UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Riemann-Stieltjesov integrál

BAKALÁRSKA PRÁCA

2014

Žaneta NAZAREJOVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Riemann-Stieltjesov integrál

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program:	Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	RNDr. Ľubica Kossaczká, CSc.

Bratislava 2014 **Žaneta NAZAREJOVÁ**

20618845

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta:	Žaneta Nazarejová
Študijný program:	ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor:	9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce:	bakalárska
Jazyk záverečnej práce:	slovenský

Názov: Rieman-Stieltjesov integrál / *The Riemann-Stieltjes integral*

Cieľ: Cieľom je prehlbenie poznatkov z teorie integrálu a funkcií ohraničenej variácie. Tieto poznatky študent môže uplatniť pri riešení príkladov z knihy Walter Rudin Principles of mathematical Analysis

Vedúci:	RNDr. Ľubica Kossaczká, CSc.
Katedra:	FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry:	prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania:	18.10.2013

Dátum schválenia: 14.11.2013

doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

....

študent   vedúci práce

Poďakovanie

Chcela by som sa poďakovať mojej vedúcej bakalárskej práce RNDr. Ľubici Kossaczkej, CSc. za jej ústretvosť, ochotu, trpezlivosť a za hodnotné rady pri písaní práce. Vďaka patrí aj mojej rodine a priateľom za ich podporu a porozumenie.

Abstrakt v štátnom jazyku

NAZAREJOVÁ, Žaneta: Riemann - Stieltjesov integrál [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky,
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky;
školiteľ: RNDr. Ľubica Kossaczká, CSc., Bratislava, 2014, 45 s.

Prácu rozdeľujeme do štyroch kapitol. Prvé tri sú teoretické. V poslednej sa zameriavame na aplikáciu poznatkov, ktoré sme nadobudli, do praktických riešených príkladov. Objektom skúmania našej práce je Riemann-Stieltjesov integrál, ktorý je akýmsi zovšeobecnením pojmu Riemannovho integrálu. Pred čitateľa predostrieme základné vlastnosti integrálu, bez ktorých sa nedá ďalej pracovať. Ako dôležitý poznatok vysvetľujeme pojem riemannovskej integrovateľnosti funkcií a zaoberáme sa tým, kedy sú funkcie riemannovsky integrovateľné. Preto si predstavíme dôležité vety spolu s dôkazmi. Predstavíme si aj funkcie s ohraničenou variáciou, ktorými nahradíme monotónne funkcie ktoré doposiaľ použijeme. Po pochopení tejto teórie by mal byť čitateľ schopný samostatne riešiť príklady zo štvrtej kapitoly.

Kľúčové slová Integrál, riemannovsky integrovateľná, funkcie ohraničenej variácie

Abstract

NAZAREJOVÁ, Žaneta: Riemann - Stieltjes integral [Bachelor thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics,
Department of Applied Mathematics and Statistics;
supervisor: RNDr. Ľubica Kossaczká, CSc., Bratislava, 2014, 45 p.

Our bachelor thesis is divided into four chapters. First three of these are theoretical. In the last one, we focus on application of our new knowledge to solve problems. The subject of our research will be the Riemann-Stieltjes integral, which is sort of generalization of Riemann integral. We want to introduce the basic theory of the integral and it's properties to a reader. As a very important fact we explain a concept of Riemann-integrable functions and we observe, when functions are Riemann-integrable. Thus, we present important theorems with proofs. We also present functions of bounded variation which can replace monotonic functions used so far. After understanding the theory, the reader should be able to solve problems in the fourth chapter.

Key words Integral, riemann-integrable, functions of bounded variation

Obsah

Úvod

V slovenčine sa vyskytuje veľa kníh, článkov, kapitol v knihách a informácií, ktoré hovoria o integráloch. Môžeme sa dozvedieť, čo je to integrál, aké je jeho využitie, kde všade sa s ním môžeme stretnúť, ako ho aplikovať do praxe alebo čo všetko sa pomocou neho dá vyrátať. Avšak väčšina z týchto zdrojov, ak hovoria o integráli, hovoria o Riemannovom integráli. Vysvetľujú a objasňujú, kedy je funkcia riemannovsky integrovateľná. Poskytujú nám názorné príklady a poukazujú na všemožné využitie tohto matematického zázraku. Menej zdrojov je však zameraných na Riemann – Stieltjesov integrál.

Cieľom tejto práce bolo prehĺbiť si poznatky z teórie integrálu z dostupnej literatúry, hlavne pomocou teórie a cvičení z knihy Waltera Rudina-Principles of mathematical analysis. Taktiež práca slúži na rozšírenie vedomostí o funkciách s ohraničenou variáciou, čo súvisí s Riemann-Stieltjesovym integrálom veľmi úzko. V týchto knihách je podrobne a do hĺbky vysvetlená táto problematika. Práca je zameraná predovšetkým na Riemann – Stieltjesov integrál, ktorý je akýmsi zovšeobecnením Riemannovho integrálu a má širšie využitie. V úvodných stránkach práce sa zaoberáme teóriou integrálu všeobecne, neskôr si uvádzame vety, ktoré nám pomôžu ešte hlbšie pochopiť túto teóriu a posledná časť práce je zameraná na rátanie príkladov a ich aplikáciu v oblasti integrálneho počtu s využitím aj teórie o vyššie spomínaných funkciách s ohraničenou variáciou.

Je potrebné si uvedomiť, že u čitateľa tejto práce predpokladáme znalosti zo základov matematickej analýzy, ktoré su neuvádzame, ale sú v práci využívané bez bližšieho vysvetľovania.

1 Definícia a existencia integrálu

V tejto kapitole zadefinujeme pojem Riemannov integrál a Riemann – Stieltjesov integrál a vysvetlíme rozdiel a vzťah medzi nimi. Taktiež uvedieme s tým súvisiace dôležité vety a tvrdenia spolu s dôkazmi. To nám bude nápomocné v neskorších kapitolách.

1.1 Základné pojmy

Definícia 1. (podľa [6])
Máme daný interval [a,b]. *Delením* $\mathscr{D}$ intervalu [a,b] nazývame konečnú množinu bodov $x_0, x_1, ..., x_n$, kde

$$a = x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n = b$$

Rozdiel dvoch susediacich bodov patriacich do tohto intervalu budeme označovať ako Δx_i a teda platí:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad i = (1, 2, ..., n).$$

Definícia 2. (podľa [1])
Majme $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $s \in M (i \in M)$ budeme nazývať *suprémum(infimum) množiny M*, ak sú splnené nasledujúce dve podmienky:
(1)$\forall m \in M : m \leq s \quad (i \leq m)$
(2)$\forall \epsilon > 0 \quad \exists m \in M : m \geq s - \epsilon \quad (m \leq i + \epsilon)$
Jednoducho môžeme povedať, že *suprémum* je najmenšie možné horné ohraničenie množiny M a *infimum* je najväčšie možné dolné ohraničenie množiny M. Označujeme ich ako $s = supM$, $i = infM$.

Definícia 3. (podľa [6])
Našim hlavným predpokladom bude, že f je ohraničená reálna funkcia a je definovaná na intervale [a,b]. Každej časti delenia $\mathscr{D}$ intervalu [a,b] pridelíme hodnoty:

$$M_i = supf(x) \quad (x_{i-1} \leq x \leq x_i)$$

$$m_i = inff(x) \quad (x_{i-1} \leq x \leq x_i)$$

$$U(\mathscr{D}, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

$$L(\mathscr{D}, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

a nakoniec

$$\overline{\int_a^b} f \mathrm{d}x = inf U(\mathscr{D}, f) \tag{1}$$

$$\underline{\int_a^b} f \mathrm{d}x = sup L(\mathscr{D}, f) \tag{2}$$

kde infimum a suprémum sme vzali cez všetky delenia $\mathscr{D}$ nášho intervalu [a,b]. Číslo U($\mathscr{D}$,f) sa nazýva *horný integrálny súčet* funkcie f k deleniu $\mathscr{D}$ a číslo L($\mathscr{D}$,f) sa nazýva *dolný integrálny súčet* funkcie f k deleniu $\mathscr{D}$.

Definícia 4. (podľa [6])

Ak sa hodnota horného a dolného integrálneho súčtu rovnajú, potom môžeme s istotou tvrdiť, že funkcia je *riemannovsky integrovateľná* na intervale [a,b]. Túto skutočnosť budeme označovať

$$f \in \Re$$

(t.j. znak $\Re$ označuje množinu, ktorá obsahuje všetky Riemannovsky integrovateľné funkcie).

Ďalej budeme označovať spoločnú hodnotu (1) a (2) ako

$$\int_a^b f \mathrm{d}x \tag{3}$$

alebo

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x. \tag{4}$$

Toto nazývame *Reimannov integrál* na intervale [a,b].

Poznámka 1. (podľa [6])

Keďže táto funkcia f je ohraničená, s istotou budú existovať dve čísla m a M také, že

$$m \leq f(x) \leq M \quad (a \leq x \leq b)$$

Pre každé delenie $\mathscr{D}$ intervalu [a,b] platí:

$$m.(b-a) \leq L(\mathscr{D}, f) \leq U(\mathscr{D}, f) \leq M.(b-a)$$

tak, že čísla $L(\mathscr{D}, f)$ a $U(\mathscr{D}, f)$ sú krajnými bodmi ohraničenej množiny. To zároveň znamená, že pre každú ohraničenú funkciu f môžeme definovať horný a dolný integrálny súčet. Pokiaľ sa budeme pýtať na ich rovnosť, bude to viac citlivé. Preto sa teraz radšej poďme zaoberať všeobecnou situáciou.

Definícia 5. (podľa [6])

Nech α je monotónna rastúca funkcia na intervale [a,b] (vzhľadom k tomu, že $\alpha(a)$,$\alpha(b)$ sú konečné, α je ohraničená na intervale[a,b]).Zodpovedajúc každej časti delenia $\mathscr{D}$ intervalu [a,b] označujeme rozdiel dvoch funkčných hodnôt funkcie α na intervale [a,b]:

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}).$$

Jasne vidíme, že $\Delta\alpha_i \geq 0$, keďže naša funkcia α je monotónna rastúca. Vezmeme ľubovoľnú funkciu f, ktorá je ohraničená na intervale [a,b] a píšeme:

$$U(\mathscr{D}, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i$$

$$L(\mathscr{D}, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\alpha_i,$$

kde hodnoty M_i a m_i sme zadefinovali v Definícii 1. Definujeme

$$\overline{\int_a^b} f \mathrm{d}\alpha = inf U(\mathscr{D}, f, \alpha) \tag{5}$$

$$\underline{\int_a^b} f \mathrm{d}\alpha = sup L(\mathscr{D}, f, \alpha). \tag{6}$$

Infimum a suprémum sme znova, ako predtým, vzali cez všetky delenia $\mathscr{D}$ intervalu [a,b]. Ak budú mať ľavé strany rovníc (5) a (6) rovnaké hodnoty, potom budeme značiť ich spoločnú hodnotu ako

$$\int_a^b f \mathrm{d}\alpha \tag{7}$$

alebo

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}\alpha(x). \tag{8}$$

Tento integrál budeme nazývať

Riemann-Stieltjesov integrál alebo jednoducho *(Stieltjesov integrál)* funkcie f, ktorý sa viaže na funkciu α cez interval [a,b].

Poznámka 2. (podľa [8] a [9])

Kto je to vlastne Riemann a kto Stieltjes?

Georg Friedrich Bernhard Riemann bol vplyvný nemecký matematik. Žil v rokoch 1826 až 1866. Práce, ktoré publikoval otvorili prístup k výskumu analýzy kombinovanej s geometriou. Riemann boj jedným z najväčších prispievateľov k reálnej analýze. Definoval Riemannov integrál pomocou Riemannovych súm. Sú známe aj jeho príspevky k analytickej teórii čísel. Jeho je teória trigonometrických radov (nie Fourierových) a táto teória je začiatkom všeobecnej teórie funkcií. Publikoval veľmi dôležité príspevky k modernej analytickej teórii čísel. Zaoberal sa Riemann zeta funkciou . Jedným z najznámejších dohadov o nej je Riemannova hypotéza. Ďalšia z významných vecí je aj Riemannova metrika, kde sa zaoberal vyššími dimenziami a opisu bodov v nich.

Thomas Joannes Stieltjes bol holandský matematik žijúci v rokoch 1856 až 1894. Pracoval vo viacerých odvetviach analýzy. Zaoberal sa najmä reťazovými zlomkami a teóriou čísel. Má zásluhy aj pri teórii Hilbertových priestorov. Venoval sa diferenciálnym rovniciam, divergentným radom, interpolácii, gama funkcii. Prednášal analytickú geometriu a deskriptívnu geometriu. Počas svojho života dostal za svoje práce čestný doktorát a v roku 1889 bol menovaný za profesora integrálneho a diferenciálneho počtu na slávnej univerzite v Toulouse vo Francúzsku.

Poznámka 3. (podľa [6])

Ak integrál (7) existuje (t.j. (5) a (6) majú rovnaké hodnoty), môžeme povedať, že f je riemannovsky integrovateľná s ohľadom na funkciu α a píšeme$f \in \Re(\alpha)$. Keď za $\alpha(x)$ dosadíme x, (t.j. $\alpha(x) = x$), potom Riemannov integrál je špeciálnym typom Riemann-Stieltjesovho integrálu.

Vo všeobecnosti v podstate nepotrebujeme aby funkcia α bola spojitá. Pri zápise integrálu dávame prednosť (7) pred (8), pretože písmeno x nám nepridá nič iné a nové na obsahu integrálu (7). Nie je dôležité, ktoré nami zvolené písmeno použijeme ako "premennú integrovania". Napríklad integrál (8) je v skutočnosti to isté ako $\int_a^b f(z)\mathrm{d}\alpha(z)$, iba s použitím inej premennej.

Integrál teda závisí od f, α, a,b ale nie je závislý od premennej integrovania, ktorú môžeme spokojne vynechať.

Premenná integrovania zohráva priam rovnakú úlohu ako indexy použité pri sumácii:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i, \sum_{k=1}^{n} c_k$$

je presne to isté ako $c_1 + c_2 + ... + c_n$.

Nakoniec nám však nemusí byť zbytočné, ak by sme premennú v integrovaní použili. Vo viacerých prípadoch to bude pre nás dokonca pohodlnejšie.

V nasledujúcich riadkoch budeme skúmať existenciu integrálu (7). Samozrejme, f budeme vždy predpokladať reálnu a ohraničenú a α bude vždy monotónna, rastúca na intervale [a,b].

Definícia 6. (podľa [1])

Hovoríme, že P^* je *zjemnením delenia* $\mathscr{D}$ ak $\mathscr{D}^* \supset \mathscr{D}$(t.j. že každý deliaci bod delenia $\mathscr{D}$ je zároveň aj deliacim bodom delenia $\mathscr{D}^*$). Vzhľadom k dvom deleniam $\mathscr{D}^1$ a $\mathscr{D}^2$ hovoríme že $\mathscr{D}^*$ je ich spoločným zjemnením ak $\mathscr{D}^* = \mathscr{D}^1 \cup \mathscr{D}^2$.

1.2 Dôležité vety a tvrdenia

Veta 1. (podľa [6])

Nech $\mathscr{D}^*$ je také delenie intervalu [a,b], že je zjemnením delenia $\mathscr{D}$ ($\mathscr{D} \subset \mathscr{D}^*$). Potom:

$$L(\mathscr{D}, f, \alpha) \leq L(\mathscr{D}^*, f, \alpha) \tag{9}$$

a

$$U(\mathscr{D}^*, f, \alpha) \leq U(\mathscr{D}, f, \alpha) \tag{10}$$

Dôkaz. Aby sme dokázali (9) budeme najprv predpokladať, že $\mathscr{D}^*$ bude obsahovať len o jeden bod viac ako $\mathscr{D}$. Označme tento "jeden bod navyše" ako x^* a predpokladajme $x_{i-1} < x^* < x_i$, kde x_{i-1} a x_i sú dva po sebe idúce body delenia $\mathscr{D}$. Zadefinujeme si hodnoty

$$w_1 = inf f(x) \quad (x_{i-1} \leq x \leq x^*)$$

$$w_2 = inf f(x) \quad (x^* \leq x \leq x_i).$$

Z toho potom jednoznačne vidíme, že $w_1 \geq m_i$ a $w_2 \geq m_i$ kde (presne ako v riadkoch vyššie),

$$m_i = inf f(x)(x_{i-1} \leq x \leq x_i).$$

Odtiaľ máme

$$L(\mathscr{D}^*, f, \alpha) - L(\mathscr{D}, f, \alpha) =$$

$= w_1[\alpha(x^*) - \alpha(x_{i-1})] + w_2[\alpha(x_i) - \alpha(x^*)] - m_i[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})]$
$= w_1\alpha(x^*) - w_1\alpha(x_{i-1}) + w_2\alpha(x_i) - w_2\alpha(x^*) - m_i\alpha(x_i) + m_i\alpha(x_{i-1})$
$= w_1\alpha(x^*) - m_i\alpha(x^*) - w_1\alpha(x_{i-1}) + m_i\alpha(x_{i-1}) + w_2\alpha(x_i) - w_2\alpha(x^*) + m_i\alpha(x^*) - m_i\alpha(x_i)$
$= (w_1 - m_i)[\alpha(x^*) - \alpha(x_{i-1})] + (w_2 - m_i)[\alpha(x_i) - \alpha(x^*)] \geq 0$
Analogický dôkaz uvádzame pre (10):

$$w_1 = sup f(x) \quad (x_{i-1} \leq x \leq x^*)$$

$$w_2 = sup f(x) \quad (x^* \leq x \leq x_i)$$

Nepochybne $w_1 \leq M_i$ a $w_2 \leq M_i$ kde (ako predtým),

$$M_i = sup f(x)(x_{i-1} \leq x \leq x_i).$$

Odtiaľ máme

$$U(\mathscr{D}, f, \alpha) - U(\mathscr{D}^*, f, \alpha) =$$

$= M_i[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] - w_1[\alpha(x^*) - \alpha(x_{i-1})] - w_2[\alpha(x_i) - \alpha(x^*)]$
$= M_i\alpha(x_i) - M_i\alpha(x_{i-1}) - w_1\alpha(x^*) + w_1\alpha(x_{i-1}) - w_2\alpha(x_i) + w_2\alpha(x^*)$
$= M_i\alpha(x^*) - M_i\alpha(x_{i-1}) - w_1\alpha(x^*) + w_1\alpha(x_{i-1}) - M_i\alpha(x^*) + M_i\alpha(x_i) - w_2\alpha(x_i) + w_2\alpha(x^*)$
$= (M_i - w_1)[\alpha(x^*) - \alpha(x_{i-1})] + (M_i - w_2)[\alpha(x_i) - \alpha(x^*)] \geq 0$
Ak $\mathscr{D}^*$ obsahuje o k bodov viac ako $\mathscr{D}$, opakujeme tento postup k-krát a dospejeme k (9) a (10). □

Veta 2. (podľa [6])

Dolný integrálny súčet je menší nanajvýš rovný hornému integrálnemu súčtu.

$$\underline{\int_a^b} f \mathrm{d}\alpha \leq \overline{\int_a^b} f \mathrm{d}\alpha$$

Dôkaz. Majme $\mathscr{D}^*$ ako spoločné zjmenenie dvoch delení $\mathscr{D}_1 \quad a \quad \mathscr{D}_2$. Z vety 1 nám priamo vyplýva že:

$$L(\mathscr{D}_1, f, \alpha) \leq L(\mathscr{D}^*, f, \alpha) \leq U(\mathscr{D}^*, f, \alpha) \leq U(\mathscr{D}_2, f, \alpha)$$

Odtiaľ je zrejmé, že

$$L(\mathscr{D}, f, \alpha) \leq U(\mathscr{D}, f, \alpha) \tag{11}$$

Fixne si stanovíme $\mathscr{D}_2$ a suprémum vezmeme z celého delenia $\mathscr{D}_1$. Z toho nám automaticky vyplýva, že (11) dáva nerovnicu

$$\underline{\int} f \mathrm{d}\alpha \leq U(\mathscr{D}_2, f, \alpha) \tag{12}$$

Z vety vyplýva vzatie infima cez všetky delenia $\mathscr{D}_2$.

$$\underline{\int} f \,\mathrm{d}\alpha \leq U(\mathscr{D}_2, f, \alpha)$$

$$\underline{\int} f \,\mathrm{d}\alpha = inf U(\mathscr{D}_2, f, \alpha)$$
$$inf U(\mathscr{D}_2, f, \alpha) \leq U(\mathscr{D}_2, f, \alpha)$$

$\square$

Veta 3. (podľa [6])

Funkcia $f \in \Re(\alpha)$ na intervale [a,b] práve vtedy a len vtedy, ak pre každé $\epsilon > 0$ existuje delenie $\mathscr{D}$ intervalu [a,b] také, že:

$$U(\mathscr{D}, f, \alpha) - L(\mathscr{D}, f, \alpha) < \epsilon \tag{13}$$

Dôkaz. $\Leftarrow$ Pre každé delenie $\mathscr{D}$ nám platí:

$$L(\mathscr{D}, f, \alpha) \leq \underline{\int} f \,\mathrm{d}\alpha \leq \overline{\int} f \,\mathrm{d}\alpha \leq U(\mathscr{D}, f, \alpha).$$

Z toho vyplývajú ďalšie nerovnosti:

$$0 \leq \overline{\int} f \,\mathrm{d}\alpha - \underline{\int} f \,\mathrm{d}\alpha < \epsilon$$

a teda

$$\overline{\int} f \,\mathrm{d}\alpha = \underline{\int} f \,\mathrm{d}\alpha,$$

čo značí, že $f \in \Re(\alpha)$.

$\Rightarrow$ Predpokladajme $f \in \Re(\alpha)$ a $\epsilon > 0$ je dané. Z toho vieme usúdiť, že určite existujú delenia $\mathscr{D}_1$ a $\mathscr{D}_2$ také, že

$$U(\mathscr{D}_2, f, \alpha) - \int f \, \mathrm{d}\alpha < \epsilon/2 \tag{14}$$

$$\int f \, \mathrm{d}\alpha - L(\mathscr{D}_1, f, \alpha) < \epsilon/2 \tag{15}$$

Teraz si zvolíme nejaké delenie $\mathscr{D}$ ako spoločné zjemnenie delení $\mathscr{D}_1$ a $\mathscr{D}_2$. Potom veta 1 spoločne s nerovnosťami (14) a (15) nám udáva, že

$$U(\mathscr{D}, f, \alpha) \leq U(\mathscr{D}_2, f, \alpha) < \int f \, \mathrm{d}\alpha + \epsilon/2 < L(\mathscr{D}_1, f, \alpha) + \epsilon \leq L(\mathscr{D}, f, \alpha) + \epsilon,$$

a tak potom (13) platí pre túto oblasť $\mathscr{D}$.

□

Poznámka 4.(podľa[6])

Veta 3 nám teda poskytuje postačujúcu aj nutnú podmienku pre integrovateľnosť funkcií. Predtým, ako tento dôležitý poznatok aplikujeme do praxe, uvedieme niekoľko veľmi dôležitých faktov, ktoré s tým úzko súvisia.

Veta 4. (podľa [6])

(a) Ak nerovnosť (13) platí pre nejaké delenie $\mathscr{D}$ a nejaké ϵ, potom (13) platí (s tým istým ϵ) pre každé jedno zjemnenie delenia $\mathscr{D}$.

(b) Ak nerovnosť (13) platí pre $\mathscr{D} = x_0, x_1, ..., x_n$ a ak s_i, t_i sú ľubovoľné body v intervale $[x_{i-1}, x_i]$ potom platí:

$$\sum_{i=1}^{n} \left| f(s_i) - f(t_i) \right| \Delta\alpha_i < \epsilon.$$

(c) Ak $f \in \Re(\alpha)$ a zároveň časť (b) platí, potom platí nerovnosť:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta\alpha_i - \int_a^b f \, \mathrm{d}\alpha \right| < \epsilon.$$

Dôkaz. Veta 1 implikuje tvrdenie (a).

Za predpokladov, ktoré sme uviedli v časti (b), obe funkčné hodnoty, $f(s_i)$ aj $f(t_i)$ ležia v intervale $[m_i, M_i]$ a to tak, že $\left| f(s_i) - f(t_i) \right| \leq M_i - m_i$. To nám implikuje nerovnosť:

$$\sum_{i=1}^{n} \left| f(s_i) - f(t_i) \right| \Delta\alpha_i \leq U(\mathscr{D}, f, \alpha) - L(\mathscr{D}, f, \alpha).$$

Dokázali sme časť (b) Vety 4.

Evidentné nerovnosti

$$L(\mathscr{D}, f, \alpha) \leq \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta\alpha_i \leq U(\mathscr{D}, f, \alpha)$$

a

$$L(\mathscr{D}, f, \alpha) \leq \int f \,\mathrm{d}\alpha \leq U(\mathscr{D}, f, \alpha)$$

zjavne dokazujú časť (c) Vety 4. □

Veta 5. (podľa [6])

Ak funkcia f je spojitá na intervale [a,b], tak $f \in \Re(\alpha)$ (je riemannovsky integrovateľná) na intervale [a,b].

Dôkaz. Nech $\epsilon > 0$.

Zvolíme si číslo $\eta > 0$ tak, aby nám platilo:

$$[\alpha(b) - \alpha(a)].\eta < \epsilon.$$

Keďže f je rovnomerne spojitá funkcia na intervale [a,b], existuje δ také, že

$$\Big| f(x) - f(t) \Big| < \eta, \tag{16}$$

ak $x \in [a, b]$, a $|x - t| < \delta$.

Ak $\mathscr{D}$ je nejaké delenie intervalu [a,b] také, že $\Delta x_i < \delta \quad pre \quad \forall i,$ potom z (16) vyplýva, že

$$M_i - m_i \leq \eta \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{17}$$

a preto

$$U(\mathscr{D}, f, \alpha) - L(\mathscr{D}, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta\alpha_i \leq \eta. \sum_{i=1}^{n} \Delta\alpha_i = \eta.[\alpha(b) - \alpha(a)] < \epsilon.$$

Z Vety 3 nám teda vyplýva, že funkcia f je riemannovsky integrovateľná. □

Veta 6. (podľa [6])

Ak funkcia f je monotónna na intervale [a,b] a ak α je spojitá na tom istom intervale, potom funkcia f je riemannovsky integrovateľná (samozrejme vždy predpokladáme že α je monotónna).

Dôkaz. Majme $\epsilon > 0$. Pre každé kladné celé číslo n budeme mať také delenie, že

$$\Delta\alpha_i = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n}, \quad i = (1, 2, ..., n)$$

Toto môžeme tvrdiť na základe toho,že naša funkcia je spojitá. Predpokladajme teraz, že f je monotónna rastúca (v opačnom prípade by sme to dokazovali analogicky). Potom

$$M_i = f(x_i)$$

$$m_i = f(x_{i-1}), \quad i = (1, 2, ..., n)$$

tak, že

$$U(\mathscr{D}, f, \alpha) - L(\mathscr{D}, f, \alpha) = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} . \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} . [f(b) - f(a)] < \epsilon$$

ak n je dosť veľké (teda také, že $\frac{|(\alpha(b)-\alpha(a)).(f(b)-f(a))|}{\epsilon} < n$). Z vety 3 nám teraz vyplýva integrovateľnosť funkcie$f$. Funkcia f je riemannovsky integrovateľná. □

Veta 7. (podľa [6])
Nech funkcia f je ohraničená na intervale [a,b] a má na tomto intervale konečne veľa bodov nespojitosti. Nech funkcia α je spojitá vo všetkých bodoch, v ktorých je funkcia f nespojitá. Potom platí, že funkcia f je riemannovsky integrovateľná ($f \in \Re(\alpha)$).

Dôkaz. Majme $\epsilon > 0$. Položme $M = sup|f(x)|$. B budeme považovať za množinu bodov nespojitosti funkcie f. Pretože množina B je konečná a funkcia α je spojitá v každom bode B, môžeme si dovoliť pokryť B konečným počtom disjunktných intervalov $(u_j, v_j) \subset [a, b]$. Pre intervaly platí, že suma prislúchajúcich rozdielov $\alpha(v_j) - \alpha(u_j) < \epsilon$. Navyše si tieto intervaly môžeme zvoliť tak, že každý bod $B \cap [a, b]$ bude ležať presne v strede niektorého z intervalov (u_j, v_j). Body, ktoré budú patriť do intervalu [a,b], ale nebudú ležať v jednotlivých intervaloch (u_j, v_j), budeme nazývať množinou K. Množina K je kompaktná. Preto funkcia f je rovnomerne spojitá na množine K a $\exists\delta > 0$ také, že:

$\big|f(s) - f(t)\big| < \epsilon \quad ak \quad s, t \in K$ a |s-t|$<\delta$.

Teraz k deleniam $\mathscr{D}$ intervalu [a,b], pridáme vytvoríme intervaly (u_j, v_j). Medzi tieto intervaly pridáme body y_i tak, že bude platiť: $\big|y_i - y_{i-1}\big| < \delta$ a $\big(y_i, y_{i-1}\big) \cap \big(u_j, v_j\big) = \emptyset$.

$$u_j \in \mathscr{D}, v_j \in \mathscr{D}$$

Ak x_{i-1} nie je nejakým z u_j bodov, potom $\Delta x_i < \delta$. Je potrebné si uvedomiť tento fakt: $M_i - m_i \leq 2.M$ pre každé i a taktiež: $M_i - m_i \leq \epsilon$ pokiaľ x_{i-1} je nejakým z v_j. Odtiaľ, podobným spôsobom, ako v dôkaze vety 5

$$U(\mathscr{D}, f, \alpha) - L(\mathscr{D}, f, \alpha) \leq [\alpha(b) - \alpha(a)].\epsilon + 2.M\epsilon.$$

Na základe ľubovoľnosti ϵ, nám veta 3 jasne ukazuje riemannovskú integrovateľnosť funkcie f ($f \in \Re(\alpha)$). □

Poznámka 5. (podľa [6])

Ak funkcie f a α majú spoločné body nespojitosti, potom funkcia f nemusí nutne byť riemannovsky integrovateľná. V poslednej kapitole si to názorne ukážeme v Príklade 3.

Veta 8. (podľa [6])

Predpokladajme, že funkcia f je riemannovsky integrovateľná na intervale [a,b]. Ďalej $m \leq f \leq M$, θ je spojitá na intervale [m,M] a $h(x) = \theta(f(x))$ na intervale [a,b]. Potom funkcia h je riemannovsky integrovateľná ($h \in \Re(\alpha)$) na intervale [a,b].

Dôkaz. Majme $\epsilon > 0$. Funkcia θ je rovnomerne spojitá na [m,M] a preto existuje $\delta > 0$ také, že $\delta < \epsilon$ a $\left|\theta(s) - \theta(t)\right| < \epsilon$, ak $|s-t| \leq \delta$ a $s, t \in [m, M]$. Funkcia f je riemannovsky integrovateľná a preto máme delenie $\mathscr{D} = x_0, x_1, ..., x_n$ intervalu [a,b] také, že

$$U(\mathscr{D}, f, \alpha) - L(\mathscr{D}, f, \alpha) < \delta^2. \tag{18}$$

Hodnoty $M_i \quad a \quad m_i$ budeme považovať za rovnaké ako v Definícii 1 pre funkciu f a $M_i^* \quad a \quad m_i^*$ budú analogické čísla pre funkciu h.

Teraz si rozdelíme čísla 1,2,...,n do dvoch tried:

$$i \in A, \quad ak \quad M_i - m_i < \delta$$

$$i \in B, \quad ak \quad M_i - m_i \geq \delta$$

Pre $i \in A$, z našej voľby δ vidíme $M_i^* - m_i^* \leq \epsilon$

Pre $i \in B$, z našej voľby δ vidíme $M_i^* - m_i^* \leq 2K$, $K = sup|\theta(t)|$, $m \leq t \leq M$. Z (18) máme

$$\delta \sum_{i \in B} \Delta\alpha_i \leq \sum_{i \in B} (M_i - m_i).\Delta\alpha_i < \delta^2 \tag{19}$$

a teda $\sum_{i\in B}\Delta\alpha_i < \delta$.

Z toho vyplýva, že

$$U(\mathscr{D},h,\alpha) - L(\mathscr{D},h,\alpha) = \sum_{i\in A}(M_i^* - m_i^*) + \sum_{i\in B}(M_i^* - m_i^*)\Delta\alpha_i \leq$$

$$\leq \epsilon[\alpha(b) - \alpha(a)] + 2K\delta < \epsilon[\alpha(b) - \alpha(a) + 2K].$$

Keďže ϵ je ľubovoľné, veta 3 implikuje, že funkcia h je riemannovsky integrovateľná.

□

Poznámka 6. (podľa [6])

Táto veta podnecuje otázku: Práve ktoré funkcie sú riemannovsky integrovateľné?

2 Vlastnosti integrálu

V tejto kapitole sformulujeme základné vlastnosti integrálu a niektoré z nich aj dokážeme. Uvedieme taktiež, v čom spočíva výhoda Riemann-Stieltjesovho integrálu oproti jednoduchšiemu Riemannovmu integrálu. Táto kapitola je spracovaná podľa [6, str. 128 až 133].

2.1 Formulácia vlastností

Veta 9.

Predpokladáme funkciu α , ktorá je rastúca a ohraničená na intervale [a,b].

(a) Ak $f_1 \in \Re(\alpha)$ a $f_2 \in \Re(\alpha)$ na [a,b], potom

(i)$f_1 + f_2 \in \Re(\alpha)$

(ii)$c.f \in \Re(\alpha)$ pre každú konštantu c

(iii)$\int_a^b (f_1 + f_2)\mathrm{d}\alpha = \int_a^b \ f_1 \,\mathrm{d}\alpha + \int_a^b \ f_2 \,\mathrm{d}\alpha$

(iv)$\int_a^b \ c.f \,\mathrm{d}\alpha = c. \int_a^b \ f \,\mathrm{d}\alpha$ pre každú konštantu c

(b) Ak$f_1(x) \leq f_2(x)$ na[a,b] potom:

$$\int_a^b \ f_1 \,\mathrm{d}\alpha \leq \int_a^b \ f_2 \mathrm{d}\alpha$$

(c) Ak $f \in \Re(\alpha)$ na [a,b] a c je nejaký bod z intervalu [a,b], potom f$\in \Re(\alpha)$ na [a,c] a [c,b] a

$$\int_a^c f \mathrm{d}\alpha + \int_c^b \ f \,\mathrm{d}\alpha = \int_a^b f \mathrm{d}\alpha$$

(d) Ak $f \in \Re(\alpha)$ na [a,b] a ak $|f(x)| \leq M$ na [a,b], potom

$$\left| \int_a^b \ f \,\mathrm{d}\alpha \right| \leq M[\alpha(b) - \alpha(a)]$$

(e) Funkcie α_1 a α_2 sú rastúce a ohraničené na intervale [a,b].

(i) Ak $f \in \Re(\alpha_1)$ a $f \in \Re(\alpha_2)$, potom

$$\int_a^b \ f \,\mathrm{d}(\alpha_1 + \alpha_2) = \int_a^b \ f \,\mathrm{d}\alpha_1 + \int_a^b \ f \,\mathrm{d}\alpha_2$$

(ii) Ak $f \in \Re(\alpha)$ a c je kladná konštanta, potom $f \in \Re(c\alpha)$ a

$$\int_a^b \ f \,\mathrm{d}(c\alpha) = c. \int_a^b \ f \,\mathrm{d}\alpha$$

Veta 10.

Ak $f \in \Re(\alpha)$ a $g \in \Re(\alpha)$ na [a,b], potom

(a) $f.g \in \Re(\alpha)$

(b) $|f| \in \Re(\alpha)$ a $\left|\int_a^b f \, \mathrm{d}\alpha\right| \leq \int_a^b |f| \, \mathrm{d}\alpha$

Dôkaz. Ak vezmeme za $\theta(t) = t^2$, veta 8 ukazuje, že $f^2 \in \Re(\alpha)$ ak $f \in \Re(\alpha)$.

Rovnosť $4fg = (f+g)^2 - (f-g)^2$ doplňuje dôkaz (a).

Ak vezmeme za $\theta(t) = |t|$, veta 8 podobne ukazuje, že $|f| \in \Re(\alpha)$.

Zvoľme $c = \pm 1$ tak, že $c. \int f \, \mathrm{d}\alpha \geq 0$.

Potom $\left| \int f \mathrm{d}\alpha \right| = c. \int f \mathrm{d}\alpha = \int c.f \mathrm{d}\alpha \leq \int |f| \mathrm{d}\alpha$, kedže $c.f \leq |f|$. □

Definícia 6.

"UNIT STEP" funkcia(funkcia jednotkového kroku) je definovaná ako

$$I(x) = \begin{cases} 0 & (pre\ x \leq 0), \\ 1 & (pre\ x > 0), \end{cases}$$

Veta 11.

Ak $a < s < b$, s je ohraničená na [a,b], f je spojitá v s, a $\alpha(x) = I(x-s)$, potom

$$\int_a^b f \mathrm{d}\alpha = f(s).$$

Dôkaz. Zoberme do úvahy delenia $\mathscr{D} = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$, kde

$x_0 = a$ a $x_1 = s < x_2 < x_3 = b$. Potom

$$U(\mathscr{D}, f, \alpha) =$$

$$= \max_{[a,s]} f.(\alpha(s) - \alpha(a)) + \max_{[s,x_2]} f(\alpha(x_2) - \alpha(s)) + \max_{[x_2,b]} f(\alpha(b) - \alpha(x_2))$$

$$= \max_{[a,s]} f.(I(s-s) - I(a-s)) + \max_{[s,x_2]} f(I(x_2-s) - I(s-s)) + \max_{[x_2,b]} f(I(b-s) - I(x_2-s))$$

$$= \max_{[a,s]} f.(0-0) + \max_{[s,x_2]} f(1-0) + \max_{[x_2,b]} f(1-1)$$

$$= f(s) = M_2$$

$$L(\mathscr{D}, f, \alpha) =$$

$= \min_{[a,s]} f.(\alpha(s) - \alpha(a)) + \min_{[s,x_2]} f(\alpha(x_2) - \alpha(s)) + \min_{[x_2,b]} f(\alpha(b) - \alpha(x_2))$

$= \min_{[a,s]} f.(I(s-s) - I(a-s)) + \min_{[s,x_2]} f(I(x_2-s) - I(s-s)) + \min_{[x_2,b]} f(I(b-s) - I(x_2-s))$

$= \min_{[a,s]} f.(0-0) + \min_{[s,x_2]} f(1-0) + \min_{[x_2,b]} f(1-1)$

$= f(s) = m_2$

Vidíme, že $U(\mathscr{D}, f, \alpha) = M_2$ a $L(\mathscr{D}, f, \alpha) = m_2$. Keďže funkcia f je spojitá v bode s, vidíme, že M_2 a m_2 obe konvergujú k $f(s)$ ako $x_2 \to s$. $\square$

Veta 12.

Predpokladajme $c_n \geq 0$ pre $n = 1, 2, 3, ..., \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konverguje, $\{s_n\}$ je ľubovoľná postupnosť jednotlivých bodov v intervale (a,b) a

$$\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I(x - s_n). \tag{20}$$

Nech funkcia f je spojitá na [a,b]. Potom

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} c_n . f(s_n) \tag{21}$$

Dôkaz. Vidíme, že platí: $|c_n|.|I(x - s_n)| \leq c_n$.Preto podľa kritéria Weierstrassa vieme, že rad konverguje práve vtedy, ak konverguje absolútne. Vidíme taktiež, že rad (20) konverguje pre každé x. Súčet $\alpha(x)$ je monotónna funkcia a $\alpha(a) = 0, \quad \alpha(b) = \sum c_n$. Majme $\epsilon > 0$. Vyberieme si N také, že

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n < \epsilon.$$

Položme $\alpha_1(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n I(x - s_n)$, $\alpha_2(x) = \sum_{N+1}^{\infty} c_n I(x - s_n)$.
Podľa viet 9 a 11

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}\alpha_1 = \sum_{i=1}^{N} c_i . f(s_i). \tag{22}$$

Ukážeme, že $\alpha_2(b) - \alpha_2(a) < \epsilon$

$\alpha_2(b) - \alpha_2(a) = \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n . I(b - s_n) - \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n . I(a - s_n) = \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n$

Vieme, že$\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n < \epsilon$. a teda $\alpha_2(b) - \alpha_2(a) < \epsilon$

$$\left| \int_a^b f \,\mathrm{d}\alpha_2 \right| \leq M(\alpha_2(b) - \alpha_2(a)) \leq M.\epsilon, \tag{23}$$

kde $M = sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$. Keďže $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, z toho teda z (22) a z (23) vyplýva, že

$$\left| \int_a^b f \,\mathrm{d}\alpha - \sum_{i=1}^{N} c_i f(s_i) \right| \leq M\epsilon. \tag{24}$$

Ak necháme $n \to \infty$, dostaneme (21). □

Veta 13.

Predpokladajme α rastúcu, monotónnu a $\alpha' \in \Re$ na [a,b]. Nech funkcia f je ohraničená reálna funkcia na [a,b]. Potom $f \in \Re(\alpha)$ práve vtedy, keď $f\alpha' \in \Re$. V tom prípade

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x) \,\mathrm{d}x \tag{25}$$

Dôkaz. Majme $\epsilon > 0$. Teraz sa pokúsime aplikovať vetu 3 na $f\alpha'$: Máme delenie $\mathscr{D} = x_0, x_1, ..., x_n$ intervalu [a,b] také, že

$$U(\mathscr{D}, \alpha') - L(\mathscr{D}, \alpha') < \epsilon \tag{26}$$

Veta o strednej hodnote nám poskytuje hodnoty $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tak, že
$\Delta\alpha_i = \alpha'(t_i)\Delta x_i$ pre i=1,2,...,n.
Ak $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$, potom

$$\sum_{i=1}^{n} \big|\alpha'(s_i) - \alpha'(t_i)\big|\Delta x_i \leq U(\mathscr{D}, \alpha') - L(\mathscr{D}, \alpha') < \epsilon, \tag{27}$$

podľa (26) a vety 4b. Položme

$$M = sup_{x\in[a,b]}\big|f(x)\big|.$$

Keďže

$$\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\Delta\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\alpha'(t_i)\Delta x_i$$

z toho z (27) vyplýva, že

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\alpha'(s_i)\Delta\ x_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(s_i).\alpha'(t_i)\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} f(s_i).\alpha'(s_i).\Delta x_i\right| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left|f(s_i).\Delta x_i\right|\left|(\alpha'(t_i) - \alpha'(s_i))\right| \leq M. \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \left|\alpha'(t_i) - \alpha'(s_i)\right| \leq M.\epsilon$$

Napíšeme teda nerovnicu v tvare:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\alpha'(s_i)\Delta\ x_i\right| \leq M\epsilon \tag{28}$$

Platí

$$\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\Delta\alpha_i \leq U(\mathscr{D}, f.\alpha') + M\epsilon$$

pre všetky voľby $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ také, že $U(\mathscr{D}, f, \alpha) \leq U(\mathscr{D}, f.\alpha') + M\epsilon$.
Rovnaký argument vedie od (30) k $U(\mathscr{D}, f.\alpha') \leq U(\mathscr{D}, f, \alpha) + M\epsilon$. Hoci

$$|U(\mathscr{D}, f, \alpha) - U(\mathscr{D}, f.\alpha')| \leq M\epsilon \tag{29}$$

Teraz zoberieme do úvahy, že (26) ostáva pravdivé ak $\mathscr{D}$ je nahradené hociakým zjemnením. Odtiaľ (29) tiež zostáva pravdivé. Dospeli sme k záveru, že

$$\left| \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}\alpha - \overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq M\epsilon$$

Ale ϵ je ľubovoľné. Preto

$$\overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}\alpha = \overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)\,\mathrm{d}x \tag{30}$$

pre hociakú ohraničenú funkciu f. Analogicky by sme mohli dokázať podľa (28) takisto rovnosť spodných integrálov, pretože:

$$\underline{\int_a^b} f d\alpha = \underline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)dx$$

a

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha = \overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)dx$$

Platí $f \in \Re(\alpha) \leftrightarrow \underline{\int_a^b} f d\alpha = \overline{\int_a^b} f d\alpha$ a takisto aj $\underline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)dx$. Veta je tým pádom dokázaná. $\square$

3 Integrovateľnosť a diferencovateľnosť funkcií. Funkcie s ohraničenou variáciou

V úvode tejto časti si povieme niečo o integrovateľnosti a diferencovateľnosti reálnych funkcií. Ukážeme tiež, že integrácia a diferenciácia sú v určitom zmysle inverzné operácie. V druhej podkapitole si priblížime funkcie ohraničenej variácie a vysvetlíme prečo sú pre nás dôležité.

3.1 Integrovateľnosť a diferencovateľnosť

Definícia 7. (podľa [1])
Nech S je otvorená množina a funkcia $f : S \to \Re$. Ak bude platiť $\forall x \in S : F'(x) = f(x)$, tak funkciu F budeme nazývať primitívnou funkciou k funkcii f.

Veta 15. (podľa [6])
Nech $f \in \Re(\alpha)$ na [a,b]. Pre $a \leq x \leq b$ položme $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Potom F je spojitá na [a,b]. Okrem toho, ak f je spojitá v bode x_0 z intervau [a,b], potom F je diferencovateľná v x_0 a $F'(x_0) = f(x_0)$.

Dôkaz. Kedže $f \in \Re$, f je ohraničená. Predpokladajme $\left|f(t)\right| \leq M$ pre $a \leq t \leq b$. Ak $a \leq x < y \leq b$, potom:

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y \ f(t), \mathrm{d}t \right| \leq M(y - x).$$

Podľa vety 9c a 9d
Nech $\epsilon > 0$. Zvoľíme si $\delta = \frac{\epsilon}{.}M$ Potom vidíme, že ak $|y - x| < \delta$, tak $\left|F(y) - F(x)\right| < \epsilon$.
To dokazuje rovnomernú spojitosť funkcie F.
Teraz predpokladajme, že f je spojitá v x_0. Nech$\epsilon > 0$, vyberieme $\delta > 0$ také, že $\left|f(t) - f(x_0)\right| < \epsilon$, ak $|t - x_0| < \delta$ a $a \leq t \leq b$. Odtiaľ, ak $x_0 - \delta < s \leq x_0 \leq t < x_0 + \delta$ a $a \leq s < t \leq b$ máme podľa vety 9d

$$\left| \frac{F(t) - F(s)}{t - s} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{t - s} \int_s^t [f(u) - f(x_0)]du \right| < \epsilon.$$

Z toho vyplýva, že $F'(x_0) = f(x_0)$. □

Veta 16. (podľa [3])

Nech f je riemannovsky integrovateľná na [a,b] ($f \in \Re$) a že na (a,b) má primitívnu funkciu F (t.j. je na (a,b) diferencovateľná tak, že $F' = f$), pričom existujú konečné limity

$$\lim_{x \to a+} F(x) \quad a \quad \lim_{x \to b-} F(x),$$

potom

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x \to b-} F(x) - \lim_{x \to a+} F(x).$$

Špeciálny prípad nastáva, ak $f \in \Re[a,b]$ a F je primitívna funkcia k funkcii f na [a,b], tak

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

To sa nazýva *(Newton-Leibnitzov vzorec)*.

Číslo

$$\lim_{x \to b-} F(x) - \lim_{x \to a+} F(x)$$

budeme označovať symbolom $\left[\mathrm{F(x)}\right]_a^b$.

Dôkaz. Nech $\epsilon > 0$. Vyberieme si nejaké delenie $\mathscr{D} = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ intervalu [a,b] také, že $U(\mathscr{D}, f, \alpha) - L(\mathscr{D}, f, \alpha) \leq \epsilon$. Veta o strednej hodnote nám poskytuje body $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ také, že

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(t_i)\Delta x_i \quad pre \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Teda

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i = F(b) - F(a).$$

Teraz z vety 4c vyplýva, že

$$\left| F(b) - F(a) - \int_a^b f(x), dx \right| \leq \epsilon.$$

Keďže to platí pre $\forall \epsilon > 0$, dôkaz je kompletný. □

Veta 17. (podľa [1])

Nech I je interval. Nech funkcie k funkcii f, $g : I \to \Re$ sú diferencovateľné funkcie na intervale I. Ak existuje primitívna funkcia k funkcii $f.g'$, tak existuje aj primitívna funkcia k funkcii $f'.g$ a platí

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x).g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$$

Dôkaz. Označme G primitívnu funkciu k funkcii $f.g'$. Definujeme funkciu $F = f.g - G$. Funkcia F je diferencovateľná na intervale I a platia rovnosti

$$F'(x) = [f(x).g(x)]' - G'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x) - f(x)g'(x) = f'(x).g(x)$$

$\square$

Definícia 8. (podľa [6])

Nech $f_1, ..., f_k$ sú reálne funkcie na [a,b] a nech $f = (f_1, f_2, ..., f_k)$ je zodpovedajúce zobrazenie na [a,b] do R^k. Ak α rastie monotónne na [a,b], hovoríme, že f je Riemannovsky integrovateľná. To značí, že $f_j \in \Re(\alpha) \quad pre \quad i = 1, 2, ..., k$. Ak to je tento prípad, definujeme

$$\int_a^b f d\alpha = \left(\int_a^b f_1 d\alpha, ..., \int_a^b f_k d\alpha \right).$$

Inými slovami $\int d\alpha$ je bod v R^k, ktorého j-ta súradnica je $\int_j d\alpha$. Vidíme, že časti **(a)**, **(c)** a **(e)** vety 9 platia pre tieto vektorovo orientované integrály. Jednoducho aplikujeme skoršie výsledky na každej súradnici. Rovnako sú pravdivé aj vety 13, 15, 16. Pre ilustráciu ponúkame analógiu vety 16.

Veta 18. (podľa [1])

Ak f a F zobrazujú interval [a,b] do $\Re^k$ a ak zároveň $F' = f$, potom platí

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

Vetu 18 uvádzame bez dôkazu.

Veta 19. (podľa [6])

Ak f zobrazuje interval [a,b] do $\Re^k$ a ak zároveň $f \in \Re(\alpha)$ pre nejakú monotónnu rastúcu funckiu α na intervale [a,b], potom $\left|f\right| \in \Re(\alpha)$ a

$$\left| \int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha \right| \leq \int_a^b |f|\,\mathrm{d}\alpha \tag{31}$$

Dôkaz. Ak $f_1, f_2, ..., f_k$ sú zložkami f, potom

$$\left|f\right| = (f_1^2 + f_2^2 + ... + f_k^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{32}$$

Podľa vety 8 , každá z funkcií f_i^2 patrí do $\Re(\alpha)$. Odtiaľ vieme, že do $\Re(\alpha)$ patrí aj ich súčet. Keďže x^2 je spojitá funkcia premennej x, vidíme, že aj táto odmonicnová

funkcia je spojitá na intervale [0,M] pre každé reálne M. Keby sme aplikovali vetu 8 ešte raz , tak z **(32)** vidíme, že $|f| \in \Re(\alpha)$, Na to, aby sme dokázali **(31)**, si zvolíme $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, kde $y_j = \int f_j d\alpha$. Z toho máme $y = \int f d\alpha$ a $|y|^2 = \sum y_i^2 = \sum y_j. \int f_j d\alpha$.
Podľa Schwarzovej nerovnosti

$$\sum y_j.f_j(t) \leq |y||f(t)| \quad (a \leq t \leq b); \tag{33}$$

Teda Veta 9b implikuje

$$|y|^2 \leq |y| \int |f| d\alpha. \tag{34}$$

Ak $y = 0$, (31) je triviálna. Ak $y \neq 0$, delenie (34) výrazom $|y|$ nám dá (31). □

3.2 Funkcie s ohraničenou variáciou

Doteraz sme v práci používali iba monotónne funkcie α. V tejto kapitole si to, čo sme zaviedli v predchádzajúcich častiach, rozšírime. Monotónne funkcie nahradíme funkciami s ohraničenou variáciou. Budeme sa zaoberať vektorovými funkciami.

Definícia 9. (podľa [7])
Máme funckiu h, ktorá zobrazuje interval [a,b] do priestoru $\mathbb{R}^k$ a delenie $\mathscr{D} = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ intervalu [a,b], pre ktoré platí: $\Delta h_i = h(x_i) - h(x_{i-1})$. Definujeme

$$V(h; a, b) = inf \sum_{i=1}^{n} \left|\Delta(h_i)\right|. \tag{35}$$

Infimum je vzaté cez všetky delenia intervalu [a,b].
$V(h; a, b)$ nazývame *totálnou variáciou funkcie* v na intervale [a,b]. Zjednodušene môžeme použiť aj označenie $V(h)$. Funkcia v sa nazýva *funkciou s ohraničenou variáciou* práve vtedy a len vtedy, ak platí: $V(h; a, b) < +\infty$.

Veta 20. (podľa [7])
Položme $h = (f_1, f_2, ..., f_k)$, ktoré zobrazujú interval [a,b] do $\mathbb{R}^k$. Funkcia h je funkciou s ohraničenou variáciou na intervale [a,b] práve vtedy a len vtedy, ak každá z vyššie spomenutých funkcií f_j je funkciou s ohraničenou variáciou na intervale [a,b]. Pre $1 \leq$

$j \leq k$ platí:

$$V(f_j) \leq V(h) \leq \sum_{r=1}^{k} V(f_r).$$

Dôkaz. Pre hociaké delenie $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ intervalu [a,b], platí:

$$\left|f_j(x_i) - f_j(x_{i-1})\right| \leq \left|h(x_i) - h(x_{i-1})\right| \leq \sum_{r=1}^{k} \left|f_r(x_i) - f_r(x_{i-1})\right|.$$

Ak uplatníme tieto nerovnosti pre $i = 1, 2, ..., n$, a potom zoberieme poslednú hornú hranicu, dostávame sa ku koncu dôkazu vety 20. □

Ukážky funkcií s ohraničenou variáciou(podľa [7])

(a) Ak funkcia f je monotónna, tak je to aj funkcia s ohraničenou variáciou na intervale [a,b] a platí $V(f) = \left|f(b) - f(a)\right|$.

(b) Ak k funkcii h existuje derivácia, ktorá je ohraničená na intervale [a,b], potom funkcia h je funkciou s ohraničenou variáciou.

(c) Funkcia f môže byť spojitá a nemusí pri tom byť funkciou s ohraničenou variáciou. Zadefinujeme si funkciu

$$f(x) = \begin{cases} x.sin\frac{\pi}{x}, & (0 < x \leq 2), \\ 0, & (x = 0) \end{cases}$$

a vyberieme si delenie, ktoré bude obsahovať body

$$0, \frac{2}{2n-1}, \frac{2}{2n-3}, ..., \frac{2}{5}, \frac{2}{3}, 2.$$

Teraz platí pre $k = 1, 2, ...$: $|f(\frac{2}{2k-1}) - f(\frac{2}{2k+1-1})| = |\frac{2}{2k-1}.sin(\frac{\pi.(2k-1)}{2}) - \frac{2}{2k+1}.sin(\frac{\pi.(2k+1)}{2})| = |\frac{2}{2k-1}sin(\pi.k + \frac{\pi}{2}) - \frac{2}{2k+1}.sin(\pi.k + \frac{\pi}{2})| = |\frac{2}{2k-1}.(-1)^{k+1} + \frac{2}{2k+1}.(-1)^{k+1}| = \frac{2}{2k-1} + \frac{2}{2k+1}$

Prislúchajúca suma z **(35)** bude vyzerať takto:

$$(2 + \frac{2}{3}) + (\frac{2}{3} + \frac{2}{5}) + ... + (\frac{2}{2n-3} + \frac{2}{2n-1}) + \frac{2}{2n-1} > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n}.$$

Ak si zvolíme dostatočne veľké n, môže byť tento súčet ľubvoľne veľký, pretože $\sum \frac{1}{n}$ diverguje.

(d) Keďže $|f(x) - f(a)| \leq V(f)$ pre každé x na intervale [a,b], z toho jasne vidíme, že každá funkcia s ohraničenou variáciou je ohraničená, pretože $|f(x)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a)| \leq |f(a)| + V(f)$.

Medzi monotónnymi funkciami a funkciami s ohraničenou variáciou je úzke prepojenie. Ale môžeme napríklad vidieť, že súčet alebo súčin dvoch monotónnych funkcií nemusí byť monotónna funkcia. Pri funkciách s ohraničenou variáciou to však platí. V nasledujúcej vete si ukážeme súvis monotónnych funkcií a funkcií s ohraničenou variáciou. Predtým si však zadefinujeme dôležité pojmy.

Definícia 10(podľa[7])
Predpokladajme, že funkcia h na intervale [a,b] zobrazuje do $\mathbb{R}^k$, a h je funkciou ohraničenej variácie. Definujeme potom

$$v_h(x) = V(h; a, x) \quad (a \leq x \leq b). \tag{36}$$

Hovoríme, že funkcia v_h je funkciou s totálnou variáciou h; v_h je monotónna rastúca na intervale [a,b], a $v_h(a) = 0$.

Veta 21(podľa [7]) Predpokladajme, že funkcia h zobrazuje interval [a,b] do $\mathbb{R}^k$ a je to funkcia s ohraničenou variáciou.
(a) Ak $a \leq x \leq y \leq b$ potom platí

$$V(h; a, y) = V(h; a, x) + V(h; x, y). \tag{37}$$

(b) Ak funkcia h je spojitá, potom je spojitá aj funkcia v_h.

Dôkaz. Ak x=a alebo y=x, (37) je triviálne, kedže $V(h; x, x) = 0$. Predpokladajme teraz $a < x < y$ a nech $\epsilon > 0$. Existuje delenie $\{x : i\}$ intervali [a,y] také, že

$$v_h(y) - \epsilon \leq \sum_{i=1}^{n} |h(x_i) - h(x_{i-1})| \leq v_h(y). \tag{38}$$

Ak x nieje z x_i a pridáme ho k deleniu $\{x_i\}$ dostaneme nové delenie pre ktoré ale stále (38) platí. Pravá strana (37) je teda dolným ohraničeným súm, ktoré sa vyskytli v (38). Keďže

$$v_h(y) - \epsilon \leq v_h(x) + V(h; x, y) \leq v_h(y);$$

a keďže ϵ bolo ľubovoľné, (37) je dokázané. Teraz budeme dokazovať časť **(b)**. Vezmeme do úvahy, že funkcia h je spojitá a že $a < y \leq b$, a tiež

$$V(h; x, y) > \delta \tag{39}$$

pre nejaké dané δ a pre každé $x \in [a, y)$ (to by malo viesť k sporu).Vezmeme $x = a$ v (39) a vidíme, že tu máme delenie $\{x_i\}$ intervalu [a,y] také, pre ktoré platí:

$$\sum_{i=1}^{n} |h(x_i) - h(x_{i-1})| > \delta. \tag{40}$$

Uvedomíme si, že $x_n = y, x_{n-1} < y$. Keďže funkcia h je spojitá, máme bod a_1 taký, že $x_{n-11} < y$, a rozdiel $|h(y) - h(x_{n-1})|$ a $|h(a_1) - h(x_{n-1})|$ je taký malý ako potrebujeme, takže (40) bude platiť ak aj zameníme y za a_1.

Veta 22(podľa[7])

Ak h je reálna funkcia s ohraničenou variáciou na intervale [a,b], existujú monotónne rastúce funkcie p a q na intervale [a,b], $p(a) = q(a) = 0$, také, že platí:

$$h(x) - h(a) = p(x) - q(x) \quad (a \leq x \leq b) \tag{41}$$

$$v_f(x) = p(x) + q(x) \quad (a \leq x \leq b) \tag{42}$$

Hovoríme, že p a q sú kladna a záporná variácia funkcie f. (41) ukazuje funkciu f ako rozdiel dvoch monotónnych funkcií.
Vetu 22 uvádzame bez dôkazu.

Poznámka 4(podľa [7])

Pri integrovaní sa zameriame radšej na funkcie ohraničenej variácie ako iba na monotónne funkcie. Funkciu α si môžeme rozložiť na rozdiel dvoch rastúcich funkcií. Vidíme, že $\int f d\alpha = \int f d\beta - \int f d\gamma$ je nezávislý od toho, aký rozklad α si zovlíme. Funkcia f bude spojitá a funkcia α bude ohraničenej variácie alebo $f \quad a \quad \alpha$ budú ohraničenej variácie a α bude spojitá.

4 Riešené príklady

Zadanie príkladu 1.

Nech funkcia α je rastúca na intervale [a,b]. Nech $a \leq x_0 \leq b$, funkcia α je spojitá v bode x_0 a $f(x_0) = 0$, ak $x \neq x_0$. Dokážte, že funkcia f je riemannovsky integorvateľná (t.j. $f \in \Re(\alpha)$) a dokážte, že platí:$\int f \mathrm{d}\alpha = 0$.

Riešenie

Zo spojitosti funkcie α: $\epsilon > 0$ a δ je také, že platí : Ak $|x - x_0| < \delta$, tak $|\alpha(x) - \alpha(x_0)| < \epsilon$.
Teraz zoberieme do úvahy delenie intervalu [a,b] také, že
$a = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n \quad pre \quad n \geq 2$ a bude platiť $|t_i - t_{i-1}| < \frac{\delta}{2}$. Bude tiež existovať také i, pre ktoré platí: $t_{i-1} < x_0 < t_{i+1}$.
Potom máme pre hocijakú voľbu $t_0^*, t_1^*, ..., t_n^* \quad (t_i^* \in [t_i, t_{i+1}])$:

$$\left| \sum_{j=1}^{n} f(t_j^*).(\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})) \right| \leq \left| f(t_i^*) \right| [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] + \left| f(t_{i+1}^*) \right| [\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)] \leq$$

$\leq \alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_{i-1}) < \epsilon$

Z definície Riemann-Stieltjesovho integrálu vidíme, že $f \in \Re(\alpha)$ a $\int f d\alpha = 0$.

Zadanie príkladu 2.

Nech je daná funkcia f, pre ktorú platí $f \geq 0$, f je spojitá na intervale [a,b], a $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$. Dokážte, že $f(x) = 0$ pre všetky $x \in [a,b]$. (Porovnajte to s Príkladom 1).

Riešenie

Dokazujeme sporom.

Predpokladajme $f(x_0) \neq 0$, pre nejaké $x_0 \in [a,b]$, napr $f(x_0) > 0$. Keďže $f(x)$ je na intervale [a,b] spojitá funkcia a $\frac{f(x_0)}{2} > 0$, existuje $\delta > 0$ také, že $|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}$ pre $\forall x \in [a,b]$ také, že $|x - x_0| < \delta$.

Nech $\eta = min(\delta, max(x_0 - a, b - x_0))$ tak, že $\eta > 0$. Nech I je interval $[x_0 - \eta, x_0]$, ak je obsiahnutý v intervale [a,b]; inak $I = [x_0, x_0 + \eta]$.

Podľa toho, ktorý je to prípad, $I \subseteq [a,b]$ a $f(x) = f(x_0) + (f(x) - f(x_0)) \geq f(x_0) - |f(x) - f(x_0)| > \frac{f(x_0)}{2}$ pre $\forall x \in I$.

Funkcie $f_1(x)$ a $f_2(x)$ definované ako

$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & (pre\ x \in I) \\ 0, & (pre\ x \notin I) \end{cases}$

a $f_2(x) = \begin{cases} f(x), & (pre\ x \notin I) \\ 0, & (pre\ x \in I) \end{cases}$

sú obidve nezáporné, ohraničené a spojité všade, okrem dvoch krajných bodov intervalu I. Taktiež sú preto obe Riemannovsky integrovateľné. Keď zoberieme do úvahy Riemannove sumy, vidíme, že :

$$\int_a^b f_1(x)dx \geq \eta.\frac{f(x_0)}{2},$$

a

$$\int_a^b f_2(x)dx \geq 0.$$

To teda v konečnom dôsledku ukazuje, že

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx \geq \eta.\frac{f(x_0)}{2} > 0,$$

čo je v rozpore s predpokladom, že $\int_a^b f(x)dx = 0$.

Zadanie príkladu 3.

Definujeme si 3 funkcie $\beta_1, \quad \beta_2, \quad \beta_3$ ako: $\beta_j(x) = 0$ ak $x < 0$,$\beta_j(x) = 1$ ak $x > 0$ pre $j = 1, 2, 3$; a $\beta_1(0) = 0$,$\beta_2(0) = 1$,$\beta_3(0) = \frac{1}{2}$. Nech funkcia f je ohraničená na intervale[-1,1].

(a) Dokážte, že $f \in \Re(\beta_1)$ práve vtedy a len vtedy, ak $f(0+) = f(0)$ a potom $\int f \, d\beta_1 = f(0)$

(b) Uveďte a dokážte podobné výsledky pre β_2.

(c) Dokážte, že $f \in \Re(\beta_3)$ práve vtedy a len vtedy, ak funkcia f je spojitá v 0.

(d) Ak funkcia f je spojitá v 0, dokážte, že $\int f \, d\beta_1 = \int f \, d\beta_2 = \int f \, d\beta_3 = f(0)$.

Riešenie

Nech $t_0 < t_1 < ... < t_n$ je nejaké delenie intervalu obsahujúce nulu. Pridaním jedného bodu k deleniu sa horný integrálny súčet zmenší a dolný integrálny súčet sa pridaním bodu do delenia naopak zväčší. Pri rozhodovaní sa, ktorá funkcia je integrovateľná a ktorá nie, môžeme predpokladať, že 0 je jeden z deliacich bodov. Nech k je index, v ktorom $t_k = 0$. Máme horný a dolný Riemann-Stieltjesov integrálny súčet:

$$\sum_{i=1}^{n} M_i.(\beta_j(t_i) - \beta_j(t_{i-1})), \quad j = 1, 2, 3$$

a

$$\sum_{i=1}^{n} m_i.(\beta_j(t_i) - \beta_j(t_{i-1})), \quad j = 1, 2, 3$$

sú v poradí pre $j = 1$ M_k a m_k, pre $j = 2$ M_{k-1} a m_{k-1}, pre $j = 3$ $\frac{M_{k-1}+M_k}{2}$ a $\frac{m_{k-1}+m_k}{2}$.

(a) Keďže $m_k \leq f(x) \leq M_k$, tak pre $0 \leq x \leq t_{k+1}$ v prvom prípade, množina horných a dolných integrálnych súčtov obsahuje prvky, ktoré sú hociako blízko k sebe navzájom práve vtedy a len vtedy, ak pre každé $\epsilon > 0$ existuje delenie s $M_k - m_k < \epsilon$.

$\Leftarrow$ Ak také delenie existuje, tak nech $\delta = t_{k+1}$. Potom máme $|f(x)-f(0)| \leq M_k - m_k < \epsilon$ pre $0 \leq x < \delta$, odtiaľ $\lim_{x\to 0+} f(0)$.

$\Rightarrow$ Ak $\lim_{x\to 0+} f(0)$, potom pre hociaké ϵ nech $\delta > 0$ je také, že $|f(x) - f(0)| < \delta$ ak $0 < x < \delta$ a nech $\mathscr{D}$ je delenie s $t_k = 0, \quad t_{k+1} < \delta$. Teraz jasne vidíme, že horné a dolné integrálne súčty sa odlišujú od $f(0)$ iba menej ako ϵ, t.j. $\int f d\beta_1 = f(0)$.

(b) $f \in \Re(\beta_2)$ práve vtedy a len vtedy, ak $\lim_{x\to 0-} f(x) = f(0)$ a ak táto podmienka platí, tak potom $\int f d\beta_2 = f(0)$. Dôkaz je identický ako v prípade (a), iba + vymeníme za - .

(c) V treťom prípade sa horný a dolný integrálny súčet líšia o $\frac{(M_k - m_k)+(M_{k-1}-m_{k-1})}{2}$.

$\Rightarrow$ Nech f je integrovateľná a teda nech existuje ľubovoľné $\epsilon > 0$ a existuje delenie $\mathscr{D}$ obsahujúce 0, s $t_k = 0$, také, že platí $U(f,\mathscr{D}) - L(f,\mathscr{D}) < \frac{\epsilon}{2}$. Označíme $\delta = min(t_{k-1}, -t_{k-1})$. Potom pre $-\delta \le x \le \delta$ platí:

$$|f(x) - f(0)| \le max\,\{M_k - m_k, M_{k-1} - m_{k-1}\} \le M_k - m_k + M_{k-1} - m_{k-1} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

A teda f je spojitá v 0.

$\Leftarrow$ Naopak, nech f je spojitá v 0. Teda k $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že: $|x| < \delta \implies |f(x) - f(0)| \le \epsilon$. Nech delenie $\mathscr{D}$ obsahuje 0 ($t_k = 0$). Teraz

$$\left|U(f,\mathscr{D}) - L(f,\mathscr{D})\right| = \left|\frac{M_k - m_k}{2} + \frac{M_{k-1} - m_{k-1}}{2}\right| = \frac{M_k - m_k}{2} + \frac{M_{k-1} - m_{k-1}}{2} \le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Teda $f \in \mathbb{R}(\beta_3)$.

Riešenie **(d)** je obsiahnuté v (a)-(c).

Zadanie príkladu 4.

Nech $f(x) = 0$ pre všetky iracionálne x a $f(x) = 1$ pre všetky racionálne x. Dokážte, že $f \notin \Re$ na intervale [a,b] pre nejaké $a < b$.

Riešenie

Každý horný integrálny súčet je rovný výrazu $b - a$ a každý dolný integrálny súčet je rovný nule. Teda množina horných a dolných integrálnych súčtov nemajú spoločnú hranicu.

Zadanie príkladu 5.

Vypočítajte hodnotu integrálu

$$\int_0^3 xd(x-[x]) =$$

kde [x] je najväčšie celé číslo, ktoré neprekračuje x

Riešenie

(a) Integrál $\int_0^3 xd(x-[x])$ si najprv rozdelíme na 3 časti. Budeme postupne integrovať na troch intervaloch.

$\int_0^3 xd(x-[x]) = \int_0^1 xd(x-[x]) + \int_1^2 xd(x-[x]) + \int_2^3 xd(x-[x])$

(i) [0,1]

Hľadáme hodnotu $\int_0^1 xd(x-[x])$.

Celá časť čísel vnútri intervalu [0,1] je rovná nule, teda príslušný integrál vyzerá takto: $\int_0^1 xd(x-[x]) = \int_0^1 xd(x-0) = \int_0^1 xdx = [\frac{x^2}{2}]_0^1 = \frac{1}{2}$ (ii) [1,2]

Hľadáme hodnotu $\int_1^2 xd(x-[x])$ Zvolíme si delenie $\mathscr{D}_1$ intervalu [1,2] takto: $\mathscr{D}_1 = (1, 1+\frac{1}{n}, 1+\frac{2}{n}, 1+\frac{3}{n}, ..., 2)$. Príslušný horný integrálny súčet tohto delenia bude vyzerať takto: $U(f, \mathscr{D}_1, \alpha)_[1,2] = \int_1^2 \mathrm{x}\mathrm{d}(x-[x]) = \sum_{k=1}^n (1+\frac{k}{n}).\Delta\alpha_k \sum_{k=1}^n (1+\frac{k}{n}).\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{n^2}.\sum_{k=1}^n k = 1+\frac{1}{n^2}.\frac{n.(n+1)}{2} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2n} = (n\to\infty)\frac{3}{2}$

(iii) [2,3]

Hľadáme hodnotu $\int_2^3 xd(x-[x])$ Zvolíme si delenie$\mathscr{D}_2$ intervalu [2,3]. $\mathscr{D}_2 = (2+\frac{1}{n}, 2+\frac{2}{n}, ..., 3)$. Príslušný horný integrálny súčet tohto delenia bude vyzerať takto: $U(f, \mathscr{D}_2, \alpha) = \sum_{k=1}^n (2+\frac{k}{n}).\Delta\alpha_k = \sum_{k=1}^n (2+\frac{k}{n}).\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{n^2}.\sum_{k=1}^n k = 2+\frac{1}{n^2}.\frac{n.(n+1)}{2} = 2+\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

Konečný výsledok teda bude:

$$\int_0^3 xd(x-[x]) = \int_0^1 xd(x-[x]) + \int_1^2 xd(x-[x]) + \int_2^3 xd(x-[x]) = \frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2} = \frac{9}{2}.$$

Zadanie príkladu 6.

Vypočítajte kladnú, zápornú a totálnu variáciu týchto funkcií:

(a) $f(x) = 3x^2 - 2x^3 \quad (-2 \leq x \leq 2)$

(b) $f(x) = [x] - x \quad (0 \leq x \leq 2)$.

Riešenie

(a) $h(x) = 3x^2 - 2x^3$, $h'(x) = 6x - 6x^2 = 6x(1 - x)$

Funkcia je na intervale [0,1] rastúca a na intervaloch [-2,0], [1,2] je klesajúca.

Najprv spočítame totálne variácie na jednotlivých intervaloch.

(i) $x \in [-2, 0] \quad v_h(x) = V(h; -2, x) = V(h; -2, -2) + V(h; -2, x) = 0 + h(-2) - h(x) = h(-2) - h(x) = 28 - 3x^2 + 2x^3$

(ii) $x \in [0, 1] \quad v_h(x) = V(h; -2, x) = V(h; -2, 0) + V(h; 0, x) = 28 + h(x) - h(0) = h(-2) + h(x) = 28 + 3x^2 - 2x^3$

(iii) $x \in [1, 2] \quad v_h(x) = V(h; -2, x) = V(h; -2, 1) + V(h; 1, x) = 29 + h(1) - h(x) = 29 + 1 - h(x) = 30 - 3x^2 + 2x^3$

Teda totálne variácie vyzerajú takto:

$$
\begin{aligned}
v_h(x) &= 28 - 3x^2 + 2x^3 \quad x \in (-2, 0) \\
&= 28 + 3x^2 - 2x^3 \quad x \in (0, 1) \\
&= 30 - 3x^2 + 2x^3 \quad x \in (1, 2)
\end{aligned}
$$

Teraz spočítame kladnú a zápornú variáciu funkcie $h(x) = 3x^2 - 2x^3$. Podľa vety 22 vieme, že platí: $h(x) - h(a) = p(x) - q(x)$ a $v_h(x) = p(x) + q(x)$, kde $p(x)$ je kladná variácia a $q(x)$ je záporná variácia funkcie. Riešime sústavu týchto hore uvedených dvoch rovníc:

Po ich sčítaní dostávame: $2p(x) = v_h(x) + h(x) - h(-2) = v_h(x) + 3x^2 - 2x^3 - 28 \Rightarrow p(x) = \frac{v_h(x)}{2} + \frac{3}{2}x^2 - x^3 - 14$.

Teda kladná variácia bude vyzerať takto:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= 0 \quad x \in (-2, 0) \\
&= 3x^2 - 2x^3 \quad x \in (0, 1) \\
&= 1 \quad x \in (1, 2)
\end{aligned}
$$

Po odčítaní vyššie uvedených rovníc (analogicky ako pri počítaní kladnej variácie) dostávame:

$$2q(x) = v_h(x) + h(-2) - h(x) = v_h(x) + 28 - 3x^2 + 2x^3 \Rightarrow q(x) = \frac{v_h(x)}{2} - \frac{3}{2}x^2 + x^3 + 14.$$

Teda záporná variácia bude vyzerať takto:

$$\begin{aligned} q(x) &= 28 - 3x^2 + 2x^3 \quad x \in (-2,0) \\ &= 28 \quad x \in (0,1) \\ &= 29 - 3x^2 + 2x^3 \quad x \in (1,2) \end{aligned}$$

(b) $h(x) = x - [x]$

Funkcia je rastúca na intervaloch [0,1] aj [1,2].

Znova najprv spočítame totálne variácie našej funkcie na jednotlivých intervaloch.

(i) $x \in [0,1]$ $\quad \mathrm{v}_h(x) = V(h;0,x) = V(h;0,0) + V(h;0,x) = 0 + f(x) - f(0) = x - 0 = x$

(ii) $x \in [1,2]$ $\quad \mathrm{v}_h(x) = V(h;0,x) = V(h;0,1) + V(h;1,x) = 1 + f(x) - f(1) = 1 + x - [x]$

Teda Totálne variácie vyzerajú takto:

$$\begin{aligned} v_h(x) &= x \quad x \in (0,1) \\ &= 1 + x - [x] \quad x \in (1,2) \end{aligned}$$

Analogicky ako v (a) spočítame kladnú a zápornú variáciu.

$2p(x) = v_h(x) + h(x) - h(a) = v_h(x) + x - [x] - 0 \Rightarrow p(x) = \frac{v_h(x)}{2} + \frac{x}{2} - \frac{[x]}{2}$

$2q(x) = v_h(x) + f(a) - f(x) = v_h(x) + 0 - x + [x] \Rightarrow q(x) = \frac{v_h(x)}{2} - \frac{x}{2} + \frac{[x]}{2}$

Kladné variácie budú vyzerať takto:

$$\begin{aligned} p(x) &= x - \frac{[x]}{2} \quad x \in (0,1) \\ &= \frac{1}{2} + x - [x] \quad x \in (1,2) \end{aligned}$$

Záporné variácie budú vyzerať takto:

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{[x]}{2} \quad x \in (0,1) \\ &= \frac{1}{2} \quad x \in (1,2) \end{aligned}$$

Záver

V našej bakalárskej práci sme sa zamerali najprv na podrobné opísanie teórie integrálu. Na začiatku sme si zadefinovali základné pojmy, bez ktorých by sme sa nevedeli zaobísť pri ďalšom písaní. Čitateľ sa mohol dozvedieť, čo je to Riemannov, resp. Riemann-Stieltjesov integrál aké sú jeho základné vlastnosti a využiteľnosť. Práca bola zmeraná na Riemann – Stieltjesov integrál. Riemann - Stieltjesov integrál je všeobecnejší prípad Riemannovho integrálu alebo lepšie sa vyjadríme, ak povieme, že Riemannov integrál je podmnožinou Riemann-Stieltjesovho integrálu. Hlavným prínosom práce bolo predovšetkým spracovanie prehľadu teórie a hlbšie pochopenie integrálneho počtu. Úžitok videla autorka najmä v tom, že sa dozvedela informácie, ktoré neboli obsiahnuté v povinných stanovách počas doterajšieho štúdia. Snažila sa taktiež o priblíženie týchto poznatkov aj čitateľovi, ktorý si chce rozšíriť svoje obzory v tejto oblasti. Na konci práce bol dôraz položený na rátanie príkladov a priblíženie tejto problematiky a jej uplatnení v praxi pre širšiu matematcikú verejnosť.

Zoznam použitej literatúry

[1] Kollár M.:*Prednášky z matematickej analýzy 2, Univerzita Komenského* Bratislava, 2010

[2] Kopáček J.: *Matematika pro fyziky III, Státne pedagogické nakladatelství*, Praha, 1986

[3] Kubáček Z., Valášek J.: *Cvičenia z matematickej analýzy II*, FMFI UK, Bratislava, 2010

[4] Kulvánek I., Mišík L., Švec M.: *Matematika I*, Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, Bratislava, 1963

[5] Rudin W.: *Analýza v reálnem a komplexním oboru*, Academia, Praha, 1977

[6] Rudin W.: *Principles of mathematical analysis*, Third edition, Mc-Graw Hill,USA 1976

[7] Rudin W.: *Principles of mathematical analysis*, Second edition, Mc-Graw Hill,USA 1964

[8] Wikipedia, the free encyclopedia, dostupné na internete(22.4.2014): *http://en.wikipedia.org/wiki/Bernhard_ Riemann*

[9] Wikipedia, the free encyclopedia, dostupné na internete(22.4.2014): *http://en.wikipedia.org/wiki/Thomas_ Joannes_ Stieltjes*