciu. Ak by boli, každý hráč s akciou P by sa spoliehal na to, že od ostatných obdrží, čo sám zaplatil, a celá idea by stratila význam. Namiesto toho výnos z týchto daní ide do vládnych príjmov, kde môže, ale nemusí byť použitý spôsobom prospešným spoločnosti.

Ekonómovia, ktorí uprednostňujú závislosť na trhu, by navrhli, aby EC bolo v súkromnom vlastníctve. Potom by tohto vlastníka motivácia zisku prinútila stanoviť poplatok za použitie vlaku práve na takú sumu, aby zredukoval počet n na spoločensky optimálny. Vlastník vie, že ak zavedie daň t pre každého účastníka, počet účastníkov bude určovať $p(n) - t = s(n)$. Jeho výnos bude $t(n) = n[p(n) - s(n)]$ a bude ho chcieť maximalizovať. V našom prípade je výnos $t(n) = n[80 - 0,02n - 20] = n[60 - 0,02n] = 60n - 0,02n^2$. Jeho maximum môžeme vypočítať deriváciou $t'(n) = 60 - 0,04n = 0$, a to je práve vtedy, keď $n = 1500$. V tomto prípade ale výnos ide do vlastníckeho vrečka, väčšina ľudí preto považuje toto riešenie za zlé.

4.2 Pozitívne externality

Mnoho vecí týkajúcich sa pozitívnych externalít môže byť jednoducho chápane ako opak tých negatívnych. Osobný profit jednotlivca po akciách s pozitívnym efektom prelievania je menší ako profit spoločnosti. Lepší výsledok môže byť dosiahnutý rozšírením hráčových motívov, napr. poskytnutím odmeny (za akciu prinášajúcu pozitívny efekt), ktorej hodnota je rovná úžitku akcie. Týmto spôsobom bude dosiahnuté spoločenské optimum. Či je externalita pozitívna alebo negatívna závisí aj na tom, ktorú akciu nazveme P a ktorú S.

V našom príklade, ak by sme EC brali ako akciu S a osobák ako akciu P, hráč ktorý preskočí zo S na P zníži čas ostatných, ktorí si vybrali S. Táto akcia bude mať pozitívny efekt prelievania.

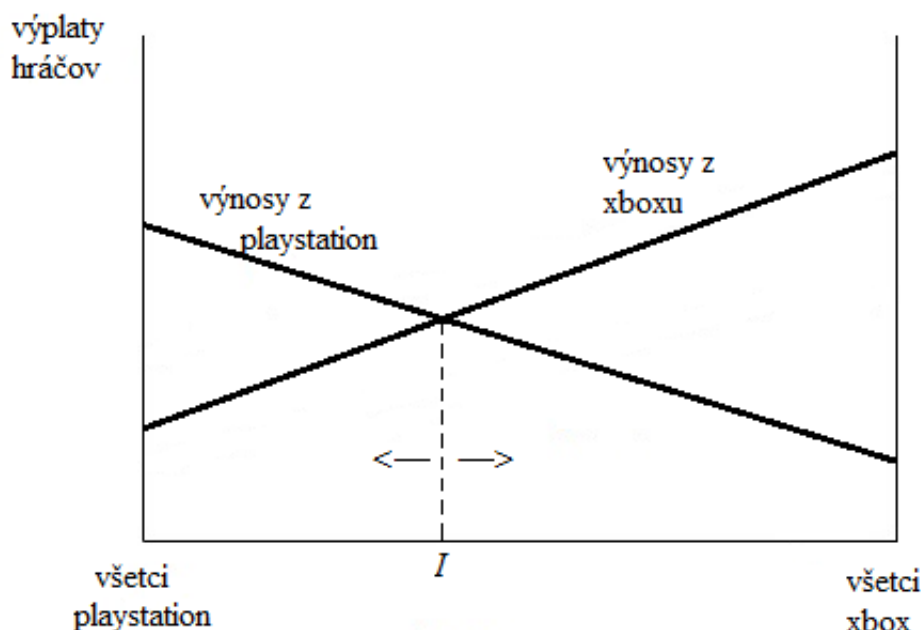
Ako iný príklad môžeme zvážiť očkovanie proti nejakým chorobám. Každý človek, ktorý sa nechá zaočkovať, znižuje svoju šancu na chytenie choroby (marginálny osobný prírastok) a takisto znižuje možnosť, že ostatní chytia túto chorobu od neho (externalita). Ak nedať sa zaočkovať nazveme akciou S, potom zaočkovanie má pozitívny efekt prelievania. Ale ak nezaočkovanie budeme volať akciou P, zaočkovanie má negatívny efekt. To má dôsledky pri vytváraní politiky, kde by jednotlivé akcie mali byť v súlade so spoločenským optimom. Spoločnosť môže takisto odmeniť tých, ktorí sa dali zaočkovať, alebo potrestať tých, ktorí sa nedali.

Pozitívne externality však majú jednu dôležitú vlastnosť, ktorá ich odlišuje od negatívnych, a to je pozitívna spätná väzba. Ak efekt prelievania hráča, ktorý si zvolil P, vedie ku zvýšeniu výplat pre ostatných s rovnakou akciou, potom sa zvyšuje aj atraktivita tejto akcie, čo môže aj iných hráčov primäť k tomu, aby si zvolili P. Dáva to do pohybu proces, ktorý vrcholí v momente, keď si každý zvolí P. Naopak, ak si veľmi málo hráčov zvolí akciu P, môže sa stať natoľko neatraktívnou, že aj títo hráči postupne prejdú na akciu S. Inými slovami, pozitívna spätná väzba môže viesť k niekoľkým NE.

Ukážeme si príklad, kde sa hráči rozhodujú, či si kúpia playstation alebo xbox. Ako by počet vlastníkov playstation rástol, tým výhodnejšie by bolo aj pre ostatných si ju kúpiť, pretože na trhu by bolo viac dostupných doplnkov, hier, viacej odborníkov, ktorý by pomohli s problémami. To isté platí aj pre xbox. Na Grafe 4.2 vidíme, že výnosy z predaja xboxu rastú ako rastie počet jeho vlastníkov, a keď tento počet klesá, rastú výnosy z predaja playstation. Z grafu je tiež zrejmé, že ak by všetci hráči vlastnili xbox, ich profit bude väčší, ako keby všetci vlastnili playstation. Mohli by sme predpokladať, že každý by chcel v tomto prípade vlastniť radšej xbox ako playstation. Vedie ale individuálna voľba k spoločenskému optimu?

Ak by bolo v spoločnosti iba málo vlastníkov xboxu, distribúcia doplnkov a hier leží vľavo od prieniku výplatových kriviek I . Každý jednotlivec v tomto prípade si radšej zvolí playstation. Ak je vysoký počet vlastníkov xboxu v spoločnosti (vpravo od I), pre každého je lepšie zvoliť si xbox. Zmiešaná populácia vlastníkov xboxu a playstation je udržiavateľná v ekvilibriu iba vtedy, ak má presne I vlastníkov xboxu. Iba vtedy nebude mať žiadny z hráčov žiadny motív ku zmene konzoly. Ak ale jeden hráč urobí chybné rozhodnutie, jeho voľba bude tlačíť spoločnosť naľavo od I (kde bude stimul pre hráčov kúpiť si playstation)

alebo napravo (hráči si budú chcieť kúpiť xbox). Spoločnosť s presne I vlastníkmi xboxu je síce v ekvilibriu, ale nestálom. Stabilné ekvilibriá sú v koncových bodoch priamok, kde je každý buď vlastníkom playstation alebo xboxu.



Graf 4.2

Musíme ale brať ohľad aj na to, kde hra začala. V dnešných domácnostiach majú ľudia častejšie playstation ako xbox, keďže sa začali vyrábať skôr. Vyzerá to teda, že ak je v spoločnosti menší počet vlastníkov xboxu, spoločnosť sa bude uberať k ekvilibriu, kde všetci vlastnia playstation. V prípade, kedy naozaj xbox a jeho doplnky poskytujú väčší profit pre spoločnosť, ak ich všetci vlastnia, by malo byť toto ekvilibrium preferované všetkými hráčmi. Ale aj napriek tomu, že spoločnosť by bola radšej za zmenu, žiadny jednotlivec, ktorý vlastní playstation, nemá motiváciu ku zmene stratégie. Iba koordinovaná akcia môže viesť smerom k xboxovému ekvilibriu. Veľké množstvo hráčov (viac ako I) musí vlastniť a používať xbox pred tým, ako sa stane výhodným aj pre ostatných vlastniť ho. V histórii nájdeme veľa príkladov, najznámejšie sú tie, v ktorých bola zvolená zlá stratégia.

Parná sila by mohla mať vyššiu účinnosť ako benzín alebo nafta a bola by aj šetrnejšia k životnému prostrediu. Zástancovia Dvorakovej klávesnici, že by bola lepšia ako QWERTY klávesnica, ak by sa používala všade. V týchto prípadoch rozmary verejnosti alebo cieľená reklama pomáha stanoviť konečné ekvilibrium a môže viesť k zlému výsledku z pohľadu spoločnosti. Školy, firmy a súkromný užívatelia ostali uzamknutí v konkrétnom ekvilibriu.

Idea pozitívnej spätnej väzby a uzamknutia má dôležitú úlohu v makroekonómii. Produkcia je tým výhodnejšia, keďže závisí od ekonomiky, čím väčší je štátny príjem. Naopak, štátny príjem rastie, keď firmy produkujú viac a najímajú viac zamestnancov. Pozitívne spätné väzby tu vytvárajú možnosť niekoľkých ekviliórií, z ktorých pre spoločnosť je lepšie vysoká

produkcia a vysoký príjem, ale individuálne rozhodnutia môžu uzamknúť ekonomiku v stave malá produkcia a malý príjem. [1]

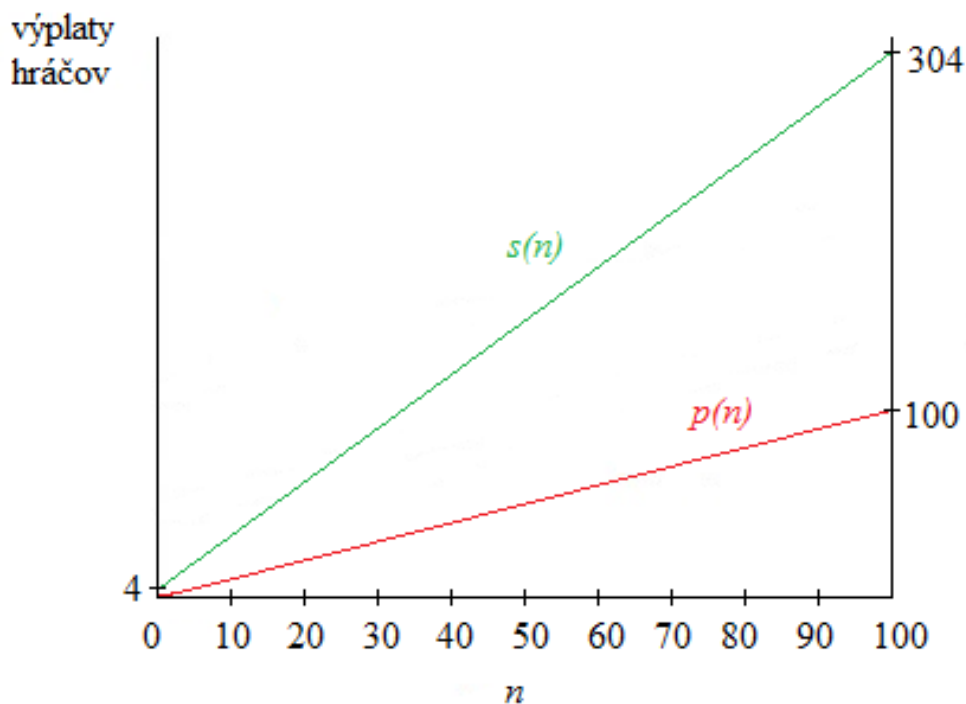
5. Riešené príklady

Pr. 1. Skupina má 100 členov. Ak n z nich sa zapojí do spoločného projektu, potom každý z nich získa výplatu $p(n) = n$, a každý z $(100 - n)$ absentérov bude mať výplatu $s(n) = 4 + 3n$.

- Aký typ hry to je?
- Vypočítajte hodnotu n , aby bol výsledok spoločensky optimálny.
- Vypočítajte výplaty účastníkov a absentérov, a výplatu spoločnosti pre optimálne n .
- Vypočítajte marginálny spoločenský a osobný prírastok, a marginálny efekt prelievania v prípade 1) kedy jeden hráč zmení svoju stratégiu zo S na P
2) kedy jeden hráč zmení svoju stratégiu z P na S,
a rozhodnite, o aký typ externality ide v obidvoch prípadoch.

Riešenie:

- Vidíme, že výplata $s(n)$ bude vždy väčšia ako $p(n)$, čiže každý z hráčov by bol radšej absentérom ako účastníkom. Po zakreslení do grafu je nám jasné, že je to hra typu Prisoners' Dilemma.



b)

$$T(n) = np(n) + (N-n)s(n) = n^2 + (100-n)(4+3n) = -2n^2 + 296n + 400$$

Funkciu maximalizujeme vtedy, keď položíme jej prvú deriváciu rovnú 0.

$$T'(n) = -4n + 296 = 0$$

$$n = 74$$

c)

$$p(n) = p(74) = 74$$

$$s(n) = s(74) = 4 + 3 \times 74 = 226$$

$$T(n) = T(74) = 74 \times 74 + 26 \times 226 = 11352$$

d)1)

$$mop = p(n+1) - s(n) = p(75) - s(74) = 75 - 226 = -151$$

$$\begin{aligned} mep &= n[p(n+1) - p(n)] + (N-n-1)[s(n+1) - s(n)] = 74[p(75) - p(74)] + 25[s(75) - s(74)] = \\ &= 74 \times 1 + 25 \times 3 = 149 \end{aligned}$$

$$msp = T(n+1) - T(n) = T(75) - T(74) = 11350 - 11352 = -2$$

Zmena stratégie jedného hráča so S na P priniesla tomuto hráčovi zníženie jeho výplaty a v konečnom dôsledku aj zníženie výplaty spoločnosti. Všetkým ostatným hráčom ale výplata narástla, ide teda o pozitívnu externalitu.

d)2)

$$mop = s(n-1) - p(n) = s(73) - p(74) = 223 - 74 = 149$$

$$\begin{aligned} mep &= (n-1)[p(n-1) - p(n)] + (N-n)[s(n-1) - s(n)] = 73[p(73) - p(74)] + 26[s(73) - s(74)] = \\ &= 73 \times (-1) + 26 \times (-3) = -151 \end{aligned}$$

$$msp = T(n-1) - T(n) = T(73) - T(74) = 11350 - 11352 = -2$$

Zmena akcie z P na S priniesla hráčovi zvýšenie jeho zisku, ale všetkým ostatným hráčom sa výplata znížila, externalita je negatívna.

Pr. 2. Uvažujme malý geografický región s populáciou 1 milión obyvateľov. Sú v ňom dve mestá Alfavil a Betavil, z ktorých si každý obyvateľ môže vybrať, v ktorom bude bývať. Pre každého jednotlivca profit z bývania v meste narastá s tým, ako sa zväčšuje populácia mesta, až do určitého bodu, odkedy začne klesať. Ak x reprezentuje rozdelenie ľudí žijúcich v mestách (resp. x vyjadruje počet obyvateľov Betavilu v miliónoch), výplaty pre obe mestá sú:

$$x, \text{ ak } x < 0,4$$

$$0,6 - 0,5x, \text{ ak } 0,4 < x < 1$$

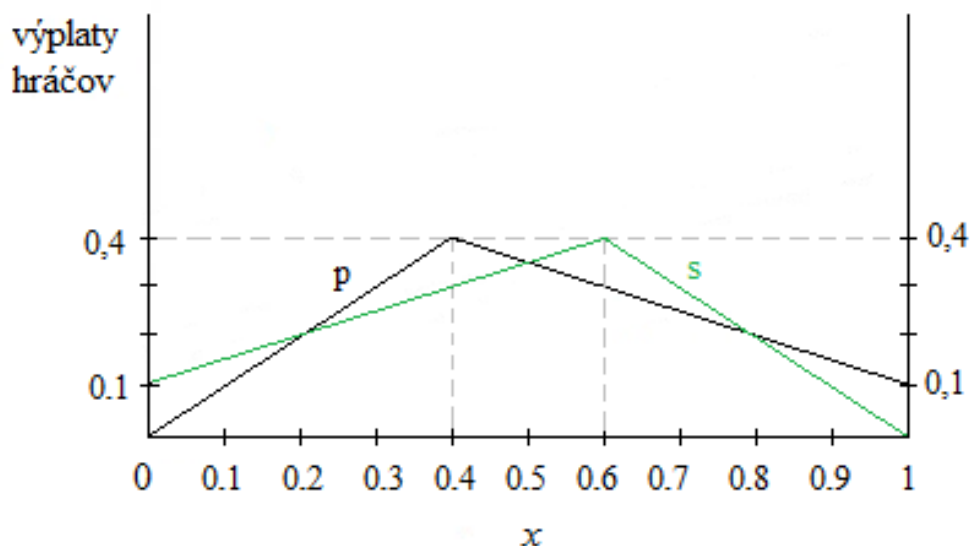
a) Nakreslite graf reprezentujúci počet obyvateľov v mestách a ich výplaty.

b) Ekvilíbrio existuje ak sú obývané obidve mestá, v bodoch, kde sa výplaty obyvateľov rovnajú, alebo, keď je jedno z miest úplne opustené a obyvatelia druhého mesta majú vyššiu výplatu ako prvý človek, ktorý by sa presťahoval. Nájdite tieto ekvilíbria pomocou grafu. Ktoré z nich je spoločensky optimálne?

c) Uvažujme teraz dynamický proces, kde sa ľudia budú postupne sťahovať do mesta, ktorého obyvatelia si užívajú vyššie výplaty ako obyvatelia druhého mesta. Ktoré z ekvilírií určených v b) budú vzhľadom na tento proces stabilné a ktoré nestabilné?

Riešenie:

a)



Na horizontálnu os sme naniesli hodnoty x , na vertikálnej sú výplaty obyvateľov. Priamka p je výplatovou krivkou pre obyvateľov Betavilu a priamka s reprezentuje výplatu obyvateľov Alfavilu.

b)

Vidíme, že táto hra obsahuje 5 ekvilibrií:

- 1) $x = 0 \rightarrow$ všetci ľudia žijú v Alfavile a ich výplaty sú 0,1.
- 2) $x = 0,2 \rightarrow$ 200 000 ľudí bude žiť v Betavile a 800 000 v Alfavile, ich výplaty sú 0,2
- 3) $x = 0,5 \rightarrow$ 500 000 ľudí žije v každom meste, výplaty obyvateľov sú 0,35
- 4) $x = 0,8 \rightarrow$ 800 000 ľudí bude žiť v Betavile a 200 000 v Alfavile, ich výplaty sú 0,2
- 5) $x = 1 \rightarrow$ všetci ľudia žijú v Betavile a ich výplaty sú 0,1.

K spoločenskému optimu vedie tretie ekvilibrium, kedy je výplata spoločnosti 350 000.

c)

Nestabilné ekvilibriá budú 2), 3) a 4), pretože ak sa náhodou jeden hráč odsťahuje do druhého mesta (kvôli rodine alebo práci), kde bude mať vyššiu výplatu, urobí toto mesto atraktívnejším aj pre ostatných zo svojho pôvodného mesta. Ľudia sa budú sťahovať, až kým sa nedosiahne jedno zo susedných ekvilibrií.

Stabilnými ekvilibriami sú 1) a 5), pretože v prípadoch, keď všetci ľudia žijú v jednom meste, nikto z nich nemá žiadny motív ku sťahovaniu do druhého mesta.

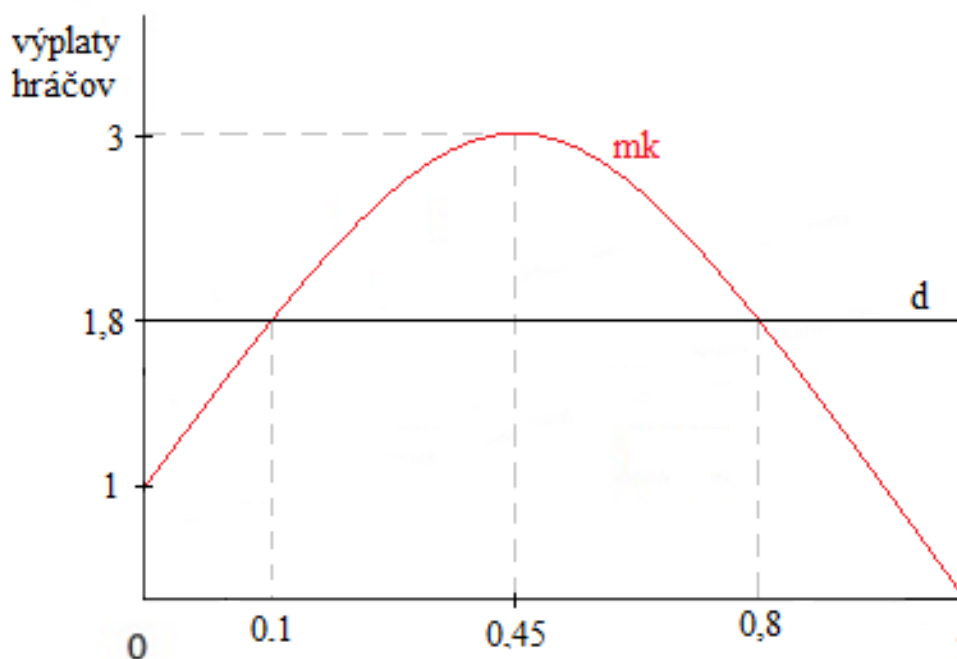
Pr. 3. Existujú dve cesty, ktorými sa dá dostať z mesta A do mesta B. Prvou je diaľnica a tou druhou sú miestne komunikácie. Profit z využívania diaľnice je konštantný, rovný 1,8, bez ohľadu na počet používateľov. Miestne komunikácie sa však preťažia, pokiaľ na nich jazdí príliš veľa šoférov. Ak je ich však príliš málo, riskujú, že sa na opustenej ceste môžu stať obeťami zločinu. Ak x reprezentuje zlomok populácie používajúci miestne komunikácie, ich výplate sú dané

$$1 + 9x - 10x^2.$$

- a) Nakreslite graf zobrazujúci výplaty hráčov, jazdiacich po oboch cestách, ako funkciu x .
- b) Nájdite všetky ekvilibriá z grafu a). Ktoré z nich sú stabilné a ktoré nie? Vysvetlite.
- c) Aká hodnota x maximalizuje výplatu celej spoločnosti?

Riešenie:

a)



Priamka d reprezentuje výplaty hráčov jazdiacich na diaľnici a krivka mk zobrazuje výplaty tých, ktorí používajú miestne komunikácie, svoje maximum nadobúda pre $x = 0,45$ a v tomto dosahuje hodnotu 3,025.

b)

Ekvilibriá nájdeme v bodoch, kedy všetci jazdia po diaľnici alebo mestskými komunikáciami, alebo v bodoch, kde sa pretína d a mk ($x=0,1$, $x=0,8$). V týchto bodoch je výplata šoférov na diaľnici rovnaká ako výplata šoférov na mestských komunikáciách.

Nestabilné ekvilibriá sú dve: $x=0,1$ a $x=1$. Ak všetci budú jazdiť po mestských komunikáciách, ich výplata bude nulová, a teda pre každého bude výhodnejšie ak preskočí na diaľnicu. V prvom prípade jazdí desatina šoférov mestskými komunikáciami a zvyšok jazdí po diaľnici. Každý diaľničný šofér by však radšej jazdil druhou cestou, pretože tam má väčšiu výplatu. Hráči sa budú presúvať na mestské komunikácie, až kým x nedosiahne hodnotu 0,8.

V tomto bode sa totiž nachádza stabilné ekvilibrium. Keď bude 8/10 hráčov jazdiť mestskými komunikáciami, žiadny z nich nebude chcieť prejsť na diaľnicu, pretože tam nemá vyššiu výplatu a riziko prepadnutia je veľmi malé pri takom počte šoférov. Opačne, nikto nebude chcieť prejsť z diaľnice na mestské komunikácie, pretože jeho výplata by klesla.

Druhé stabilné ekvilibrium je v bode $x=0$, kedy všetci jazdia po diaľnici. Nikto z nich nebude chcieť prvý preskočiť na mestské komunikácie, lebo jeho výplata by klesla na hodnotu niečo málo nad jedna.

c)

Označíme jazdu po mestských komunikáciách ako $p(x) = 1 + 9x - 10x^2$ a jazdu diaľnicou ako $s(x) = 1,8$. Výplata spoločnosti potom bude

$$T(x) = xp(x) + (1-x)s(x) = x(1 + 9x - 10x^2) + 1,8(1-x) = -10x^3 + 9x^2 - 0,8x + 1,8.$$

Maximalizovať ju budeme pomocou derivácie

$$T'(x) = -30x^2 + 18x - 0,8 = 0$$

Dostávame dva výsledky: $x=0,048339$ a $x=0,551661$. Z grafu vidíme, že prvý je veľmi malý, výplaty pre šoférov na mestských komunikáciách by boli menšie ako na diaľnici, tento výsledok teda k spoločenskému optimu nevedie. Po dosadení druhého do $T(x)$ nám vyjde

$$T(0,551661) = 0,551661x(1 + 9x - 10x^2) + 0,448339 \times 1,8 = 2,41877.$$

$x=0,551661$ teda maximalizuje výplatu celej spoločnosti.

Pr. 4. V meste s populáciou 100 by chceli postaviť zábavný park. Požadované sú dobrovoľné príspevky na pokrytie nákladov. Od každého občana sa žiada zaplatiť 100€. Čím viac ľudí sa zapojí, tým bude park väčší a aj výplaty hráčov budú vyššie. Ale aj každý, kto sa nezapojí, bude z výstavby profitovať. Ak v meste bude n účastníkov, pričom $n \in (0,100)$, výnos pre každého obyvateľa v peňažných jednotkách bude n^2 .

Predstavme si, že sa doslova nikto nezapojil. Starosta mesta by bol samozrejme rád, keby sa zapoja všetci, preto sa rozhodne presvedčiť niekoľkých ľudí. Aký je minimálny počet ľudí, ktorých musí presvedčiť, aby sa ostatní zapojili dobrovoľne?

Riešenie:

$$N=100, p(n)=n^2-100, s(n)=n^2$$

Aby sa niektorý z hráčov chcel zapojiť dobrovoľne, musí platiť $p(n+1) > s(n)$.

$$(n+1)^2 - 100 > n^2$$

$$n > 49,5$$

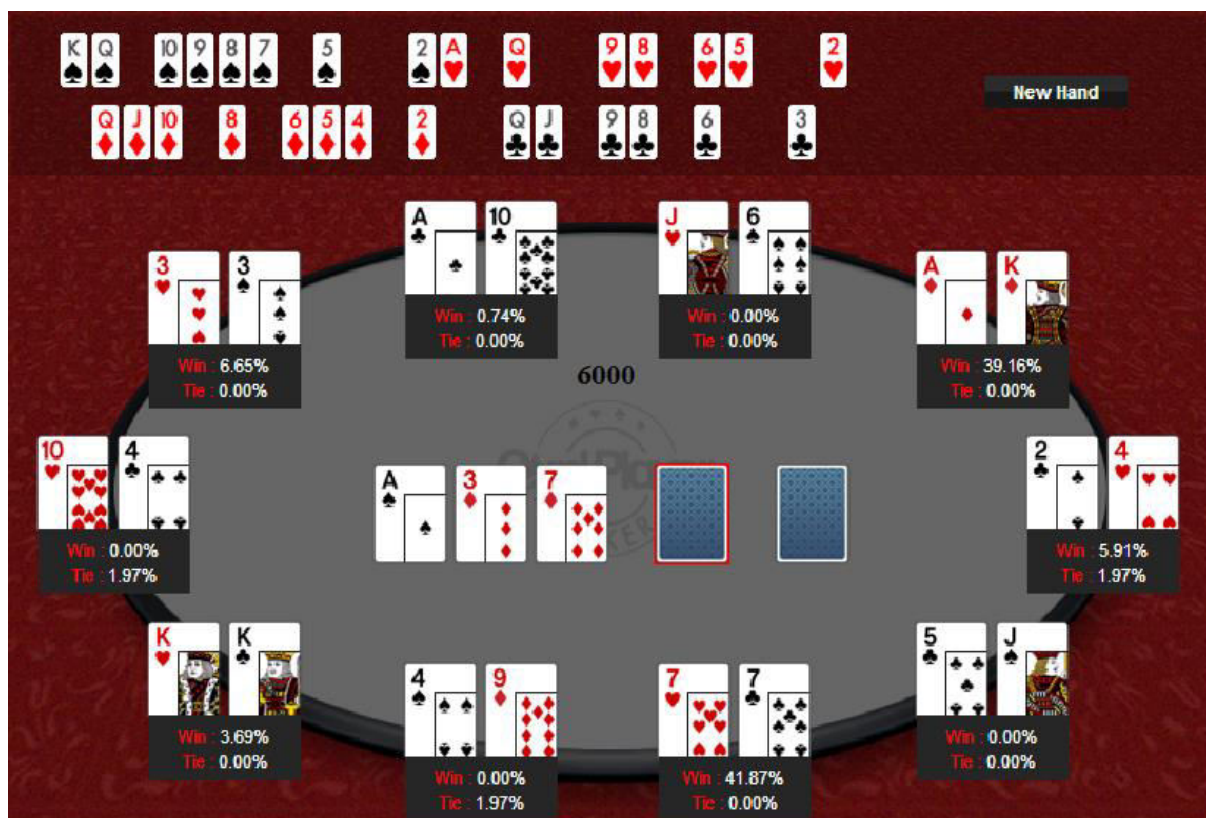
Starosta musí presvedčiť aspoň 50 ľudí, aby sa ostatní zapojili z vlastnej vôle. Môžeme sa o tom jednoducho presvedčiť:

$$p(51) = 51^2 - 100 = 2501 > 2500 = 50^2 = s(50)$$

$$p(50) = 50^2 - 100 = 2400 < 2401 = 49^2 = s(49)$$

5.1 Externality v pokri

V tejto časti rozoberieme jednu pokrovú hru a ukážeme, ako akcie jednotlivých hráčov ovplyvnia akcie ostatných. V Texas Hold Em pokri hráč dostane na ruku 2 karty ktoré vidí len on, a na stôl sa postupne vyloží 5 kariet (3-1-1). Z týchto siedmich kariet sa snaží vytvoriť čo najlepšiu kombináciu. Kombinácie, v poradí od najmenšej po najväčšiu, sú: dvojica – dve dvojice – trojica – postupka (z 5 kariet) – farba (z 5 kariet) – fullhouse (trojica a dvojica) – poker (štvorica) – farebná postupka (z 5 kariet). Uvažujme nasledujúcu hru.



flop

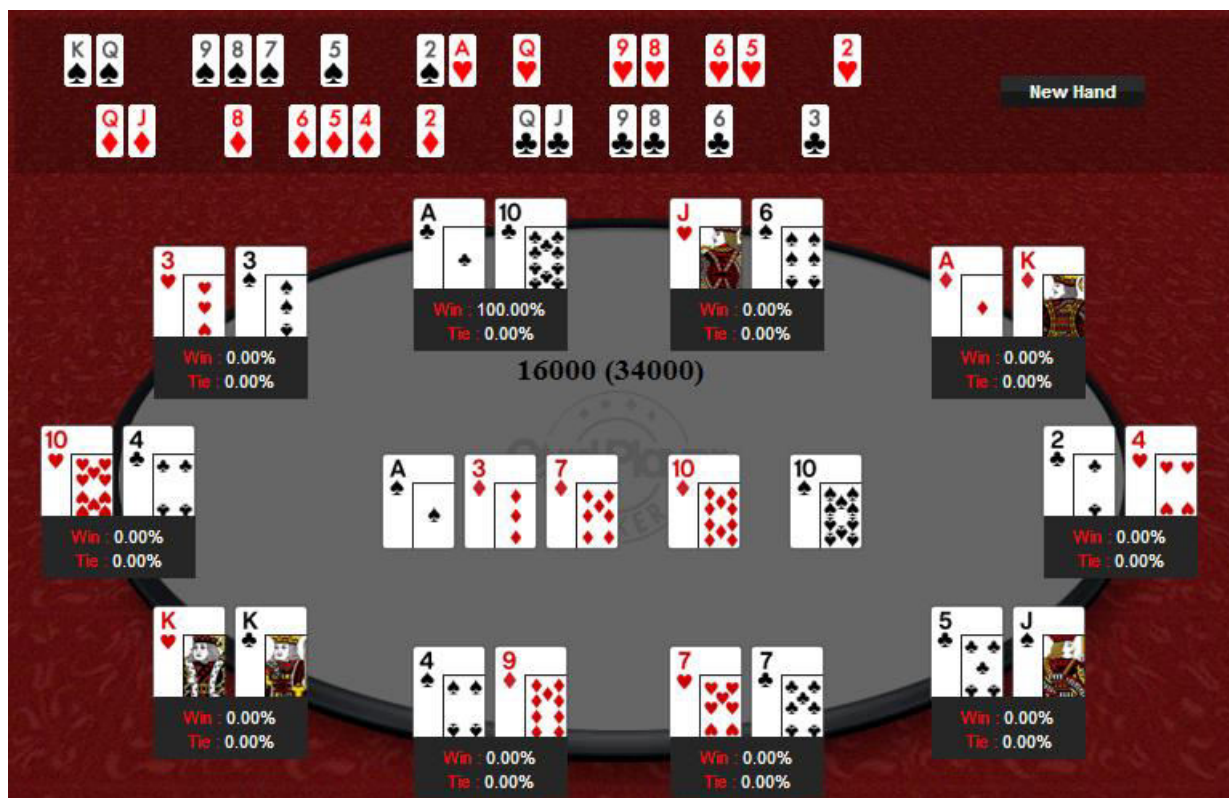
Každý z n (10) hráčov pred flopom (prvé tri karty) zaplatil poplatok $c(10)=600$ čipov, výnos v prípade výhry je pre každého $b(10)=6000$. Výplata pre víťaza je potom $p(10)=b(10) - c(10) = 5400$ a výplata pre ostatných je $s(10)=-600$. Na obrázku môžeme vidieť, koľko percent má každý hráč na získanie výplaty $p(n)$. Hráči teraz môžu zahrať tri stratégie – bet (navýšenie), check (státie) alebo fold (zahodenie). Ak niektorý hráč foldne, jeho výplata bude záporná (stratí 600 čipov vložených do hry). Ak hráč checkne, výplaty ostávajú rovnaké pre všetkých. V prípade betu sa výplata pre víťaza zvýši v závislosti od výšky stavenej čiastky a počtu hráčov, ktorí doplatia. Potom, ako niektorý z hráčov betne, ostatní majú opäť na výber z troch akcií – raise (znovunavýšenie), call (doplatenie) alebo fold (zahodenie). Na flope hrali všetci 10 hráči akciu check, ich výplaty teda ostali nezmenené. V tomto prípade by sme mohli túto stratégiu niektorých hráčov nazvať podvádzanie alebo blufovanie, kedy hráči so silnými kombináciami volia akciu check, aby presvedčili súperov, že nič nemajú. Keďže vyhrať môže iba jeden, za toto podvádzanie budú ostatní potrestaní zápornými výplatami.



turn

Na turne sa hráč s A 10 rozhodol zmeniť svoju stratégiu a miesto checku použil bet o 2000. Táto zmena stratégie má okamžitý dopad aj na ostatných hráčov. Na hráčov s J 6, 2 4, 5 J, 4 9 a 10 4 má táto zmena negatívny vplyv. Keďže každý z nich má veľmi slabú kombináciu kariet, sú prinútení zmeniť svoju akciu na fold, pričom každý z nich utrpel stratu 600. Naopak, každý zo zvyšných hráčov má potencionálne silnú kombináciu, a každý z nich verí, že môže vyhrať, preto všetci zvolia akciu call. Pre nich je táto zmena pozitívnou externalitou, pretože ich výplata v prípade výhry sa navýši o $2000n$, kde n sa zmenšilo na 5. Samozrejme, že pre tých, čo prehrajú sa potom výplata zníži o 2000, ale to je riziko s ktorým každý počíta. Strata každého z hrajúcich hráčov je momentálne $c(5)=2600$ a výnos za výhru je $b(5)=6000 + 2000 \times 5 = 16000$. Výplata pre víťaza potom bude $p(5)=13400$ a pre porazených $s(5)=-2600$.

Môže nastať aj iný prípad. Ak si napr. hráč so sedmičkami myslí, že jeho kombinácia je najlepšia, môže zmeniť stratégiu nie na call, ale na raise (povedzme na 7000). Pre hráčov s 3 3, A 10 a A K je to z ich pohľadu pozitívne; každý verí, že môže vyhrať. Ale hráč s koňmi si už uvedomil, že jeho ruka bude asi slabá a preto volí akciu fold, aj keď bude v strate 600. Vidíme, že aj táto zmena stratégie má naňho negatívny efekt. V tomto prípade ostali iba 4 hráči, $c(4)=7600$, $b(4)=6000+7000 \times 4 = 34000$, $p(4)=26400$ a $s(4)=-7600$.



river

Hráčovi s A 10 prišiel na river najvyšší fullhouse, je si takmer istý tým, že vyhrá, lebo jediná ruka, ktorá ho poráža sú dve esá. Zvolí si teda opäť akciu bet o čiastku 8000. Všetci zvyšní hráči si potom zvolili akcie call. Hráči s A K, K K a 3 3 nemenili svoju akciu oproti turnu, ale hráč so sedmičkami zmenil svoju stratégiu z raise na call. Táto zmena má pozitívny vplyv na týchto troch hráčov, pretože prehrajú menej. Ale pre hráča s A 10 je zmena tejto stratégie negatívna; keby hráč so 7 7 ešte navyšoval, jeho výplata ako víťaza by bola väčšia. Každý zo štyroch hráčov, ktorí prehrali, má zápornú výplatu, resp. utrpel stratu dokopy 10600. Víťaz si polepšil o 37400.

V druhom prípade, keď hráč so sedmičkami na turne raisoval, máme už iba 4 hráčov. Predstavme si, že teraz zmení stratégiu hráč s A 10, a to na check. Na všetkých ostatných to má pozitívny vplyv, lebo nemusia nič zaplatiť a môžu prehrať menej. Ak by niekto z nich zahral akciu bet, a potom ešte niekto aj raise, obe tieto zmeny by mali negatívny vplyv (zvyšovali by stratu) na všetkých, okrem hráča s A 10, pre ktorého by boli pozitívnou externalitou. V reálnej hre by sa pravdepodobne dostali všetci 4 hráči do allinu (vsadili by všetko) a výplata pre víťaza by bola skutočne veľká.

Záver

V tejto bakalárskej práci sme podrobne rozobrali kooperatívne hry, od základných s dvoma hráčmi až po komplikovanejšie, s n hráčmi. Naučili sme sa rozoznávať 3 základné typy hier, hľadať ich spoločensky optimálny výsledok a takisto počítať optimálnu výplatu spoločnosti. Venovali sme sa aplikácii kooperatívnych hier na rôzne ekonomické a spoločenské situácie. Spoznali sme dôležité metódy na riešenie kolektívnych problémov, aj výhody a nevýhody, ktoré so sebou prinášajú. Naučili sme sa určiť a vypočítať marginálny osobný a spoločenský prírastok, a marginálny efekt prelievania a tieto vedomosti sme na konci využili na konkrétnych príkladoch.

Prínosom tejto bakalárskej práce bolo poskytnutie jasného prehľadu poznatkov o kooperatívnych hrách pri dvoch, aj viacerých hráčoch, a externalitách, ich rozdelení na pozitívne a negatívne a ich využití v niektorých situáciách v kolektívnych problémoch. Pre autora bolo najväčším prínosom prehĺbenie už nadobudnutých poznatkov z oblasti teórie hier, oboznámenie sa s kolektívnymi hrami a efektmi, ktoré vznikajú pri zmenách stratégií.

Zoznam použitej literatúry:

- [1] BIERMAN H. S., FERNANDEZ L.: *Game Theory with Economic Applications*, Addison-Wessley, 1998

- [2] DIXIT A. K., SKEATH S., REILEY D. H.: *Games of Strategy*, W. W. Norton & Company, Third International Student Edition edition, 2010

- [3] PEKÁR J.: *Úvod do teórie hier*, prednášky, FMFI UK, Bratislava, 2013

- [4] REUBEN E.: *The Evolution of Theories of Collective Action* , Master Thesis, Tinbergen Institute, 2003

- [5] SANDLER T.: *Collective action: Theory and applications*, University of Michigan Press, Michigan, 1992

- [6] GIBONS R.: *A primer in Game Theory*, Pearson Education Limited, Harlow, 1992

- [7] MASCHLER M., SOLAN E., ZAMIR S.: *Game theory*, Cambridge University Press, New York, 2013

- [8] COLMAN A. M.: *Game Theory and Experimental Games, The Study of Strategic Interaction*, Pergamon Press Limited, Oxford, 1982