

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



MOCNINOVÉ RADY A ICH VYUŽITIE

BAKALÁRSKA PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

MOCNINOVÉ RADY A ICH VYUŽITIE

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: RNDr. Ľubica Kossaczká, CSc.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Sára Minárová
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Mocninové rady a ich využitie / *Power series and their application*

Cieľ: Cieľom je prehĺbenie poznatkov študenta z teórie mocninových radov a aplikácia týchto poznatkov pri definícii exponenciálnej a logaritmickéj funkcie v komplexnom obore. Riešenie príkladov 8. kapitoly z knihy Walter Rudin Principles of mathematical Analysis.

Vedúci: RNDr. Ľubica Kossaczká, CSc.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania: 18.10.2013

Dátum schválenia: 14.11.2013

doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

PodĎakovanie Na tomto mieste sa chcem veľmi pekne poďakovať mojej školiteľke RNDr. Ľubici Kossaczkej, CSc. za priateľský prístup, ústretovosť a odborné rady, ktoré mi veľmi pomohli k vypracovaniu tejto bakalárskej práce.

Abstrakt v štátnom jazyku

MINÁROVÁ, Sára: Mocninové rady a ich využitie [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky, školiteľ: RNDr. Ľubica Kossaczká, CSc., Bratislava, 2014, 39 strán.

V našej práci sa zaoberáme problematikou mocninových radov a ich využitím v praxi. Naším cieľom je prehĺbenie poznatkov z tejto oblasti a ich rozšírenie. Práca je rozdelená na päť kapitol. V prvej zavedieme pojmy, ktoré sú nevyhnutné pre ďalšiu prácu. Pomocou teórie z prvej kapitoly odvodzujeme vlastnosti exponenciálnych, logaritmických a trigonometrických funkcií, ktoré sa často používajú v praxi. Posledná kapitola ponúka niekoľko ukážok použitia v praxi. Cieľom práce je ponúknuť dôkazy uvedených vlastností aj čitateľovi, ktorý nemá vyššie matematické vzdelanie.

Kľúčové slová: mocninové rady, exponenciálna funkcia, logaritmická funkcia, trigonometrické funkcie

Abstract

MINÁROVÁ, Sára: Power series and their application [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: RNDr. Ľubica Kossaczká, CSc., Bratislava, 2014, 39 p.

In our thesis we deal with the theory and practical application of power series. Our goal is to broaden our knowledge in this topic. The thesis is divided into five chapters. In the first chapter we define terms necessary for later understanding. Using power series, we derive all the well-known properties of exponential, logarithmic and trigonometric functions. In the last chapter we present a few practical examples of use. Also, we want to offer the results of our work to a reader, who has no further education in mathematics.

Keywords: power series, exponential function, logarithmic function, trigonometric functions

Obsah

Úvod	8
1 Mocninové rady	10
2 Exponenciálna a logaritmická funkcia	18
3 Trigonometrická funkcia	23
4 Algebraická úplnosť komplexného poľa	29
5 Riešené príklady	31
Záver	38
Zoznam použitej literatúry	39

Úvod

Pojmom mocninový rad sa v matematike označuje rad funkcií vyjadrený v nasledovnom tvare: $f(x) = a_0 + a_1(x-p)^1 + a_2(x-p)^2 + \dots + a_n(x-p)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-p)^n$. Pri výpočtoch sa veľmi často používa špeciálny tvar mocninového radu: ak v predchádzajúcom výraze položíme $p=0$, dostávame rad $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$, ktorý sa nazýva Maclaurinov.

Možno sa to na prvý pohľad nezdá, ale mocninové rady majú vo svete vedy významné postavenie. Sú veľmi dobrým výpočtovým nástrojom s vysokým stupňom presnosti. Pomocou nich je možné vyjadriť mnohé fyzikálne veličiny, napríklad tlak, hustotu či rýchlosť.

Mocninové rady sú často potrebné aj pri riešení diferenciálnych rovníc. Mnohé typy rovníc sú najjednoduchšie riešiteľné práve generovaním riešenia v tvare mocninového radu. Z matematického hľadiska sú rady užitočné napríklad kvôli tomu, že sú diferencovateľné a integrovateľné, čo využívajú vo svoj prospech mnohé ďalšie vedy, najmä fyzika.

Ďalšie spôsoby využitia uvádza napríklad práca [3]: “Mocninové rady sa používajú pri rozličných typoch úloh, napríklad približný výpočet funkčných hodnôt elementárnych funkcií, výpočet limit a integrálov a riešenie diferenciálnych rovníc.”

V prvej kapitole práca oboznamuje čitateľa so základnými pojmami, ktoré je potrebné poznať pri čítaní ďalších kapitol, ktoré sa už venujú konkrétnym typom funkcií.

Druhá kapitola sa zaoberá exponenciálnymi a logaritmickými funkciami. Pomocou mocninových radov sa dajú pomerne jednoducho dokázať vlastnosti, ktoré sa bežne používajú pri výpočtoch.

Tretia kapitola je venovaná trigonometrickým funkciám sínus a kosínus. Tieto funkcie sa dajú definovať pomocou exponenciálnej funkcie komplexného čísla a z tejto definície dostaneme aj rozvoj do mocninového radu. Použitím vlastností exponenciálnej funkcie, ktoré odvodíme v druhej kapitole, dokážeme aj známe vlastnosti trigonometrických funkcií.

Štvrtá kapitola sa zaoberá dôkazom úplnosti komplexného poľa. Pole (vo všeobecnosti) je množina, na ktorej je definovaná operácia sčítania a násobenia. Platia tu komutatívny, distributívny a asociatívny zákon. Komplexné pole má navyše niekoľko ďalších

vlastností. Tie uvedieme na začiatku kapitoly.

Niekoľko ukážok praktického použitia sa nachádza v poslednej kapitole. Zaoberáme sa najmä výpočtami limít, pri týchto výpočtoch sú mocninové rady celkom užitočné, najmä ak si nie sme istí, ktorú metódu použiť. Ďalej vieme takto sčítavať nekonečné rady alebo dokazovať existenciu derivácií do určitého rádu.

1 Mocninové rady

V úvodnej kapitole definujeme základné pojmy, s ktorými budeme pracovať vo všetkých ostatných kapitolách. Všetky uvedené pojmy sa vzťahujú na množinu reálnych aj komplexných čísel, my sa budeme venovať prevažne reálnym hodnotám.

Definícia 1.1. (podľa [8])

Pojmom mocninový rad sa v matematike označuje rad funkcií vyjadrený v nasledovnom tvare:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-p)^1 + a_2(x-p)^2 + \dots + a_n(x-p)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-p)^n. \quad (1)$$

Pri výpočtoch sa veľmi často používa špeciálny tvar mocninového radu: ak v predchádzajúcom výraze položíme $p = 0$, dostávame rad

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n. \quad (2)$$

Tento rad sa nazýva Maclaurinov.

Definícia 1.2. (podľa [8])

Funkcia $f(x)$ sa nazýva analytická, ak je možné zapísať ju v tvare:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \quad (3)$$

Ak (1) konverguje pre všetky $x \in (-R, R)$ pre R kladné (niekedy môže nastať aj prípad $R=+\infty$), hovoríme, že f sa dá rozvinúť do mocninového radu v okolí bodu $x = 0$. Analogicky, ak (2) konverguje pre $|x-a| < R$, povieme, že f je rozvinutá do mocninového radu v okolí bodu $x = a$. Bez ujmy na všeobecnosti väčšinou uvažujeme prípad $a = 0$.

O chvíľu sformulujeme a dokážeme tvrdenie, že ak mocninový rad konverguje pre $|x| < R$, potom konverguje rovnomerne na intervale $[-R+\varepsilon, R-\varepsilon]$. K tomu budeme potrebovať vetu o rovnomernej konvergencii, ktorú uvidíme bez dôkazu.

Veta 1.3. (o rovnomernej konvergencii)(podľa [1])

Predpokladajme, že $\{f_n\}$ je postupnosť funkcií diferencovateľná na intervale $[a, b]$ a $\{f_n(x_0)\}$ konverguje na $[a, b]$ pre nejaké x_0 . Ak $\{f'_n\}$ konverguje rovnomerne na $[a, b]$, potom postupnosť $\{f_n\}$ rovnomerne konverguje na $[a, b]$ k funkcii f :

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

Veta 1.4. (podľa [8])

Predpokladajme, že rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (4)$$

konverguje pre $|x| < R$. Definujme:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (5)$$

pre $|x| < R$. Potom (3) rovnomerne konverguje na intervale $[-R + \varepsilon, R - \varepsilon]$ pre každé $\varepsilon > 0$. Funkcia f je spojitá a diferencovateľná na intervale $(-R, R)$ a platí:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} \quad (6)$$

pre $|x| < R$.

Dôkaz. *Nech $\varepsilon > 0$. Pre $|x| \leq R - \varepsilon$ máme:*

$|c_n x_n| \leq |c_n (R - \varepsilon)^n|$. Keďže rad $\sum c_n (R - \varepsilon)^n$ konverguje absolútne (každý mocninový rad konverguje absolútne vo vnútri intervalu konvergenzie) a postupnosť $c_n x^n$ je ohraňovaná, (3) konverguje rovnomerne na intervale $[-R + \varepsilon, R - \varepsilon]$

Vieme, že $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ pre $n \rightarrow \infty$. Potom platí:

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n|c_n|} = \limsup_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|},$$

teda rady (5) a (6) majú rovnaký interval konvergenzie.

Keďže (6) je mocninový rad, rovnomerne konverguje na intervale $[-R + \varepsilon, R - \varepsilon]$ pre každé $\varepsilon > 0$, môžeme použiť vetu 1.3 pre rady namiesto postupnosti funkcií. Z vety vyplýva, že (5) platí, ak $|x| \leq R - \varepsilon$.

Ak však máme dané x spĺňajúce $|x| < R$, vieme nájsť také $\varepsilon > 0$, že $|x| \leq R - \varepsilon$. Z toho vyplýva, že (6) platí pre $|x| \leq R - \varepsilon$.

Spojitosť f vyplýva z existencie prvej derivácie f' .

Dôsledok 1.5. (podľa [8])

Podľa predpokladov predchádzajúcej vety má f derivácie všetkých rádov na intervale $(-R, R)$, ktoré sú dané:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)c_n x^{n-k} \quad (7)$$

V bode 0 môžeme deriváciu ekvivalentne vyjadriť v tvare

$$f^{(k)}(0) = k!c_k. \quad (8)$$

Dôkaz. Rovnicu (7) dostaneme, ak aplikujeme predchádzajúcu vetu na funkcie f , f' , f'' a ďalšie derivácie. Ak položíme v (7) $x = 0$, dostaneme (8).

Pozrime sa bližšie na (8). Ukazuje, že koeficienty rozvoja funkcie f do mocninového radu sú dané funkciou f a jej hodnotami v potrebných bodoch. Koeficienty sú však dané, hodnoty f' v strede intervalu konverencie sa dajú vyčítať priamo z mocninového radu.

Je potrebné si všimnúť, že aj keď má funkcia f derivácie všetkých rádov, výraz $\sum c_n x^n$, kde c_n vypočítame z (8), nemusí nutne konvergovať k $f(x)$ pre každé $x \neq 0$. V tomto prípade funkciu nevieme rozvinúť do mocninového radu v bode $x = 0$.

Ak rad (4) konverguje v koncovom bode (označme ho R), potom funkcia f je spojitá nielen na intervale $(-R, R)$, ale aj v bode $x = R$. Vyplýva to z Abelovej vety. Pre zjednodušenie položíme $R = 1$.

Veta 1.6. (podľa [8])

Predpokladajme, že $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konverguje a $\sum c_n x^n$ konverguje na intervale $(-1, 1)$. Položíme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (-1 < x < 1).$$

Potom platí:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n. \quad (9)$$

Dôkaz. Položíme $s_n = c_0 + \dots + c_n$, pričom $s_{-1} = 0$. Potom platí:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^m c_n x^n &= \sum_{n=0}^m (s_n - s_{n-1})x^n = \sum_{n=0}^m s_n x^n - \sum_{n=0}^m s_{n-1} x^n = \\ &= \sum_{n=0}^m s_n x^n - x \sum_{n=0}^m s_{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^m s_n x^n - x \sum_{n=0}^{m-1} s_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{m-1} s_n x^n + s_m x^m. \end{aligned}$$

Pre $|x| < 1$ nech $m \rightarrow \infty$. Dostávame:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n. \quad (10)$$

Nech $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ a $\varepsilon > 0$ je dané. Zvolíme N také, aby pre každé $n > N$ platilo:

$$|s - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kedže

$$(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 \quad (|x| < 1),$$

z (10) dostávame:

$$\begin{aligned} |f(x) - s| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - s \right| = \left| (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n - s \right| = \\ &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} (1-x) s_n x^n - (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s \cdot x^n \right| = \left| (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - s) x^n \right| = \\ &= (1-x) \sum_{n=0}^N |s_n - s| \cdot |x|^n + (1-x) \sum_{n=N}^{\infty} |s_n - s| \cdot |x|^n \leq (1-x) \sum_{n=0}^N |s_n - s| \cdot |x|^n + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \end{aligned}$$

ak $x > 1 - \delta$ (pre vhodne zvolené $\delta > 0$). Ako zvolit δ ?

Výraz $|s_n - s|$ konverguje, to znamená, že sa dá zhora ohraničiť nejakou kladnou konštantou K . Hľadáme δ tak, aby platilo:

$$(1-x) \sum_{n=0}^N |s_n - s| \cdot |x|^n < \frac{\varepsilon}{2}$$

Z toho dostávame:

$$(1-x) \sum_{n=0}^N (s_n - s) |x|^n \leq (1-x) N \cdot K < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$1-x < \frac{\varepsilon}{2NK}$$

$$1-x < \delta < \frac{\varepsilon}{2NK}$$

Z toho vyplýva (9).

Veta 1.7. (podľa [8])

Majme dvojité postupnosť $\{a_{ij}\}$, $i = 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, \dots$. Predpokladajme, že platí:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| = b_i, i = 1, 2, \dots \quad (11)$$

a nech $\sum b_i$ konverguje. Potom platí:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \quad (12)$$

Dôkaz. Nech E je spočítateľná množina obsahujúca prvky $x_0, x_1, x_2, \dots$ a predpokladajme, že $x_n \rightarrow x_0$ pre $n \rightarrow \infty$. Zavedieme nasledovné označenie:

$$f_i(x_0) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \quad (13)$$

$$f_i(x_n) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \quad (14)$$

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x), x \in E \quad (15)$$

Vieme, že funkcia môže byť spojitá len v bodoch, ktoré sú súčasťou jej definičného oboru. Pre všetky body $x_n \neq x_0$ platí, že sú izolovanými bodmi definičného oboru f_i . Vieme, že $x_n \rightarrow x_0$, čo znamená, že počínajúc nejakým bodom x_t budú všetky nasledujúce body ležať v okolí x_0 . Z rovníc (13), (14) a (11) a z definície spojitosti potom vyplýva, že každá z funkcií f_i je spojitá.

Môžeme povedať, že platí nerovnosť $|f_i(x)| \leq b_i$ pre $x \in E$ (f_i je konečným súčtom koeficientov a_{ij} , b_i je nekonečným súčtom, takže obsahuje najmenej toľko sčítancov ako f_i):

$$|f_i(x_n)| = \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \leq b_i$$

$$|f_i(x_0)| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| = b_i$$

Z toho vyplýva, že (15) konverguje rovnomerne a g je spojitá v bode x_0 . Teda máme:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} &= \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_0) = g(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^n a_{ij} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}. \end{aligned}$$

Posledná rovnosť platí, pretože rad $\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$ konverguje pre každé j (indexov j je konečne veľa).

Veta 1.8. (Taylorova veta) (podľa [8])

Predpokladajme, že rad $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ konverguje pre $|x| < R$. Ak $-R < a < R$, potom funkciu f vieme rozvinúť do mocninového radu v okolí bodu $x = a$. Tento mocninový rad bude konvergovať pre $|x - a| < R - |a|$ a platí:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n \quad (|x - a| < R - |a|) \quad (16)$$

Dôkaz. Použijeme binomickú vetu:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n [(x - a) + a]^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} a^{n-m} (x - a)^m = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} c_n a^{n-m} \right] (x - a)^m. \end{aligned}$$

K poslednej rovnosti: kombinačné číslo $\binom{n}{m}$ je pre $n < m$ definované ako 0, čiže stačí, keď v druhej sume sčítame členy s indexom m a vyšším - tie s nižším indexom jednoducho vypadnú. Potom môžeme použiť vetu 1.7, keďže jej predpoklady sú splnené.

Dostali sme požadovaný rozvoj funkcie do mocninového radu okolo bodu a . Ešte treba ukázať, že nezáleží na tom, cez ktorý index budeme najprv sčítovať, či n alebo m . Podľa vety 1.7 je táto operácia v poriadku, ak rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n |c_n| \binom{n}{m} a^{n-m} (x - a)^m \quad (17)$$

konverguje. Výraz (17) je však ekvivalentný s nasledujúcim:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot (|x - a| + |a|)^n, \quad (18)$$

a (18) konverguje, ak platí podmienka $|x - a| + |a| < R$.

Požadovaný tvar koeficientov v (16) dostávame z (8).

Treba si všimnúť, že rad (16) môže konvergovať aj na širšom intervale ako na intervale danom podmienkou $|x - a| < R - |a|$.

Ak dva mocninové rady konvergujú na intervale $(-R, R)$ k rovnakej funkcii, z (8) vyplýva, že sú identické, teda majú rovnaké koeficienty. Toto tvrdenie hneď dokážeme.

Veta 1.9. (podľa [8])

Predpokladajme, že rady $\sum a_n x^n$ a $\sum b_n x^n$ konvergujú na intervale $S = (-R, R)$.

Označme E množinu všetkých $x \in S$ takých, že platí:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad (19)$$

Ak E má hromadný bod na intervale S , potom $a_n = b_n$ pre $n = 0, 1, 2, \dots$, teda platí pre všetky $x \in S$.

(Bod $p \in E$ nazývame hromadným bodom množiny E , ak každé jeho okolie obsahuje bod $q \neq p$ taký, že $q \in E$.)

Dôkaz. Označme $c_n = a_n - b_n$ a zavedme funkciu f :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (x \in S). \quad (20)$$

Chceme dokázať, že $f(x) = 0$ na množine E .

Množinu všetkých hromadných bodov E na S označme A , množina B nech pozostáva zo všetkých ostatných bodov S .

Množina B je otvorená. Zdôvodníme to pomocou definície hromadného bodu. Otvorená množina má tú vlastnosť, že každý jej bod je vnútorný - teda pre každý bod existuje okolie, ktoré celé patrí do tejto množiny. Nech existuje bod x_0 taký, že $x_0 \in B$. Z toho, ako sme určili množinu B , vyplýva, že $f(x_0) \neq 0$. Potom existuje okolie bodu x_0 , kde $f(x) \neq 0$ pre všetky body x z tohto okolia - to vyplýva zo spojitosti funkcie f . Množina B je teda otvorená.

Predpokladajme, že aj A je otvorená. Potom A a B sú disjunktné otvorené množiny, z čoho vyplýva, že sú aj oddelené (množiny sú oddelené práve vtedy, ak platí: $\bar{A} \cap B = \emptyset = A \cap \bar{B}$). Keďže $S = A \cup B$, jedna z množín A , B musí byť prázdna. Podľa predpokladov vety je A neprázdna. Z toho vyplýva, že B je prázdna a teda $A = S$. Funkcia f je spojitá na S , čo znamená, že $A \subset E$. Teda $E = S$ a zo vzťahu (8) dostávame, že nutne platí $c_n = 0$ pre všetky $n = 0, 1, 2, \dots$, čo sme chceli dokázať.

Dôkaz však ešte nie je úplne dokončený, vyššie sme predpokladali, že množina A je otvorená, ale zatiaľ sme to nepotvrdili. Ak $x_0 \in A$, z vety 1.8 máme:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x - x_0)^n \quad (|x - x_0| < R - |x_0|). \quad (21)$$

Tvrdíme, že $d_n = 0$ pre každé n . Použijeme dôkaz sporom: nech k je najmenšie nezáporné celé číslo, pre ktoré $d_k \neq 0$. Potom platí:

$$f(x) = (x - x_0)^k g(x) \quad (|x - x_0| < R - |x_0|), \quad (22)$$

kde

$$g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} d_{k+m}(x - x_0)^m. \quad (23)$$

Keďže funkcia g je spojitá v bode x_0 a $g(x_0) = d_k \neq 0$, existuje také $\delta > 0$, že $g(x) \neq 0$, ak $|x - x_0| < \delta$. Môžeme to tvrdiť na základe vzťahu (22): $f(x) \neq 0$ za podmienky $0 < |x - x_0| < \delta$. Týmto sa však dostávame do sporu s tvrdením, že x_0 je hromadný bod množiny E .

Dokázali sme, že $d_n = 0$ pre všetky n . To znamená, že $f(x) = 0$ v okolí bodu x_0 (resp. pre všetky x , ktoré spĺňajú (21)). Z toho vyplýva, že množina A je otvorená a tým je dôkaz ukončený.

2 Exponenciálna a logaritmická funkcia

Na množine komplexných čísel definujeme

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (24)$$

Vypočítame polomer konvergenzie tohto radu pomocou Cauchy-Hadamardovej vety (podľa [4, str. 19], [7, str. 67]):

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left|\frac{z^n}{n!}\right|} = \left|\frac{z}{\sqrt[n]{n!}}\right| \rightarrow 0 \text{ pre dostatočne veľké } n$$

Podľa tvrdenia vety môžeme povedať, že polomer konvergenzie radu je $R = \infty$.

Tvrdenie o súčine radov hovorí, že súčin dvoch konvergentných radov konverguje, ak aspoň jeden z pôvodných radov (teda činiteľov) konverguje absolútne (podľa [4]).

Vynásobíme dva rady $E(z)$, $E(w)$, ktoré spĺňajú (24):

$$\begin{aligned} E(z)E(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!}, \end{aligned}$$

z čoho dostávame vzťah, ktorý platí pre všetky komplexné z , w :

$$E(z+w) = E(z)E(w) \quad (25)$$

Ak aplikujeme predchádzajúci vzťah na dvojicu komplexných čísel z , $-z$, dostávame:

$$E(z)E(-z) = E(z-z) = E(0) = 1 \quad (26)$$

Tvrdenie 2.1. (podľa [8])

Z (24) a (26) vyplývajú viaceré vlastnosti:

- (24): $\forall x > 0 : E(x) > 0$; (26): $E(x) > 0$ pre všetky reálne x
- (24): ak $x \rightarrow +\infty$, potom aj $E(x) \rightarrow +\infty$; (26): ak $x \rightarrow -\infty$, potom $E(x) \rightarrow 0$ pre všetky reálne x
- (24): z $0 < x < y$ vyplýva $E(x) < E(y)$; (26): $E(-y) < E(-x)$, teda E je rastúca funkcia na celej množine $\mathbb{R}$

Dôsledkom vzťahu (25) sú nasledovné rovnosti:

$$E'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(z+h) - E(z)}{h} = E(z) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(h) - 1}{h} = E(z) \quad (27)$$

Posledná rovnosť vyplýva priamo z (24).

Ak vo vzťahu (25) nepoužijeme iba dve komplexné čísla, ale namiesto z, w zoberieme $z_1, z_2, \dots, z_n$, dostaneme:

$$E(z_1 + \dots + z_n) = E(z_1) \cdot \dots \cdot E(z_n) \quad (28)$$

Zvoľme $z_1 = \dots = z_n = 1$. Vieme, že $E(1) = e$. Vďaka predchádzajúcemu vzťahu môžeme tvrdiť, že platí

$$E(n) = e^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (29)$$

Ak $p = \frac{n}{m}$, kde n, m sú kladné celé čísla, potom platí:

$$[E(p)]^m = E(mp) = E(n) = e^n, \quad (30)$$

teda

$$E(p) = e^p \quad (p > 0, p \in \mathbb{Q}). \quad (31)$$

Zo vzťahu (26) vyplýva, že $E(-p) = e^{-p}$. Môžeme teda tvrdiť, že (31) platí pre každé racionálne číslo p .

Definujme

$$x^y = \sup_{p \in \mathbb{Q}} x^p \quad \forall y \in \mathbb{R}, x > 1, \quad (32)$$

kde p je racionálne číslo ostro menšie ako y . Potom z postupnosti

$$\forall x \in \mathbb{R} : e^x = \sup_{p \in \mathbb{Q}} e^p \quad (p < x, p \in \mathbb{Q}), \quad (33)$$

spojitosti a monotónnosti funkcie E spolu s (31) vyplýva fakt, že

$$E(x) = e^x \quad (34)$$

pre všetky reálne x . Z (34) vidíme, prečo sa E nazýva exponenciálna funkcia.

V matematike sa pre funkciu e^x používa aj ekvivalentný zápis $\exp(x)$, najmä vtedy, keď je x zložitejšia funkcia.

Vrátime sa k pôvodnému označeniu e^x a pozrieme sa, čo sme zatiaľ dokázali.

Veta 2.2. (podľa [8])

Nech funkcia e^x je definovaná na $\mathbb{R}$ vzťahmi (24) a (34). Potom platí:

- e^x je spojitá a diferencovateľná pre všetky $x \in \mathbb{R}$
- $(e^x)' = e^x$
- $e^x > 0$ pre všetky x
- e^x je rýdzo rastúca funkcia premennej x
- $e^{x+y} = e^x e^y$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x} = 0$ pre každé n - túto vlastnosť interpretujeme tak, že e^x sa pre $x \rightarrow \infty$ blíži k nekonečnu rýchlejšie ako hociktorá mocnina x

Dôkaz. Všetky vlastnosti okrem poslednej sme už dokázali. Zo vzťahu (24) máme pre kladné x :

$$e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Po drobných úpravách dostávame výraz

$$x^n e^{-x} < \frac{(n+1)!}{x},$$

z ktorého už vyplýva posledná vlastnosť, teda veta je dokázaná.

Funkcia E je rýdzo rastúca a diferencovateľná na $\mathbb{R}$, existuje k nej teda inverzná funkcia, označme ju L . Funkcia L bude tiež rýdzo rastúca a diferencovateľná. Jej definičný obor bude $E(\mathbb{R})$, teda množina všetkých kladných čísel. Môžeme ju definovať dvoma spôsobmi:

$$E(L(y)) = y \quad (y > 0), \quad (35)$$

alebo

$$L(E(x)) = x \quad (x \in \mathbb{R}). \quad (36)$$

Po zderivovaní (36) dostaneme: $L'(E(x)) \cdot E(x) = 1$. Ak označíme $y = E(x)$, dostávame vzťah

$$L'(y) = \frac{1}{y} \quad (y > 0). \quad (37)$$

Keď položíme v rovnici (36) $x = 0$, vidíme, že $L(1) = 0$. Potom z (37) vyplýva:

$$L(y) = \int_1^y \frac{dx}{x} \quad (38)$$

Vzťah (38) je často považovaný za základný kameň teórie exponenciálnej a logaritmickkej funkcie.

Označme $u = E(x)$, $v = E(y)$. Dosadením do rovnice (25) dostávame vzťah

$$L(uv) = L(E(x) \cdot E(y)) = L(E(x + y)) = x + y,$$

teda platí

$$L(uv) = L(u) + L(v). \quad (39)$$

Získali sme tak jednu zo známych vlastností logaritmickkej funkcie, ktorá je veľmi praktická hlavne pri ručnom počítaní. (Funkcia $L(x)$ je vo všeobecnosti ekvivalentná funkcii $\log x$).

Na základe vyššie uvedených vlastností a pomocou 2.2 môžeme konštatovať:

- $\ln x \rightarrow +\infty$ pre $x \rightarrow \infty$,
- $\ln x \rightarrow -\infty$ pre $x \rightarrow 0$.

Tvrdenie 2.3. (Vlastnosti logaritmu)(podľa [8])

Platí:

$$x^n = E(nL(x)), \quad (40)$$

nesmieme však zabudnúť na podmienky: $x > 0$ a $n \in \mathbb{N}$. Nech m je prirodzené číslo, analogicky na základe predošlého vzťahu platí:

$$x^{\frac{1}{m}} = E\left(\frac{1}{m}L(x)\right). \quad (41)$$

Dôkaz. (40) dokážeme veľmi jednoducho, stačí, ak vynásobíme n rovnakých členov za sebou:

$$E(nL(x)) = E(L(x)) \cdot E(L(x)) \cdot \dots \cdot E(L(x)) = x^n$$

Na základe predchádzajúceho vzťahu môžeme dokázať aj (41):

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{m}L(x)\right)^m &= E\left(\frac{1}{m}L(x) \cdot \dots \cdot E\left(\frac{1}{m}L(x)\right)\right) = E\left(\frac{1}{m}L(x) + \dots + \frac{1}{m}L(x)\right) = \\ &= E(L(x)) = x, \end{aligned}$$

z toho vyplýva:

$$\left(E\left(\frac{1}{m}L(x)\right)\right)^m = x,$$

$$E\left(\frac{1}{m}L(x)\right) = x^{\frac{1}{m}}.$$

Tvrdenie je dokázané.

Nech $\frac{m}{n} = \alpha \in \mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Spojením rovníc (40) a (41) dostávame ďalšiu známú rovnosť, ktorá platí pre ľubovoľné α .

$$\begin{aligned} x^{\frac{m}{n}} &= E\left(m\left(L\left(x^{\frac{1}{n}}\right)\right)\right) = E\left(m\left(L\left(E\left(\frac{1}{n}L(x)\right)\right)\right)\right) = E\left(m \cdot \frac{1}{n}L(x)\right) = \\ &= E\left(\frac{m}{n}L(x)\right) \end{aligned}$$

$$x^\alpha = E(\alpha L(x)) = e^{\alpha \ln x} \quad (42)$$

Definujme podľa (42) x^α pre každé reálne α a $x > 0$. Vzhľadom na to, že funkcie E aj L sú spojité a monotónne, môžeme povedať, že táto definícia je ekvivalentná s tou, ktorú sme zaviedli pôvodne.

Po zderivovaní (42) dostávame:

$$\forall x > 0 : (x^\alpha)' = E(\alpha L(x)) \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1} \quad (43)$$

Vzťah (43) sme zatiaľ používali iba pre celé čísla α . Problém by mohol nastať napríklad v prípade, že by sme (43) chceli dokázať priamo z definície derivácie, funkcia x^α by bola definovaná pomocou (32) a α by bolo iracionálne číslo.

Známy vzorec pre integrovanie funkcie x^α dostaneme z (43) pre $\alpha \neq 1$ a z (37) pre $\alpha = 1$. Ukážeme ešte jednu vlastnosť funkcie logaritmus, ktorá bude platiť pre každé $\alpha > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\alpha} \cdot \ln x = 0 \quad (44)$$

Táto rovnosť nám hovorí, že logaritmus sa pre $x \rightarrow \infty$ blíži k nekonečnu pomalšie ako hociká kladná mocnina x .

Nech $0 < \varepsilon < \alpha$ a $x > 1$. Potom platí:

$$x^{-\alpha} \ln x = x^{-\alpha} \int_1^x t^{-1} dt < x^{-\alpha} \int_1^x t^{\varepsilon-1} dt = x^{-\alpha} \cdot \frac{x^\varepsilon - 1}{\varepsilon} < \frac{x^{\varepsilon-\alpha}}{\varepsilon}$$

Priamo z toho už vyplýva (44). Ako alternatívny dôkaz môžeme použiť vetu 2.2, keď by sme pomocou poslednej vlastnosti derivovali (44).

3 Trigonometrická funkcia

Pre komplexné x definujeme:

$$C(x) = \frac{1}{2} [E(ix) + E(-ix)], \quad S(x) = \frac{1}{2i} [E(ix) - E(-ix)]. \quad (45)$$

Ukážeme, že funkcie $C(x)$ a $S(x)$ sú ekvivalentné s funkciami $\cos x$ a $\sin x$, aj keď tieto funkcie sú väčšinou definované geometricky pomocou strán v trojuholníku. Zo vzťahu (24) vieme, že $E(\bar{z}) = \overline{E(z)}$. Okrem toho, zo vzťahu (45) vyplýva, že funkcie $C(x)$ a $S(x)$ dávajú pre reálne x reálne funkčné hodnoty, čo sa dá pomerne jednoducho ukázať.

Každé komplexné číslo z sa dá napísať v tvare $z = a + bi$, komplexne združené číslo bude potom $\bar{z} = a - bi$, kde a, b sú reálne čísla. V našom prípade máme $ix = a + bi$, $-ix = a - bi$.

$$C(x) = \frac{1}{2} (E(ix) + E(-ix)) = \frac{1}{2} (E(ix) + \overline{E(ix)}) = \frac{1}{2} (a + bi + a - bi) = a$$

Podobne pre funkciu $S(x)$:

$$S(x) = \frac{1}{2i} (E(ix) - E(-ix)) = \frac{1}{2i} (E(ix) - \overline{E(ix)}) = \frac{1}{2i} (a + bi - (a - bi)) = b$$

Keďže a, b sú reálne čísla, potom nutne platí, že hodnoty $C(x)$ a $S(x)$ budú reálne pre reálne x .

Taktiež platí:

$$E(ix) = C(x) + iS(x). \quad (46)$$

Teda $C(x)$ a $S(x)$ tvorí reálnu, resp. imaginárnu časť funkcie $E(ix)$ pre $x \in \mathbb{R}$.

Z (26) máme:

$$|E(ix)|^2 = E(ix)\overline{E(ix)} = E(ix)E(\overline{ix}) = E(ix)E(-ix) = 1,$$

$ix = \overline{ix}$ práve pre reálne x . Teda

$$|E(ix)| = 1 \quad x \in \mathbb{R}. \quad (47)$$

Zo vzťahu (45) vidno, že $C(0) = 1$, $S(0) = 0$ a na základe (27) platí:

$$C'(x) = -S(x), \quad S'(x) = C(x). \quad (48)$$

Platnosť predchádzajúcich dvoch vzťahov sa dá jednoducho ukázať.

$$\begin{aligned} C'(x) &= \frac{1}{2} (E'(ix) \cdot i - i \cdot E'(-ix)) = \frac{i}{2} (E(ix) - E(-ix)) = \frac{-1}{2i} (E(ix) - E(-ix)) = \\ &= -S(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S'(x) &= \frac{1}{2i} (i \cdot E'(ix) + i \cdot E'(-ix)) = \frac{1}{2i} (i \cdot E(ix) + i \cdot E(-ix)) = \\ &= \frac{1}{2} (E(ix) + E(-ix)) = C(x) \end{aligned}$$

Tvrdenie 3.1. (podľa [8])

Existujú také kladné čísla x , pre ktoré $C(x) = 0$.

Dôkaz. Použijeme dôkaz sporom - predpokladajme, že také číslo neexistuje. Keďže $C(0) = 1$, z toho vyplýva, že $C(x) > 0$ pre všetky $x > 0$. Potom zo spojitosti (48) vyplýva, že $S'(x) > 0$, teda funkcia S je ostro rastúca. Okrem toho, keďže $S(0) = 0$, pre $x > 0$ musí platiť, že $S(x) > 0$. Zvoľme čísla x, y tak, aby platilo $0 < x < y$. Potom:

$$S(x)(y - x) < \int_x^y S(t)dt = \int_x^y -C'(t)dt = C(x) - C(y) \leq 2. \quad (49)$$

Posledná nerovnosť vyplýva z (47) a (46) a z faktu, že $|C(t)| \leq 1$ pre ľubovoľné t . Keďže $S(x) > 0$, vzťah (49) nemôže platiť pre veľké hodnoty y . Dostávame sa k sporu.

Označme x_0 najmenšie kladné číslo, pre ktoré $C(x_0) = 0$. Na základe tvrdenia dokázaného vyššie a faktu, že $C(0) \neq 0$, môžeme tvrdiť, že také číslo existuje. Pomocou x_0 definujeme číslo π :

$$\pi := 2x_0 \quad (50)$$

Potom nutne $C(\frac{\pi}{2}) = 0$ a zo (47) vyplýva, že $S(\frac{\pi}{2}) = \pm 1$. Keďže $S'(x) = C(x) > 0$ na intervale $(0, \frac{\pi}{2})$, to znamená, že S je na tomto intervale rastúca. Potom $S(\frac{\pi}{2}) = 1$. Z toho vyplýva

$$\begin{aligned} C\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0 \\ 0 &= \frac{1}{2} \left(E\left(i\frac{\pi}{2}\right) + E\left(-i\frac{\pi}{2}\right) \right) \Rightarrow -E\left(-i\frac{\pi}{2}\right) = E\left(i\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Podobne pre funkciu S :

$$\begin{aligned} S\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1 \\ 1 &= \frac{1}{2i} \left(E\left(i\frac{\pi}{2}\right) - E\left(-i\frac{\pi}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

$$2i = \left(E\left(i\frac{\pi}{2}\right) - E\left(-i\frac{\pi}{2}\right) \right)$$

Do posledného vzťahu, ktorý vznikol po rozpísaní $S(\frac{\pi}{2})$, dosadíme výraz, ktorý vznikol pri práci s výrazom $C(\frac{\pi}{2})$:

$$2i = \left(E\left(i\frac{\pi}{2}\right) + E\left(i\frac{\pi}{2}\right) \right) = 2E\left(i\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow E\left(i\frac{\pi}{2}\right) = i$$

Teda dostávame:

$$E\left(i\frac{\pi}{2}\right) = i,$$

a taktiež

$$E(\pi i) = -1, \quad E(2\pi i) = 1; \quad (51)$$

teda

$$E(z + 2\pi i) = E(z) \quad (z \in \mathbb{C}). \quad (52)$$

Veta 3.2. (podľa [8])

Platí:

1. Funkcia E je periodická s periódou $2\pi i$.
2. Funkcie C a S sú periodické s periódou 2π .
3. Ak $0 < t < 2\pi$, potom $E(it) \neq 1$.
4. Ak z je také komplexné číslo, že $|z| = 1$, na intervale $[0, 2\pi)$ existuje práve jedno t také, že $E(it) = z$.

Dôkaz. Podľa (52) platí vlastnosť 1. Vlastnosť 2 vyplýva z 1 a (45). Uvedomme si, že ak $E(2\pi i) = 1$, potom aj $E(-2\pi i) = 1$ - po vynásobení $E(2\pi i)$ a $E(-2\pi i)$ dostaneme výsledok $E(0) = 1$. Čiže platí $E(2\pi i) = E(-2\pi i) = 1$. Z toho vyplýva:

$$C(x) = \frac{1}{2} [E(ix) + E(-ix)]$$

$$\begin{aligned} C(x + 2\pi) &= \frac{1}{2} [E(i(x + 2\pi)) + E(-i(x + 2\pi))] = \frac{1}{2} [E(ix + 2\pi i) + E(-ix - 2\pi i)] = \\ &= \frac{1}{2} [E(ix) \cdot E(2\pi i) + E(-ix) \cdot E(-2\pi i)] = \frac{1}{2} [E(ix) + E(-ix)] = C(x) \end{aligned}$$

Dokázali sme, že funkcia $C(x)$ je periodická s periódou 2π . Analogický postup použijeme aj pri dôkaze pre funkciu $S(x)$.

$$S(x) = \frac{1}{2i} [E(ix) - E(-ix)]$$

$$\begin{aligned} S(x + 2\pi) &= \frac{1}{2i} [E(i(x + 2\pi)) - E(-i(x + 2\pi))] = \frac{1}{2i} [E(ix + 2\pi i) - E(-ix - 2\pi i)] = \\ &= \frac{1}{2i} [E(ix) \cdot E(2\pi i) - E(-ix) \cdot E(-2\pi i)] = \frac{1}{2i} [E(ix) - E(-ix)] = S(x) \end{aligned}$$

Týmto sme dokázali vlastnosť 2.

Nech $0 < t < \frac{\pi}{2}$, potom $4t \in (0, 2\pi)$ a $E(it) = x + iy$, kde $x, y \in \mathbb{R}$. Vlastnosť 3 dokážeme sporom - budeme predpokladať, že $E(4it) = 1$. Na základe predchádzajúcich vzťahov môžeme tvrdiť, že $0 < x < 1$, resp. $0 < y < 1$. Všimnime si nasledujúci výraz:

$$E(4it) = (x + iy)^4 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 4ixy(x^2 - y^2)$$

Ak je $E(4it)$ reálne číslo, nutne musí platiť, že $x^2 - y^2 = 0$. Podľa (47) však platí, že $x^2 + y^2 = 1$, z toho vyplývajú rovnosti $x^2 = y^2 = \frac{1}{2}$. Dosadíme:

$$E(4it) = (x + iy)^4 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^2 = \frac{1}{4} - 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -1$$

Dokázali sme 3.

Ak $0 \leq t_1 < t_2 < 2\pi$, potom podľa 3 platí:

$$E(it_2)[E(it_1)]^{-1} = E(it_2 - it_1) \neq 1$$

Z toho vyplýva jednoznačnosť v časti 4. Potrebujeme teda dokázať ešte existenciu.

Zvoľme také z , že $|z| = 1$. Môžeme napísať $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Najprv predpokladajme, že $x \geq 0$ a $y \geq 0$. Funkcia C je na intervale $[0, \frac{\pi}{2}]$ klesajúca a dosahuje hodnoty od 1 po 0. Preto existuje $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ také, že $C(t) = x$. Keďže $C^2 + S^2 = 1$ a $S \geq 0$ na $[0, \frac{\pi}{2}]$, znamená to, že $z = E(it)$.

Ak $x < 0$ a $y \geq 0$, predchádzajúce podmienky sú splnené pre $-iz$. Vieme, že existuje také $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, pre ktoré $-iz = E(it)$ a keďže $i = E\left(\frac{\pi i}{2}\right)$, dostávame vzťah:

$$z = E\left(i\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Ostáva nám ešte prípad $y < 0$. Z predchádzajúcich prípadov vieme, že existuje $t \in [0, \pi]$ také, že $-z = E(it)$. Teda platí: $z = -E(it) = E(i(t + \pi))$. Tým sme dokázali 4 a teda je aj celý dôkaz ukončený.

Definujeme krivku γ :

$$\gamma(t) = E(it) \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \quad (53)$$

Z vlastnosti 4, vzťahu (47) a definície (53) vyplýva, že γ je jednoduchá uzavretá krivka, ktorej rozpätie je jednotková kružnica v rovine. Keďže $\gamma'(t) = iE(it)$, dĺžku krivky γ vypočítame podľa nasledujúceho vzťahu:

$$\int_0^{2\pi} |\gamma'(t)| dt = 2\pi.$$

Takýto výsledok sa dal očakávať - 2π je obvod kruhu s polomerom 1. Môžeme teda povedať, že číslo π definované vzťahom (50) má presne ten geometrický význam, ktorý poznáme z praxe.

Podobne, bod $\gamma(t)$ určuje kružnicový oblúk dĺžky t_0 , ak t postupne narastá od 0 do t_0 . Vezmime si trojuholník s vrcholmi

$$z_1 = 0, \quad z_2 = \gamma(t_0), \quad z_3 = C(t_0).$$

Môžeme si všimnúť, že funkcie $C(t)$ a $S(t)$ sú naozaj identické s funkciami $\cos t$, resp. $\sin t$, ak sú funkcie $\sin$ a $\cos$ definované ako pomer istých strán v pravouhlom trojuholníku.

Rozvoj funkcií $\cos x$ a $\sin x$ do radov je známy a často sa používa v praxi. Nie je ťažké získať tieto rady priamo z definície.

Na to, aby sme získali rozvoj funkcií $\cos x$ a $\sin x$, budeme určite potrebovať vidieť, ako vyzerajú funkcie $E(ix)$, $E(-ix)$:

$$E(ix) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{i^2 x^2}{2!} + \frac{i^3 x^3}{3!} + \frac{i^4 x^4}{4!} + \dots = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$E(-ix) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ix)^n}{n!} = 1 + \frac{-ix}{1!} + \frac{i^2 x^2}{2!} + \frac{-i^3 x^3}{3!} + \frac{i^4 x^4}{4!} + \dots = 1 - \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Dosadíme do definície:

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{1}{2} [E(ix) + E(-ix)] = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + 1 - \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(2 - \frac{2x^2}{2!} + \frac{2x^4}{4!} - \dots \right) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2i} [E(ix) - E(-ix)] = \\ &= \frac{1}{2i} \left(1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots - \left(1 - \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2i} \left(0 + \frac{2ix}{1!} - 0 - \frac{2ix^3}{3!} + 0 - \dots \right) = \frac{1}{2i} \left(2ix - \frac{2ix^3}{3!} + \dots \right) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

Základné vlastnosti trigonometrických funkcií sme odvodili zo vzťahov (45) a (24), ale vôbec sme sa nezaoberali pojmom uhol. Z toho vyplýva, že k funkciám sínus a kosínus nemusíme nutne použiť práve geometrický prístup.

4 Algebraická úplnosť komplexného poľa

V poslednej teoretickej časti práce sa budeme zaoberať faktom, že komplexné pole je algebraicky úplné - znamená to, že každý nekonštantný polynóm s komplexnými koeficientami má aspoň jeden komplexný koreň (toto tvrdenie poznáme aj pod názvom základná veta algebry, viac napríklad v publikácii [6, str. 221]).

Poľom nazývame množinu, na ktorej sú definované operácie sčítania a násobenia, ku každému nenulovému prvku existuje inverzný a na tejto množine platí asociatívny, komutatívny a distributívny zákon.

Komplexné pole (označme ho $\mathbb{C}$) je navyše determinované nasledovnými vlastnosťami (podľa [6]): obsahuje množinu reálnych čísel ($\mathbb{R}$) ako podpole, obsahuje prvok i , pre ktorý platí $i^2 = -1$ a je minimálne spomedzi všetkých polí s týmito vlastnosťami (čiže ak máme ľubovoľné pole P s predchádzajúcimi dvoma vlastnosťami, potom nutne $P = \mathbb{C}$).

Predtým, ako však začneme dokazovať samotný fakt algebraickej úplnosti komplexného poľa, uvedieme jednu vetu, ktorú budeme v dôkaze potrebovať.

Veta 4.1. (podľa [8, kapitola 4, str. 89])

Predpokladajme, že f je spojitá funkcia na kompaktnom metrickom priestore X . Označme:

$$M = \sup_{p \in X} f(p), \quad m = \inf_{p \in X} f(p).$$

Potom existujú také body $p, q \in X$ také, že $f(p) = M$ a $f(q) = m$.

Ekvivalentná formulácia vety by mohla znieť napríklad takto: Existujú body $p, q \in X$ také, že $f(q) \leq f(x) \leq f(p)$ pre všetky $x \in X$, teda f dosahuje svoje maximum (v bode p) a minimum (v bode q).

Veta vlastne hovorí, že M je najlepšia horná hranica pre všetky čísla $f(p)$ pre $p \in X$ a m je najlepšia dolná hranica pre tú istú množinu čísel.

Veta 4.2. (podľa [8])

Nech $a_0, a_1, \dots, a_n$ sú komplexné čísla, $n \geq 1$ a $a_n \neq 0$. Uvažujme polynóm:

$$P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k.$$

Potom existuje komplexné číslo z , pre ktoré platí: $P(z) = 0$.

Dôkaz. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $a_n = 1$. Ak by to neplatilo, v prípade potreby stačí polynóm číslom a_n vydeliť (dostaneme tak normovaný polynóm). Platí, že ak vynásobíme polynóm nenulovým číslom, jeho korene sa nezmenia (podľa [6, str. 221]). Zavedme označenie:

$$\mu = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|, \quad (54)$$

Nech $|z| = R$. Potom platí:

$$|P(z)| \geq R^n [1 - |a_{n-1}|R^{-1} - \dots - |a_0|R^{-n}] \quad (55)$$

Ľahko vidno, že pravá strana (55) sa blíži k nekonečnu pre $R \rightarrow \infty$. Teda existuje také R_0 , že $|P(z)| > \mu$ pre $|z| > R_0$. Funkcia $|P|$ je spojitá na kruhu so stredom v bode 0 a polomerom R_0 . Na základe vety 4.1 môžeme tvrdiť, že existuje z_0 , pre ktoré platí, že $|P(z_0)| = \mu$.

Aby sme dokázali, že $P(z)$ má komplexný koreň, stačí, ak dokážeme, že $\mu = 0$.

Tvrdenie dokážeme sporom. Ak $\mu \neq 0$, definujme $Q(z) = \frac{P(z + z_0)}{P(z_0)}$. Potom Q je nekonštantný polynóm, $Q(0) = 1$ a $|Q(z)| \geq 1$ pre všetky z . Existuje kladné celé číslo k ($1 \leq k \leq n$) tak, že platí:

$$Q(z) = 1 + b_k z^k + \dots + b_n z^n \quad (b_k \neq 0). \quad (56)$$

Podľa poslednej vlastnosti z vety 3.2 existuje také reálne číslo θ , že platí:

$$e^{ik\theta} b_k = -|b_k|. \quad (57)$$

Ak zvolíme $r > 0$ a $r^k |b_k| < 1$, z (57) vyplýva:

$$|1 + b_k r^k e^{ik\theta}| = 1 - r^k |b_k|,$$

teda platí

$$|Q(re^{i\theta})| \leq 1 - r^k \{|b_k| - r|b_{k+1}| - \dots - r^{n-k}|b_n|\}.$$

Pre dostatočne malé hodnoty r je výraz v zátvorke kladný, čo si odporuje s nerovnosťou $|Q(re^{i\theta})| < 1$.

Z toho vyplýva, že $\mu = 0$ a $P(z_0) = 0$.

5 Riešené príklady

Ako sme už spomínali v úvode, mocninové rady majú veľa rôznych využití. V tejto kapitole sa zameriame na dôkaz existencie derivácií, výpočet limit a sčítavanie nekonečných radov. Vyriešime vybrané príklady z 8. kapitoly publikácie [8].

Príklad 5.1. *Definujme:*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Ukážte, že f má derivácie všetkých rádov v bode $x = 0$ a $f^{(n)}(0) = 0$ pre $n = 1, 2, 3, \dots$

Riešenie:

Najprv treba overiť spojitosť funkcie. Ľahko vidíme, že $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$, čo sa rovná funkčnej hodnote v bode 0.

Existenciu derivácií všetkých rádov dokážeme pomocou matematickej indukcie. Všimnime si, že jednoduchšie bude použiť iný zápis funkcie, ktorý je ekvivalentný zápisu zo zadania: $f(x) = e^{-x^{-2}}$

Najprv budeme ručne derivovať a na základe odpozorovaného tvaru derivácií vyslovíme indukčný predpoklad.

$$f'(x) = e^{-x^{-2}} \cdot 2x^{-3} = f(x) \cdot P_1(x^{-1})$$

$$f''(x) = e^{-x^{-2}} \cdot (-6)x^{-4} + (2x^{-3})^2 \cdot e^{-x^{-2}} = f(x) \cdot P_2(x^{-1})$$

(P_1, P_2 sú polynómy, no ich explicitný tvar nie je pre nás v tejto chvíli dôležitý.)

Možno teda predpokladať:

$$f^{(n)}(x) = e^{-x^{-2}} \cdot P_n(x^{-1}), \quad (58)$$

kde P_n je nejaký polynóm.

Vidíme, že pre $n = 1$ rovnosť platí. Pomocou matematickej indukcie ukážeme, že ak rovnosť platí pre $n \in \mathbb{N}$, potom: $f^{(n+1)}(x) = e^{-x^{-2}} \cdot P_{n+1}(x^{-1})$.

Počítajme:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)}(x))' = \left(e^{-x^{-2}} (P_n(x^{-1})) \right)' = \\ &= -e^{-x^{-2}} \cdot 2x^{-3} \cdot P_n(x^{-1}) + e^{-x^{-2}} \cdot (P_n(x^{-1}))' \end{aligned}$$

Teraz označme: $Q_m(x) = P_m(x^{-1}) = a_0 + a_1x^{-1} + \dots + a_mx^{-m}$

Potom platí: $Q'_m(x) = -a_1x^{-2} + \dots + (-m) \cdot a_mx^{-m-1} = P_{m_1}(x^{-1})$

a teda môžeme tvrdiť:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= -e^{-x^{-2}} \cdot 2x^{-3} \cdot P_mx^{-1} + e^{-x^{-2}} \cdot P_{m_1}(x^{-1}) = \\ &= e^{-x^{-2}} (-2x^{-3}P_m(x^{-1}) + P_{m_1}(x^{-1})) = e^{-x^{-2}} \cdot P_{m^*}(x^{-1}), \end{aligned}$$

kde P_{m^*} je nejaký polynóm.

Teda sme dokázali (58).

Všimnime si, že z (58) vyplýva: $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-x^{-2}} \cdot P_m(x^{-1}) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{P_m(t)}{e^{t^2}} = 0$

$\forall n \in \mathbb{N}$, ak položíme $t = x^{-1}$.

Posledná rovnosť vyplýva z toho, že platí:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^n}{e^{t^2}} = 0$$

a teda aj

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t^n}{e^{t^2}} = 0.$$

Na základe vyššie uvedeného teda platí, že $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) = 0$. Teraz z definície spojitosti a pomocou matematickej indukcie dokážeme, že ak $f^{(n)}(0) = 0$, tak aj $f^{(n+1)}(0) = 0$.

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f^{(n+1)}(x) = 0$$

Predposledná rovnosť vznikla vďaka použitiu L'Hospitalovho pravidla.

V príklade sme pracovali s funkciou, ktorá nie je analytická - síce má derivácie všetkých rádov, ale jej Taylorov rozvoj v okolí bodu 0 dá nulovú funkciu.

Nasledujúci príklad sa venuje sčítavaniu nekonečných radov.

Príklad 5.2. Nech a_{ij} je zložka v i -tom riadku a j -tom stĺpci:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -1 & 0 & \dots \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

a platí:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & i < j \\ -1 & i = j \\ 2^{j-i} & i > j \end{cases}$$

Dokážte:

$$(a) \sum_i \sum_j a_{ij} = -2$$

$$(b) \sum_j \sum_i a_{ij} = 0$$

Riešenie:

$$(a) \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \frac{1}{2^{i-1}} + \frac{1}{2^{i-2}} + \dots + \frac{1}{2^1} + (-1) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$$

$$\sum_i \sum_j a_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} -\left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{-1}{1 - \frac{1}{2}} = -2$$

(b) Sčítavame najprv prvky v stĺpcoch. Vyberme si jeden ľubovoľný stĺpec (teda zvolíme j pevné):

$$\sum_i a_{ij} = -1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right) = -1 + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 0$$

Zistili sme, že súčet prvkov v každom stĺpci je 0. Teda platí:

$$\sum_j \left(\sum_i a_{ij}\right) = \sum_j 0 = 0$$

Ďalšie dva príklady sa venujú výpočtu limít rôznych funkcií. Zistili sme, že by sa dali jednoducho vyriešiť použitím L'Hospitalovho pravidla, ale to nie je naším zámerom.

Príklad 5.3. Dokážte platnosť nasledujúcich vzťahov:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b^x - 1}{x} = \ln b \quad (b > 0),$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1,$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e,$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Riešenie:

$$(a) b^x = E(xL(b)) = e^{x \ln b}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{b^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln b} - 1}{x} \cdot \frac{\ln b}{\ln b} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln b \cdot e^{x \ln b} - \ln b}{x \cdot \ln b}$$

Aplikujeme na posledný zlomok L'Hospitalovo pravidlo a dostávame:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln b \cdot e^{x \ln b} \cdot \ln b}{\ln b} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln b \cdot e^{x \ln b} = \ln b$$

(b) Použijeme substitúciu:

$$\ln(1+x) = t \Rightarrow x = e^t - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{e^t - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{E(t) - 1}$$

Opäť aplikujeme L'Hospitalovo pravidlo. Dostávame:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{E(t)} = 1$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(\frac{1}{x} \ln(1+x)\right)$$

Podľa (b): výraz $\left(\frac{1}{x} \ln(1+x)\right)$ sa blíži k číslu 1, teda $\lim_{x \rightarrow 0} e^1 = e$

(d) Pôvodný výraz prepíšeme do ekvivalentného tvaru:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x$$

Podľa (c) sa výraz v hranatej zátvorke blíži k číslu e . Teda limita pôvodnej funkcie bude e^x .

V nasledujúcom príklade budeme potrebovať použiť rozvoj funkcií $\operatorname{tg} x$ a $\ln(1+x)$ do Maclaurinovho radu. Tvary mocninových radov nie je ťažké získať priamo z Taylorovej vety (1.8), ak položíme $a = 0$:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} \cdot x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \dots$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \operatorname{tg}(0) + \operatorname{tg}'(0) \cdot x + \frac{\operatorname{tg}''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{\operatorname{tg}^{(3)}(0)}{3!} \cdot x^3 + \dots + \frac{\operatorname{tg}^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \dots = \\ &= 0 + \frac{1}{\cos^2(0)} \cdot x - \frac{2 \sin(0) \cos(0)}{2! \cdot \cos^4(0)} \cdot x^2 - \frac{6 \sin^2(0) + 2 \cos^2(0)}{3! \cdot \cos^4(0)} \cdot x^3 + \dots = x + \frac{x^3}{3} + O(x^3) \end{aligned}$$

Podobne pre $\ln(1+x)$:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + O(x^3)$$

$$\ln(1+x) = \ln(1+0) + \frac{1}{1+0} \cdot x - \frac{1}{2!(1+0)^2} \cdot x^2 + \frac{2}{3!(1+0)^3} \cdot x^3 + O(x^3) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O(x^3)$$

Rozvoj v takomto tvare bude pre naše výpočty stačiť.

Príklad 5.4. Nájdite nasledujúce limity:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} \left(n^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x(1 - \cos x)}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\operatorname{tg} x - x}$$

Riešenie:

(a) Funkciu prepíšeme do iného tvaru:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)}}{x}$$

Následne použijeme L'Hospitalovo pravidlo. Dostávame:

$$\lim_{x \rightarrow 0} -e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x^2} \cdot \ln(1+x) \right)$$

Pre väčšiu prehľadnosť zavedme označenie:

$$A = -e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)}, \quad B = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x^2} \cdot \ln(1+x)$$

Podľa 5.3(b):

$$\lim_{x \rightarrow 0} -e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} -e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^1$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x^2} \cdot \ln(1+x) = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x) \right) = \\ &= \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{1+x} + \frac{-x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + O(x^3)}{x} \right) = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{1+x} - 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + O(x^2) \right) = \\ &= \frac{1}{x(1+x)} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{x}{3} + O(x) = \frac{-x}{x(1+x)} + \frac{1}{2} - \frac{x}{3} + O(x) = \frac{-1}{1+x} + \frac{1}{2} - \frac{x}{3} + O(x) \end{aligned}$$

Teda môžeme konštatovať:

$$\lim_{x \rightarrow 0} B = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{1+x} + \frac{1}{2} - \frac{x}{3} + O(x) \right) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Z toho vyplýva: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} A \cdot \lim_{x \rightarrow 0} B = -e \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{e}{2}$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} \left[n^{\frac{1}{n}} - 1 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(n^{\frac{1}{n}} - 1 \right)}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(e^{\frac{1}{n} \ln n} - 1 \right)}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n} \ln n} - 1}{\frac{1}{n} \ln n}$$

V tejto chvíli je vhodné použiť substitúciu: $\frac{1}{n} \ln n = x$

Keďže $n \rightarrow \infty$, potom $x \rightarrow 0$, pretože $\frac{1}{n}$ ide do nuly rýchlejšie ako $\ln n$ do nekonečna. Podľa 5.3(a) máme:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \ln e = 1$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x(1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{x^3}{3} - x + O(x^3)}{x \left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + O(x^3)\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3} + O(x^3)}{\frac{x^3}{2} + O(x^3)} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{O(x^3)}{x^3}}{\frac{1}{2} + \frac{O(x^3)}{x^3}} = \frac{2}{3}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\operatorname{tg} x - x} = \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + O(x^3)}{x + \frac{x^3}{3} - x + O(x^3)} = \frac{\frac{x^3}{6} + O(x^3)}{\frac{x^3}{3} + O(x^3)} = \frac{\frac{1}{6} + \frac{O(x^3)}{x^3}}{\frac{1}{3} + \frac{O(x^3)}{x^3}} = \frac{1}{2}$$

Príklad 5.5. *Nech $f(x) \cdot f(y) = f(x + y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.*

(a) *Ak predpokladáme, že f je diferencovateľná a nenulová, dokažte: $f(x) = e^{cx}$, kde c je konštanta.*

(b) *Dokažte rovnaký výsledok iba za predpokadu, že f je spojitá.*

Riešenie:

(a) *Najprv si uvedomme, že platí: $f(x) = f(x + 0) = f(x) \cdot f(0)$*

Vieme, že f je diferencovateľná. Môžeme teda z definície vypočítať jej deriváciu:

$$f'(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x + y) - f(x)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot f(y) - f(x) \cdot f(0)}{y} = f(x) \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y) - f(0)}{y} = f(x) \cdot f'(0)$$

Dostali sme diferenciálnu rovnicu: $f' = f'(0) \cdot f$, ktorú môžeme prepísať do tvaru:

$$f' = k \cdot f.$$

Ak $f'(0) = 0$, potom $f'(x) = 0 \quad \forall x$, teda f je konštantná funkcia.

Ak $f'(0) \neq 0$, môžeme povedať:

$$f' = f'(0) \cdot f$$

Vznikla nám diferenciálna rovnica 1. rádu a môžeme ju riešiť metódou separácie premenných:

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = f'(0)$$

$$\int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)} dt = f'(0) \cdot x$$

$$\ln \left| \frac{f(x)}{f(0)} \right| = f'(0) \cdot x$$

Dostávame výsledok:

$$f(x) = f(0) \cdot e^{f'(0) \cdot x}$$

Vieme, že $f(x) = f(x) \cdot f(0)$, teda $f(0) = 1$. Získaný výsledok môžeme teda prepísať do ekvivalentného tvaru: $f(x) = 1 \cdot e^{f'(0) \cdot x}$, pričom $f'(0)$ je konštanta. Tým je dôkaz ukončený.

- (b) Každé reálne číslo má tú vlastnosť, že v jeho ľubovoľne malom okolí sa nachádza nejaké racionálne číslo. Túto skutočnosť využijeme pri dôkaze druhého tvrdenia. Môžeme tvrdiť:

$$f(1 + 1 + \dots + 1) = f(1) \cdot f(1) \cdot \dots \cdot f(1) = f(1^n)$$

Taktiež vidíme, že $f(1) > 0$:

$$f(1 + 0) = f(1) \cdot f(0) \Rightarrow f(0) = 1, \quad f(1) = f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)^2 > 0$$

Chceme dokázať nasledovnú rovnosť: $f\left(\frac{1}{m}\right) = f(1)^{\frac{1}{m}}$ Platí:

$$f(1) = f\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m}\right) = f\left(\frac{1}{m}\right) \cdot f\left(\frac{1}{m}\right) \cdot \dots \cdot f\left(\frac{1}{m}\right) = f\left(\frac{1}{m}\right)^m$$

$$f(1) = f\left(\frac{1}{m}\right)^m \Rightarrow f\left(\frac{1}{m}\right) = f(1)^{\frac{1}{m}}$$

$$f\left(\frac{n}{m}\right) = f\left(\frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m}\right) = f\left(\frac{1}{m}\right)^n = \left(f(1)^{\frac{1}{m}}\right)^n = f(1)^{\frac{n}{m}}$$

Teda $f(x) = f(1)^x$ pre $x \in \mathbb{Q}$. Ďalšia vlastnosť reálnych čísel je tá, že existujú racionálne čísla, ktoré k nemu konvergujú. Nech q_n je racionálne, potom môžeme tvrdiť:

$$f(x) = \lim_{q_n \rightarrow x} f(q_n) = \lim_{q_n \rightarrow x} f(1)^{q_n} = f(1)^x$$

Označme $f(1) := e^c$. Tento výraz je kladný, takže označenie je korektné. Teda platí:

$$f(x) = f(1)^x = e^{cx}$$

Záver

Cieľom bakalárskej práce bolo prehľadne spracovať teóriu mocninových radov a pomocou základných poznatkov odvodiť vlastnosti ďalších funkcií. Vychádzali sme prevažne z publikácie [8]. V prvej časti sme uviedli základné pojmy, ktoré by si mal prípadný čitateľ osvojiť, aby porozumel, odkiaľ pochádzajú známe vlastnosti exponenciálnej funkcie, logaritmickú funkciu a trigonometrických funkcií. V poslednej kapitole práca ponúka aj niekoľko príkladov, ktoré môžu byť užitočné ako ukážka využitia problematiky mocninových radov v praxi.

Prínosom pre autora bolo najmä osvojenie si vedomostí známych z predchádzajúcich rokov štúdia, ale taktiež nadobudnutie nových poznatkov a lepšie pochopenie vlastností uvedených funkcií, ktoré sa v praxi často využívajú, ale asi len málo ľudí vie, že sa dajú dokázať práve pomocou mocninových radov.

Už v úvode sme zdôraznili, že mocninové rady sú veľmi vhodným nástrojom pre mnohé ďalšie vedy. Majú však aj svoje úskalia. Prípady, že sa s radmi ťažko pracuje, v praxi nie sú vôbec ojedinelé - existujú funkcie, ktorých rozvoj do radu je veľmi ťažké nájsť, prípadne konvergujú na veľmi malej množine. O nevýhodách a odchýlkach vznikajúcich používaním radov hovorí napríklad článok [5].

Zoznam použitej literatúry

- [1] Kollár, M.: *Prednášky z matematickej analýzy 2*, FMFI UK, Bratislava, 2012
- [2] Kossaczká, Ľ: *Osobná komunikácia*, FMFI UK, Bratislava, 2013
- [3] Košut, L.: *Postupnosti a rady funkcií*, bakalárska práca, PŘF MUNI, Brno, 2006, 34-38, dostupné na internete (1.12.2013):
http://is.muni.cz/th/106807/prif_b/b.pdf
- [4] Kubáček, Z., Valášek, J.: *Matematická analýza II.*, dostupné na internete (12.5.2014):
<http://www.iam.fmph.uniba.sk/skripta/kubacek/zbynek4.pdf>
- [5] Leavitt, J. A.: *Methods and Applications of Power Series*, dostupný na internete (1.12.2013):
<http://www.ams.org/journals/mcom/1966-20-093/S0025-5718-1966-0187402-4/S0025-5718-1966-0187402-4.pdf>
- [6] Mac Lane, S., Birkhoff, G.: *Algebra*, ALFA, vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, Bratislava 1974
- [7] Privalov, I. I.: *Analytické funkce*, Československé akademie věd, Praha 1955
- [8] Rudin, W.: *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill, Inc., 1953