

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



BROWNOVA A POISSONOVA LIMITA BINÁRNEHO  
STROMU NA OCEŇOVANIE OPCÍÍ

BAKALÁRSKA PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**BROWNOVA A POISSONOVA LIMITA BINÁRNEHO  
STROMU NA OCEŇOVANIE OPCÍ**

**BAKALÁRSKA PRÁCA**

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika  
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika  
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
Vedúci práce: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.



Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

---

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Jakub Šiška  
**Študijný program:** ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** 9.1.9. aplikovaná matematika  
**Typ záverečnej práce:** bakalárska  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský

**Názov:** Brownova a Poissonova limita binárneho stromu na oceňovanie opcií / *Brownian and Poisson limit of the binary tree for option pricing*  
**Cieľ:** Zoznámenie sa s Brownovým pohybom a Poissonovým procesom. Naprogramovanie binárneho stromu pre oba procesy. Porovnanie výsledkov.

**Vedúci:** doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.  
**Katedra:** FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
**Vedúci katedry:** prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.  
**Dátum zadania:** 18.10.2013

**Dátum schválenia:** 14.11.2013  
doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.  
garant študijného programu

.....  
študent

.....  
vedúci práce

**Podakovanie** Chcel by som sa poďakovať doc. Mgr. Igorovi Melicherčíkovi, PhD., vedúcemu mojej práce, za jeho pomoc, nápady a rady pri písaní práce a v neposledom rade aj za jeho ochotu vzdelávať ma za hranicu zadania práce a jeho povinností. Taktiež ďakujem aj mojej priateľke, rodine a blízkym za ich podporu.

## Abstrakt

ŠIŠKA, Jakub: Brownova a Poissonova limita binárneho stromu na oceňovanie opcií [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD., Bratislava, 44s.

Práca sa venuje oceňovaniu opcií pomocou dvoch limitných podôb binárneho stromu - Brownovho a Poissonovho procesu. Cieľom práce je zoznámiť čitateľa s konceptom oceňovania opcií binárnym stromom a príslušnými limitami do spojitého času. Následne oba spojité modely nakalibrovať a porovnať ich schopnosť aproximovať trhové ceny.

**Kľúčové slová:** Oceňovanie opcií, Binárny strom, Brownov pohyb, Poissonov proces

## **Abstract**

ŠIŠKA, Jakub: Brownian and Poisson limit of the binary tree for option pricing [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD., Bratislava, 44p.

The thesis deals with options pricing using two kinds of limits of a binary tree - Brownian and Poisson process. The main goal is to present a concept of pricing options using binary trees and corresponding continuous time limits. Furthermore, we calibrate both continuous time models and compare their ability to model market data.

**Keywords:** Option pricing, Binary tree, Brownian motion, Poisson proces

# Obsah

Úvod	8
<b>1 Opcie a binárne stromy</b>	<b>10</b>
1.1 Call a Put opcie . . . . .	10
1.2 Binárne stromy . . . . .	12
1.3 Replikačné portfólio . . . . .	15
<b>2 Brownov model</b>	<b>19</b>
2.1 Zhrnutie vlastností z pravdepodobnosti . . . . .	19
2.2 Limitné rozdelenie výnosov . . . . .	20
2.3 Black-Scholesova formula . . . . .	25
<b>3 Poissonov model</b>	<b>27</b>
3.1 Poissonove rozdelenie . . . . .	27
3.2 Rozdelenie cien podkladového aktíva . . . . .	27
3.3 Poissonova formula . . . . .	31
3.4 Zovšeobecný Poissonov proces . . . . .	32
3.4.1 Lévyho procesy . . . . .	32
3.4.2 Zovšeobecnenie Poissonovho procesu . . . . .	34
<b>4 Testovanie modelov</b>	<b>35</b>
4.1 Kalibrácia . . . . .	35
4.1.1 Optimálna kalibrácia . . . . .	37
4.1.2 Prirodzená kalibrácia . . . . .	38
Záver	42
Zoznam použitej literatúry	44

## Úvod

Finančné deriváty by sa na prvý pohľad mohli javiť ako moderná záležitosť, no v skutočnosti sa prvé obchody s derivátmi objavili už v staroveku, stovky rokov pred našim letopočtom [4]. Prvý príklad opčného kontraktu ako takého zachytáva už jeden z najznámejších filozofov starovekého Grécka Aristoteles v prvom zväzku svojho diela Politika, už okolo roku 1200 pred Kristom. Tu spomína príbeh matematika a filozofa Thalesa z Milétu, ktorý bol zosmiešňovaný, pretože bol chudobný. On však všetkým ukázal, že múdrosť má cenu zlata. Koncom zimy si kúpil od majiteľov olivových lisov právo použiť lisy ako prvý, a na jeseň, keď nastala žatva, predal tieto práva majiteľom olivových plantáží mnohonásobne drahšie. Opcie sa v takej podobe ako ich poznáme dnes, teda ako kontrakt dávajúci kupujúcemu právo, nie však povinnosť v prípade kúpnej (Call) opcie kúpiť a v prípade predajnej (Put) opcie predať podkladové aktívum (napríklad akciu) za vopred stanovenú cenu, vo vopred dohodnutom čase maturity, objavili až v 90 rokoch 18. storočia na burze v New Yorku [4]. Hoci opcie už boli na svete, až do publikovania Black-Scholesovej formuly Blackom, Scholesom a Mertonom v roku 1973 nebolo jasné ako ich exaktne oceňovať. V súčasnosti majú opcie široké uplatnenie pri zaisťovaní investičných portfólií rovnako ako aj pri špekulatívnych obchodoch, čo pochopiteľne prináša aj stále väčšiu snahu prísť s novými mechanizmami pre lepší odhad ich hodnoty.

Cieľom tejto bakalárskej práce bolo zoznámiť sa s Brownovým pohybom, ktorý môžeme zaradiť medzi Itôve procesy a Poissonovým procesom, zástupcom Lévyho procesov a ďalej preskúmať použiteľnosť oboch modelov na oceňovanie opcií. V prvej kapitole čitateľa oboznámime s jednoduchým modelom, z ktorého vychádza aj spomínaná Black-Scholesova formula. Binárny stromový model je model, ktorý predpokladá, že sa obchoduje len raz za určité obdobie, napríklad jeden mesiac, týždeň, deň, alebo aj sekunda a má len veľmi obmedzenú množinu cien podkladového aktíva, ktoré môžu nastať. Následne sme ukázali aj ekvivalentný postup založený na dynamickom replikovaní správania opcie portfóliom zloženým z kombinácie bezrizikového dlhopisu a podkladového aktíva. Ako sa však ukázalo, obidva tieto prístupy si pýtajú veľkú daň za zvýšenie presnosti modelu v podobe rastúcej výpočtovej náročnosti, ktorá sa stáva prekážkou aj pre modernú techniku. Východiskom z tejto situácie sú limitné prechody do spojitého



času dvoma spôsobmi, postupným zmešňovaním času medzi dvoma obchodmi z mesiacov na týždne, dni, hodiny, sekundy, ... až na limitne nekonečne malý časový interval. V ďalších dvoch kapitolách úvádzame odvodenia Brownovej limity - Black-Scholesovej formuly na oceňovanie opcií a Poissonovej formuly - výslednej opčnej formuly Poissonovho procesu. V čom sa modely od seba diametrálne líšili bolo to, že v prípade Brownovho modelu sú ponechané konštantné pravdepodobnosti s akými cena narastie a klesne, no postupne sa rozdiely medzi výnosmi zmenšujú. Poissonov model si ponecháva konštantné rozdiely medzi výnosmi, ale s limitným prechodom sa budú meniť pravdepodobnosti, s akými nastávajú. Pri odvodení modelov sme vychádzali z knihy A. Černého [1]. V závere kapitol sa nachádzajú praktické aplikácie formúl v príkladoch a taktiež aj zovšeobecnenie Poissonovho procesu v kontexte Lévyho procesov.

Posledná, prakticky orientovaná časť práce je zameraná na otestovanie a porovnanie kvality oboch prístupov. Obidve výsledné formuly sme naprogramovali v Matlabe. Vybrali sme si reprezentatívnu vzorku ôsmich akcií a akciového indexu S&P500 na ktorých budeme modely testovať. Ako prvé sme si potrebovali stanoviť kritérium ako sme posudzovali presnosť modelov. Zvolili sme si preto mieru nepresnosti tak, aby pre každé aktívum osobitne odzrkadľovala odchýlku cien stanovených modelom od reálnych cien z trhu [6]. Nakoniec postupne porovnávame rôzne prístupy ku kalibrácii modelov a vyvodíme závery, kedy a ako je vhodné výsledné formuly používať.

# 1 Opcie a binárne stromy

Finančný derivát je typ cenného papiera obchodovaného na finančných burzách, prípadne aj na mimoburzových trhoch (OTC), ktorého cena sa odvíja od ceny podkladového aktíva, ku ktorému sa daný derivát viaže. Asi najjednoduchším príkladom derivátu je CFD, teda contract for difference, úplne kopírujúci cenu podkladového aktíva, čiže zjednodušene povedané ide o dohodu, že pri uzatváraní pozície v čase  $T$  si kupujúci a predávajúci vyplatia rozdiel medzi cenou podkladového aktíva v čase uzatvorenia obchodu  $S_0$  a cenou v čase  $T$   $S_T$  bez toho aby reálne vlastnili dané aktívum. O niečo zaujímavejšie sú forwardy a futurity. Forward je ako už napovedá názov dohoda o budúcom obchode, ktorou sa kupujúci a predávajúci zaviazujú k predaju, resp. kúpe podkladového aktíva za dopredu dohodnutú cenu v dopredu stanovený čas, pričom táto dohoda je pre obe strany záväzná. Neskôr ukážeme, že pre opcie to neplatí. Futurita je štandardizovaný typ forwardového kontraktu. Zo základných derivátov môžeme ešte spomenúť swapy, ktoré predstavujú dohodu o výmene série platieb v budúcnosti medzi účastníkmi obchodu.

## 1.1 Call a Put opcie

V čom sa teda líšia základné európske Vanilla opcie od už spomenutých derivátov? Pri opčnom kontrakte má kupujúci právo, nie však povinnosť v prípade Call opcie kúpiť a v prípade Put opcie predať podkladové aktívum za vopred stanovenú cenu, ktorú voláme strike price, alebo realizačná cena opcie a značíme  $K$ . Existujú dva druhy základných opcií. Pri európskom type sa dá opcia uplatniť len v čase expirácie, ten si označíme  $T$ . Americký typ umožňuje opciu uplatniť kedykoľvek medzi kúpou a expiráciou. Podstatný rozdiel opcií oproti forwardu je, že kupujúci nie je kontraktom viazaný a v prípade, že je to preňho nevýhodné nemusí opciu uplatniť. Pozornému oku určite neunikne dôležitý dôsledok vyplývajúci z tejto skutočnosti a síce fakt, že cena opcie (pre Call opciu ju budeme označovať  $C_0$  a pre Put opciu  $P_0$ ) musí byť kladná, keďže odhliadnuc od nákupnej ceny môže kupujúcemu v budúcnosti priniesť iba nezáporné peňažné toky, exaktne povedané hodnota opcie pri expirácii v čase  $T$  je pre Call opciu  $C_T = \max(S_T - K, 0)$  a pre Put opciu  $P_T = \max(K - S_T, 0)$ . Pre zjednodušenie bu-

deme celé oceňovanie aplikovať na Call opcie, postup v prípade Put opcií je analogický. Zjavne, hodnota opcie bude funkciou cien podkladového aktíva, časovej periódy  $T$  a strike price  $K$ .

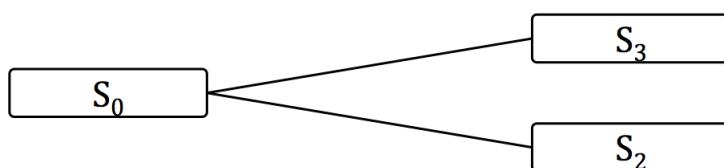
Podme si celý princíp ilustrovať na príklade. Akcia Apple je na súčasnej cene (11.4.2014)  $S_0 = 519,61$  dolára, pozrime sa na Call opciu s realizačnou cenou  $K = 515$  dolárov, ktorá expiruje za 14 dní. V roku 2014 je na burze New York Stock Exchange, skrátene NYSE, 252 dní, kedy sa obchoduje [8] a tým pádom časovú periódu  $T$  vypočítame ako pomer počtu obchodných dní do expirácie opcie, tých je 10 a počtu obchodných dní v roku, ktorý preškálujeme tak aby sme dostali údaj v mesiacoch  $T = \frac{10}{252} * 12 = 0,4762$ . Skôr, než si ukážeme ako by sa táto opcia dala oceniť, sa môžeme pozrieť na opčnú burzu CBOE [6], s akou cenou sa reálne obchoduje. Vidíme, že trhová cena danej opcie, teda právo kúpiť akciu Apple za dva týždne za cenu 515 dolárov má v súčasnosti hodnotu 16,325 dolára. Túto sumu budeme nazývať opčná prémia.

Povedzme si ešte niečo o tom ako by sa taká opcia dala využiť. Použitie by sme mohli rozdeliť na dva prístupy. Jedným je špekulácia a druhým hedging. Predstavme si investora, ktorý vie, že spoločnosť Apple budúci mesiac organizuje konferenciu WWDC 2014 a očakáva, že Tim Cook sa postaví na pódium a predstaví nový iPhone, čím by vyhnal cenu akcie výrazne nahor. Zároveň však vie aj to, že v prípade ak by predsa len nový telefón nepredstavil medzi investormi by nastalo sklamanie a ceny by sa mohli prepadať. Preto namiesto po akcií Apple nakúpi opcie, s ktorými pri takejto špekulácii riskuje iba ich nákupnú cenu, teda opčnú prémiiu, pričom v prípade rastu ceny akcie má zisk neobmedzený ale oproti zisku v prípade nákupu akcie menší o opčnú prémiiu. Iný obchodník špekulujúci na trhu by si mohol myslieť, že ostatní investori už očakávajú o novom telefóne zahrnuli do svojich pozícií a preto cena už tieto očakávania reflektuje, takže cena nemá prečo rásť a pravdepodobne ostane v pásme alebo v prípade sklamania bude klesať. Rozhodne sa preto predať Call opciu a tá mu v prípade obchodovania v pásme alebo poklesu ceny prinesie zisk v podobe opčnej prémiiu. Pozrime sa teraz na tú istú situáciu z iného pohľadu. Predstavme si, že dôchodkový fond má vo svojom portfóliu podiel akcií Apple a zo zákona nesme hodnota fondu klesnúť pod určitú hodnotu. Správcovia fondu vedia, že v prípade ak by novinku nepredstavili hrozí prepád hodnoty akcie a tým aj hodnoty fondu, preto si potrebujú poistiť aby fond neklesol pod určitú

hodnotu. Nakúpia preto Put opcie, ktoré im zaistia, že v prípade poklesu hodnoty budú môcť akcie predať za určenú cenu a tým poistia (hedgujú) hodnotu fondu. Opäť by na druhej strane mohol stáť investor, ktorý by si myslel, že ak by aj Tim neukázal nový iPhone, investori vedia, že ho s určitosťou predstaví v septembri a preto prepad ceny akcie neočakáva a rozhodne sa predať Put opciu, na ktorej opäť zarobí opčnú prémie v prípade obchodovania na úrovni strike price alebo rastu ceny akcie.

## 1.2 Binárne stromy

Máme Call opciu s realizačnou cenou  $K$  expirujúcu za časovú periódu  $T$ , podkladové aktívum so súčasnou cenou  $S_0$  a bezrizikovou úrokovú mieru  $r$ . Binárny strom predstavuje akýsi zjednodušený model vývoja ceny podkladového aktíva s diskretným časom. Periódu  $T$  si rozdelíme na rovnako dlhé časové úseky  $\Delta t$ . Predpokladáme, že na konci periódy  $\Delta t$  sú len 2 možnosti, ktoré môžu nastať, cena aktíva vzrastie na  $S_3$  s pravdepodobnosťou  $p$  alebo klesne na  $S_2$  s pravdepodobnosťou  $1 - p$ . Tieto pravdepodobnosti budeme nazývať objektívne pravdepodobnosti. Na úvod budeme vychádzať z jednoperiódového modelu, ktorý následne zovšeobecníme.



**Obr. 1:** Všeobecný jednokrokový binárny strom

Chceme určiť cenu opcie, ktorá má v čase  $\Delta t$  hodnotu  $C_3$  v prípade rastu ceny na  $S_3$  a hodnotu  $C_2$  v prípade poklesu ceny podkladového aktíva na  $S_2$ . Začneme tak, že zostrojíme bezrizikové portfólio, ktorého hodnota je rovnaká v prípade rastu aj poklesu ceny aktíva zložené z opcie s hodnotami  $C_i$   $i = 0, 2, 3$  a  $\Delta$  akcií.

$$C_3 - \Delta S_3 = C_2 - \Delta S_2 \quad (1.1)$$

pre množstvo podkladového aktíva v portfóliu dostávame:

$$\Delta = \frac{C_3 - C_2}{S_3 - S_2} \quad (1.2)$$

Analogicky vieme napísať hodnotu portfólia v čase  $t = 0$ . Využijúc bezarbitrážny princíp finančnej matematiky, môžeme porovnať súčasnú a diskontovanú budúcu cenu bezrizikového portfólia.

$$C_0 - \Delta S_0 = e^{-r\Delta t}(C_3 - \Delta S_3) \quad (1.3)$$

vyjadríme si hodnotu opcie v čase  $t = 0$

$$\begin{aligned} C_0 &= \Delta S_0 + e^{-r\Delta t}(C_3 - \Delta S_3) \\ &= \frac{C_3 - C_2}{S_3 - S_2} S_0 + e^{-r\Delta t} \left( C_3 - \frac{C_3 - C_2}{S_3 - S_2} S_3 \right) \\ &= e^{-r\Delta t} \left( \frac{C_3 S_0 e^{r\Delta t} - C_2 S_0 e^{r\Delta t} + S_3 C_2 - S_2 C_3}{S_3 - S_2} \right) \\ &= e^{-r\Delta t} \left[ \frac{(S_0 e^{r\Delta t} - S_2) C_3}{S_3 - S_2} + \frac{(S_3 - S_0 e^{r\Delta t} - S_2 + S_2) C_2}{S_3 - S_2} \right] \\ &= e^{-r\Delta t} \left[ \frac{S_0 e^{r\Delta t} - S_2}{S_3 - S_2} C_3 + \left( 1 - \frac{S_0 e^{r\Delta t} - S_2}{S_3 - S_2} \right) C_2 \right] \\ &= e^{-r\Delta t} [qC_3 + (1 - q)C_2] \end{aligned} \quad (1.4)$$

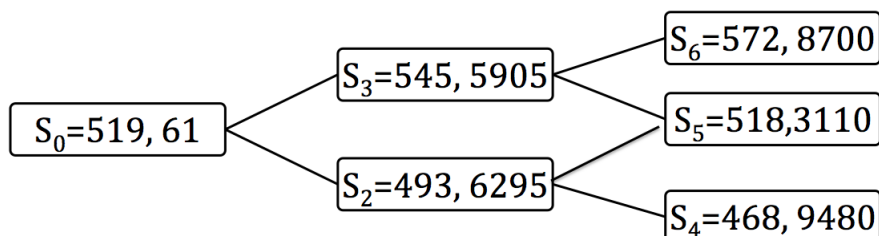
dá sa ľahko ukázať, že pre

$$q = \frac{S_0 e^{r\Delta t} - S_2}{S_3 - S_2} \quad (1.5)$$

platí  $0 < q < 1$ , keďže v opačnom prípade by bola možná arbitráž. Zároveň je možné si všimnúť, že súčasná hodnota opcie je diskontovaná stredná hodnota pri rizikovo neutrálnych pravdepodobnostiach  $E^Q$ . Pri zovšeobecnení jednokrovového stromu na  $n$ -krovový, skladaním jednokrovových modelov budeme uvažovať jednoperiódové výnosy  $R_u$  a  $R_d$ , konštantné v čase. V ľubovoľnom uzle s cenou podkladového aktíva  $S_{now}$  môže cena narásť na  $S_{up} = S_{now} * R_{up}$  alebo klesnúť na  $S_{down} = S_{now} * R_{down}$ . Dosadíme tieto vzťahy do výpočtu rizikovo neutrálnych pravdepodobností a ukážeme, že sú v každom uzle binárneho stromu rovnaké.

$$\begin{aligned} q &= \frac{S_{now} e^{r\Delta t} - S_{now} * R_{down}}{S_{now} * R_{up} - S_{now} * R_{down}} \\ &= \frac{e^{r\Delta t} - R_{down}}{R_{up} - R_{down}} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Viacukrokový binárny strom sa so zväčšujúcim počtom krokov stáva presnejší, no stúpa aj výpočtová náročnosť. Poďme si celý princíp oceňovania opcií pomocou binárnych stromov ilustrovať na príklade akcie firmy Apple, ktorý sme už spomínali vyššie.



**Obr. 2:** Dvojkrokový binárny stromový model vývoja cien akcie Apple

**Príklad 1.1.** Pozeráme sa na európsku Call opciu so strike price  $K = 515$ , ktorá expiruje o 2 týždne. Momentálne sa akcia obchoduje na úrovni  $S_0 = 519,61$ . Rozdelíme si dvojtýždňovú periódu  $T = 0,4762$  na dve polovice, čím získame binárny strom hĺbky 2 a  $\Delta t = \frac{T}{2} = 0,2381$ . Pre ilustráciu predpokladajme, že cena akcie každý týždeň s pravdepodobnosťou  $p = 1/2$  vzrastie na  $R_{up} = 1,05$  násobok hodnoty a s pravdepodobnosťou  $1 - p = 1/2$  klesne na  $R_d = 0,95$  násobok. Bezrizikový mesačný výnos na trhu je  $r = 0,002$ . Vypočítajme si najskôr aké budú ceny podkladového aktíva v jednotlivých uzloch stromu. Po prvom týždni bude cena  $S_3 = 1,05 * S_0 = 545,5905$  ak pôjde hore a  $S_2 = 0,95 * S_0 = 493,6295$  v prípade, že pôjde dole. O týždeň neskôr ak cena opäť narastie bude cena podkladového aktíva  $S_6 = 1,05 * S_3 = 572,8700$ , ak predtým poklesla a teraz vzrastie alebo naopak, tak bude  $S_5 = 1,05 * S_2 = 518,3110$  a ak obidva týždne klesala bude hodnota akcie na konci periódy T  $S_4 = 0,95 * S_2 = 468,9480$  dolárov. Hodnoty opcií pri expirácii sú  $C_6 = 67,8700$ ,  $C_5 = 3,3110$  a  $C_4 = 0$ . Teraz si potrebujeme vypočítať rizikovo neutrálne pravdepodobnosti. Pretože rast resp. pokles cien sa s časom nemení, sú aj tieto pravdepodobnosti pre každú jednokrokovú podčasť binárneho stromu rovnaké.

$$q = \frac{S_0 e^{r\Delta t} - S_2}{S_3 - S_2} = \frac{519,61 * e^{0,002 * 0,2381} - 493,6295}{545,5905 - 493,6295} = 0,5048$$

Hodnotu opcie v uzloch 2 a 3 vypočítame ako diskontovanú strednú hodnotu z konco-

vých hodnôt.

$$\begin{aligned} C_3 &= e^{-r\Delta t} E^Q [C_5, C_6] = e^{-r\Delta t} [qC_6 + (1 - q)C_5] \\ &= e^{-0,002 \cdot 0,2381} [0,5048 \cdot 57,8700 + (1 - 0,5048) \cdot 3,3110] = 30,8357 \\ C_2 &= e^{-r\Delta t} E^Q [C_4, C_5] = e^{-r\Delta t} [qC_5 + (1 - q)C_4] \\ &= e^{-0,002 \cdot 0,2381} [0,5048 \cdot 3,3110 + (1 - 0,5048) \cdot 0] = 1,6705 \end{aligned}$$

Analogickým postupom vypočítame aj hodnotu opcie v súčasnosti  $C_0$ , tentokrát ako diskontovanú strednú hodnotu z  $C_2$  a  $C_3$ .

$$\begin{aligned} C_0 &= e^{-r\Delta t} E^Q [C_3, C_2] = e^{-r\Delta t} [qC_3 + (1 - q)C_2] \\ &= e^{-0,002 \cdot 0,2381} [0,5048 \cdot 30,8357 + (1 - 0,5048) \cdot 1,6705] = 16,3842 \end{aligned}$$

Vidíme, že dvojperiódový model ocení európsku Call opciu na akciu Apple s realizačnou cenou  $K = 515$  expirujúcu za 2 týždne na  $C_0 = 16,3842$  dolárov, pričom reálna trhová cena je 16,325 dolára. S pribúdajúcim počtom krokov binárneho modelu by sme dosiahli presnejší výsledok, no tento spôsob je z časového a výpočtového hľadiska veľmi neefektívny.

### 1.3 Replikačné portfólio

Na ten istý problém sa dá pozrieť aj inak. Pokúsime sa z podkladového aktíva a bezrizikového cenného papiera (dlhopisu) zostaviť portfólio, ktoré bude mať v každom uzle stromu všetky vlastnosti replikovanej opcie - rizikovosť, výplaty aj hodnoty. Musíme rozlišovať medzi statickou a dynamickou replikáciou. Pri statickej replikácii už na začiatku zostrojené portfólio netreba meniť, no pri dynamickej replikácii, čo je aj prípadom viackrokového binárneho stromu, treba v každom uzle zasiahnuť a zmeniť množstvá aktív. Poďme si na jednom kroku binárneho stromu ilustrovať ako také opciu replikujúce portfólio vypadá. Skladáme portfólio z dlhopisu na ktorého nominálnej hodnote v princípe nezáleží, preto budeme uvažovať dlhopis ktorý ma nominálnu hodnotu v čase  $t = 0$  1 a v čase  $t = \Delta t$  vyplatí  $e^{r\Delta t}$  dolárov. Druhá zložka portfólia je akcia, ktorá má v čase  $t = 0$  hodnotu  $S_0 = a$  a v čase  $t = \Delta t$  hodnotu  $S_3$  s pravdepodobnosťou  $p$  alebo hodnotu  $S_2$  s pravdepodobnosťou  $1 - p$ . Uvažujme  $\xi$  kusov podkladového aktíva

a  $\psi$  dlhopisov. Pre replikačné portfólio musí platiť:

$$\xi S_3 + \psi e^{r\Delta t} = C_3$$

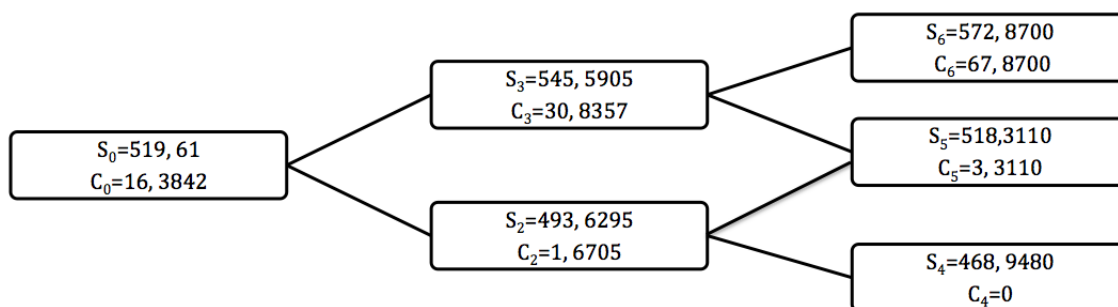
$$\xi S_2 + \psi e^{r\Delta t} = C_2$$

Sústava má jednoznačné riešenie

$$\xi = \frac{C_3 - C_2}{S_3 - S_2} \quad (1.7)$$

$$\psi = e^{-r\Delta t} \left[ C_3 - \left( \frac{C_3 - C_2}{S_3 - S_2} \right) S_3 \right] \quad (1.8)$$

V nasledujúcom príklade budeme hľadať portfólio replikujúce Call opciu na akciu Apple z príkladu 1.1.



**Obr. 3:** Binárny stromový model s cenami akcie Apple a hodnotami danej opcie, resp. hodnotami replikačného portfólia v uzloch modelu

**Príklad 1.2.** Začneme v uzle pri  $S_0$ . Dosadením do vzťahov (1.7) a (1.8) dostávame

$$\xi = \frac{C_3 - C_2}{S_3 - S_2} = \frac{30,8357 - 1,6705}{545,5905 - 493,6295} = 0,5613$$

$$\begin{aligned} \psi &= e^{-r\Delta t} \left[ C_3 - \left( \frac{C_3 - C_2}{S_3 - S_2} \right) S_3 \right] \\ &= e^{-0,002 \cdot 0,2381} \left[ 30,8357 - \left( \frac{30,8357 - 1,6705}{545,5905 - 493,6295} \right) \cdot 545,5905 \right] = -275,2731 \end{aligned}$$

V čase  $t = 0$  máme dlhopis v hodnote -275,2731, čo sa dá interpretovať ako úver 275,2731 dolárov a 0,5613 akcie Apple v hodnote  $S_0 = 519,61$  dolára, čo spolu dáva

$$0,5613 \cdot S_0 - 275,2731 = 0,5613 \cdot 519,61 - 275,2731 = 16,3842 = C_0$$



Inak povedané, v čase  $t = 0$  musíme zaplatiť 16.3842 dolárov za portfólio, ktoré v čase  $t = \Delta t$  prinesie výplatu  $C_3$  v prípade, že cena akcie pôjde nahor a  $C_2$  ak bude klesať, čiže naše portfólio pre prvý časový tik dokonalou náhradou danej Call opcie. V čase  $t = \Delta t$  musíme upraviť portfólio podľa toho či cena akcie vzrástla alebo poklesla. Najskôr prípad ak vzrástla na hodnotu  $S_3$ . Opäť analogicky vypočítame množstvá  $\xi$  a  $\psi$ .

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{C_6 - C_5}{S_6 - S_5} = \frac{57,8700 - 3,3110}{572,8700 - 518,3110} = 1 \\ \psi &= e^{-r\Delta t} \left[ C_6 - \left( \frac{C_6 - C_5}{S_6 - S_5} \right) S_6 \right] \\ &= e^{-0,002 * 0,2381} \left[ 57,8700 - \left( \frac{57,8700 - 3,3110}{572,8700 - 518,3110} \right) * 572,8700 \right] = -514,7548\end{aligned}$$

Ak by cena akcie vzrástla navýšili by sme v čase  $t = \Delta t$  pôžičku na 514,7548 dolárov a dokúpili by sme 0,5613 akcie.

$$S_3 - 514,7548 = 545,5905 = 16.3842 = C_3$$

Už nám ostáva vyšetriť iba prípad ak cena akcie poklesne na  $S_4$ .

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{C_5 - C_4}{S_5 - S_4} = \frac{3,3110 - 0}{518,3110 - 468,9480} = 0,0671 \\ \psi &= e^{-r\Delta t} \left[ C_5 - \left( \frac{C_5 - C_4}{S_5 - S_4} \right) S_5 \right] \\ &= e^{-0,002 * 0,2381} \left[ 3,3110 - \left( \frac{3,3110 - 0}{518,3110 - 468,9480} \right) * 518,3110 \right] = -31,4392\end{aligned}$$

Vidíme, že akby cena podkladového aktíva v čase  $t = \Delta t$  bola  $S_2$  predali by sme 0,9329 akcie a zo získaných prostriedkov by sme vrátili časť úveru.

$$0,06718 * S_2 - 31,4392 = 0,06718 * 493.6295 - 31,4392 = 1.6705 = C_2$$

Hodnota portfólia by bola aj teraz rovná hodnote opcie v uzle  $S_2$ .

Vidíme ako by sa dalo portfóliom zloženým z podkladového aktíva a bezrizikového dlhopisu dokázať replikovať správanie, hodnoty a výplaty opcií tak, že po každom diskretnom tiku času upravíme váhy portfólia. Táto teória však v realite naráža na veľké prekážky. Čas v skutočnosti nie je diskretný ale spojitý takže na ľubovoľne dlhej perióde  $T$  by bolo treba zloženie portfólia upraviť nekonečne veľa krát. Aj v prípade,

žeby sme sa rozhodli váhy meniť iba povedzme každú minútu je tu ďalší problém v podobe trenia trhu, teda transakčných nákladov na obchody, Bid - Ask spreadu, či rôznych úrokových mier za aké si vieme požičať peniaze a akými sa peniaze bezrizikovo úročia.

## 2 Brownov model

Výpočet hodnôt opcií cez binárny stromový model sa so zvyšujúcim sa počtom krokov  $\frac{T}{\Delta t} \rightarrow \infty$  stáva výpočtovo príliš náročný aj pre súčasnú techniku. Preto potrebujeme limitne prejsť od diskrétného k spojitému času. Jedna možnosť je ponechať pravdepodobnosti a zmenšovať časové tiky  $\Delta t$  binárneho stromu. Takouto limitou binárneho stromu je Brownov pohyb a v konečnom dôsledku Black-Scholesova formula. Odvodeniu Brownovej limity sa budeme venovať v tejto kapitole a budeme postupovať podľa odvodenia uvedeného A. Černým v [1]. Ďalšou možnosťou je ponechať konštantné rozdiely medzi možnými výnosmi podkladového aktíva a v meniť pravdepodobnosti, čo vedie k Poissonovmu modelu, ktorého odvodenie uvidíme v 3. kapitole.

### 2.1 Zhrnutie vlastností z pravdepodobnosti

Ako prvé, však uvidíme bez dôkazu niektoré základné poznatky z pravdepodobnosti a štatistiky, ktoré využijeme neskôr pri odvádzaní limitnej podoby rozdelenia logaritmickej výnosov aktív.

Majme náhodnú veličinu  $X$  s diskrétnym alebo spojitým rozdelením. Jej strednú hodnotu budeme označovať  $E(X)$  a pre  $\forall a, b \in R$  platí:  $E(aX + b) = aE(X) + b$ . Disperziu (Variáciu)  $X$  značíme  $Var(X)$  a pre  $\forall a, b \in R$  platí  $Var(aX + b) = a^2Var(X)$  a pre štandardnú odchýlku  $Std(X) = \sqrt{Var(X)}$  máme pre  $\forall a, b \in R$ :  $Std(aX + b) = |a|Std(X)$ .

Ak sú  $X$  a  $Y$  dve spojité náhodné veličiny, potom pre disperziu ich súčtu  $X + Y$  platí  $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X, Y)$ , kde  $Cov(X, Y)$  je kovariancia  $X$  a  $Y$ . Odtiaľ dostávame, že pre nezávislé náhodné veličiny  $X_1, X_2, \dots, X_n$  platia vzťahy

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) \quad (2.1)$$

$$Var(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = Var(X_1) + Var(X_2) + \dots + Var(X_n) \quad (2.2)$$

## 2.2 Limitné rozdelenie výnosov

Najskôr odvodíme strednú hodnotu a disperziu rozdelenia výnosov za malú časovú periódu  $\Delta t \rightarrow 0$ . Našou úlohou je nájsť ich limitné podoby

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} E^{Q_{\Delta t}}[\ln(R(T))] \quad (2.3)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} Var^{Q_{\Delta t}}[\ln(R(T))] \quad (2.4)$$

Predpokladáme, že jednoperiódové výnosy sú navzájom nezávislé a pre malú periódu  $\Delta t$  môžeme predpokladať, že sú aj rovnako rozdelené. Zároveň vieme, že výnosy pre rôzne periódny sa správajú podľa nasledovného vzťahu ilustrovaného pre roky a mesiace.

$$R_{rok} = R_{janur} \cdot R_{februr} \dots R_{december}$$

$$\ln(R_{rok}) = \ln(R_{janur}) + \ln(R_{februr}) + \dots + \ln(R_{december})$$

Následne z (2.1) a (2.2) a zovšeobecnením nasledujúcich vzťahov pre výnosy dostávame

$$E^{Q_{\Delta t}}[\ln(R(T))] = \frac{T}{\Delta t} E^{Q_{\Delta t}}[\ln(R(\Delta t))] \quad (2.5)$$

$$Var^{Q_{\Delta t}}[\ln(R(T))] = \frac{T}{\Delta t} Var^{Q_{\Delta t}}[\ln(R(\Delta t))] \quad (2.6)$$

Keďže uvažujeme limitne malú dĺžku periódy  $\Delta t$ , tak aj  $E^{Q_{\Delta t}}[\ln(R(\Delta t))]$  a  $Var^{Q_{\Delta t}}[\ln(R(\Delta t))]$  sú nutne veľmi malé čísla. Vďaka tomu môžeme hľadať strednú hodnotu a disperziu v nasledovnom tvare

$$E^{Q_{\Delta t}}[\ln(R(\Delta t))] = \mu_Q \Delta t + o(\Delta t) \quad (2.7)$$

$$Var^{Q_{\Delta t}}[\ln(R(\Delta t))] = \sigma_Q^2 \Delta t + o(\Delta t) \quad (2.8)$$

Spojením (2.5) so (2.7) a (2.6) s (2.8) dostávame:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} E^{Q_{\Delta t}}[\ln(R(T))] = \mu_Q T \quad (2.9)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} Var^{Q_{\Delta t}}[\ln(R(T))] = \sigma_Q^2 T \quad (2.10)$$

Jedna z najznámejších viet v celej teórii pravdepodobnosti, tzv. Centrálna limitná veta hovorí, že súčet nezávislých, rovnako rozdelených náhodných veličín pre počet náhodných veličín idúci do nekonečna má v limite normálne rozdelenie. Úloha sa nám

tým pádom zjednodušila na hľadanie dvoch parametrov normálneho rozdelenia. Na to aby sme vedeli povedať, čo je  $\mu_Q$  a  $\sigma_Q^2$  potrebujeme vyjadriť ľavé strany rovníc (2.7) a (2.8). Začneme s aproximovaním rizikovo neutrálnych pravdepodobností  $q_u(\Delta t)$  a  $q_d(\Delta t)$ . Pri odvodení binárneho stromu v predchádzajúcej kapitole (1.6) sme ukázali

$$q_u(\Delta t) = \frac{R_f(\Delta t) - R_d(\Delta t)}{R_u(\Delta t) - R_d(\Delta t)} \quad (2.11)$$

$$q_d(\Delta t) = 1 - q_u(\Delta t) \quad (2.12)$$

Vzhľadom na vlastnosti disperzie a strednej hodnoty má zmysel rozdeliť si náhodnú veličinu, v tomto prípade logaritmický výnos na náhodnú časť so strednou hodnotou 0 a konštantnú časť.

$$\ln(R_{mesiac}) = E(\ln(R_{mesiac})) + [\ln(R_{mesiac}) - E(\ln(R_{mesiac}))]$$

Tento postup aplikujeme aj na  $\ln(R_{\Delta t})$  tak, že oddelíme konštantnú strednú hodnotu  $\mu\Delta t$  a zároveň pred druhú zátvorku vyberieme odmocninu z disperzie  $\sqrt{\Delta t}$ , čím dostaneme normalizovanú náhodnú veličinu v zátvorke z normálneho rozdelenia so strednou hodnotou 0 a disperziou 1

$$\ln(R_{\Delta t}) = \mu\Delta t + \sqrt{\Delta t}(\ln(R_1) - \mu) \quad (2.13)$$

Teraz aproximujeme pomocou Taylorovho radu druhého stupňa pre funkciu  $e^x$ , kde  $x$  je  $\ln(R_{\Delta t})$  v okolí bodu  $x_0 = 0$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\begin{aligned} R_{\Delta t} &= e^{\ln(R_{\Delta t})} \\ &= e^{\mu\Delta t + \sqrt{\Delta t}(\ln(R_1) - \mu)} \\ &= 1 + \mu\Delta t + \sqrt{\Delta t}(\ln(R_1) - \mu) + \frac{(\mu\Delta t + \sqrt{\Delta t}(\ln(R_1) - \mu))^2}{2} = \\ &+ o((\mu\Delta t + \sqrt{\Delta t}(\ln(R_1) - \mu))^2) \\ &= 1 + \underbrace{\sqrt{\Delta t}(\ln(R_1) - \mu)}_X + \Delta t \underbrace{\left(\mu + \frac{(\ln(R_1) - \mu)^2}{2}\right)}_Y + o(\Delta t) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Tak isto rozvineme aj  $R_f$ . Stačí použiť Taylorov polynóm 1. stupňa.

$$\begin{aligned} R_f\Delta t &= 1 + r\Delta t + o(\Delta t) \\ r &= \ln(R_{f1}) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Následne dosadením (2.14) do (2.11) dostávame

$$\begin{aligned}
q_u(\Delta t) &= \frac{1 + r\Delta t - (1 + X_d\sqrt{\Delta t} + Y_d\Delta t) + o(\Delta t)}{1 + X_u\sqrt{\Delta t} + Y_d\Delta t - (1 + X_d\sqrt{\Delta t} + Y_d\Delta t) + o(\Delta t)} = \\
&= \frac{-X_d\sqrt{\Delta t} + (r - Y_d)\Delta t + o(\Delta t)}{(X_u - X_d)\sqrt{\Delta t} + (Y_u - Y_d)\Delta t + o(\Delta t)} = \\
&= \frac{-X_d + (r + Y_d)\Delta t + o(\Delta t)}{X_u - X_d + (Y_u - Y_d)\sqrt{\Delta t} + o(\Delta t)} = \\
&= -\frac{X_d}{X_u - X_d} \left(1 - \frac{r - Y_d}{X_d}\sqrt{\Delta t} + o(\Delta t)\right) \left(1 + \frac{Y_u - Y_d}{X_u - X_d}\sqrt{\Delta t} + o(\Delta t)\right)^{-1}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Tu opäť využijeme Taylorov polynóm, tentokrát pre funkciu  $(1 + x)^{-1}$ , kde  $x = \frac{Y_u - Y_d}{X_u - X_d}\sqrt{\Delta t} + o(\Delta t)$

$$\begin{aligned}
q_u\Delta t &= -\frac{X_d}{X_u - X_d} \left(1 - \frac{r - Y_d}{X_d}\sqrt{\Delta t} + o(\Delta t)\right) \left(1 - \frac{Y_u - Y_d}{X_u - X_d}\sqrt{\Delta t} + o(\Delta t)\right) \\
&= -\frac{X_d}{X_u - X_d} \left(1 - \left(\frac{r - Y_d}{X_d} + \frac{Y_u - Y_d}{Y_u - Y_d}\right)\sqrt{\Delta t} + o(\Delta t)\right)
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Z definície náhodnej veličiny  $X$  vieme, že  $E(X) = 0$  a preto pre objektívne pravdepodobnosti  $p_u$  a  $p_d$  nutne platí  $p_u X_u = -p_d X_d$ . Odpočítame od oboch strán  $p_u X_d$  a od tej istej pôvodnej rovnice aj  $p_d X_u$ . Vznikli nám dve rovnosti:

$$p_u(X_u - X_d) = -X_d \tag{2.18}$$

$$p_d(X_u - X_d) = X_u \tag{2.19}$$

Označíme si  $z = X_u - X_d$ , v novom zápise:

$$X_u = p_d z \tag{2.20a}$$

$$X_d = -p_u z \tag{2.20b}$$

$$Y_u = \frac{p_d^2 z^2}{2} + \mu \tag{2.20c}$$

$$Y_d = \frac{p_u^2 z^2}{2} + \mu \tag{2.20d}$$

Následne dosadením (2.20) do (2.17) získavame:

$$\begin{aligned}
q_u\Delta t &= p_u \left(1 + \frac{r - \mu - \frac{p_d^2 z^2}{2}}{-p_u z} + \frac{p_d^2 - p_u^2}{2z} z^2\right) \sqrt{\Delta t} + o(\Delta t) \\
&= p_u + \left(\frac{r - \mu}{z} - \frac{p_u p_d z}{2}\right) \sqrt{\Delta t} + o(\Delta t)
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Odvodili sme si vzťah rizikovo neutrálnych  $q_u(\Delta t)$ ,  $q_d(\Delta t)$  pravdepodobností a objektívnych pravdepodobností  $p_u$  a  $p_d$ . Ukážeme si, akú strednú hodnotu a disperziu má náhodná veličina  $X$ , ktorá s pravdepodobnosťou  $p_u$  nadobúda hodnotu  $X_u$  a s pravdepodobnosťou  $p_d$  nadobúda hodnotu  $X_d$ . Pre jej strednú hodnotu platí

$$\mu = E(X) = p_d X_d + p_u X_u \quad (2.22)$$

Využijúc fakt, že  $p_u + p_d = 1$  pre disperziu dostávame

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= Var(X) = \\ &= E(X - E(X))^2 = \\ &= p_u(p_d(X_u - X_d))^2 + p_d(p_u(X_u - X_d))^2 \\ &= p_u p_d (X_u - X_d)^2 (p_u + p_d) \\ &= p_u p_d (X_u - X_d)^2 \\ &= p_u p_d z^2 \end{aligned} \quad (2.23)$$

S využitím (2.22) a (2.23) môžeme vzťahy pre rizikovo neutrálne pravdepodobnosti prepísať

$$q_u(\Delta t) = p_u + \alpha \sqrt{\Delta t} + o(\Delta t) \quad (2.24a)$$

$$q_d(\Delta t) = p_d - \alpha \sqrt{\Delta t} + o(\Delta t) \quad (2.24b)$$

Kde  $\alpha$  je

$$\alpha = \frac{r - \mu - \frac{\sigma^2}{2}}{\ln(R_u(1)) - \ln(R_d(1))} \quad (2.25)$$

$\sigma^2$  je disperzia mesačných výnosov,  $\mu$  je ich stredná hodnota, môžeme si ju predstaviť aj ako očakávaný mesačný výnos podkladového aktíva, a  $r$  je bezrizikový mesačný logaritmickej výnos

$$\mu = E[\ln(R(1))] \quad (2.26a)$$

$$\sigma^2 = Var[\ln(R(1))] \quad (2.26b)$$

$$r = \ln(R_f(1)) \quad (2.26c)$$

Opäť s odvolaním sa na základné poznatky z pravdepodobnosti a štatistiky môžeme napísať

$$\ln(R(\Delta t)) = \mu\Delta t + \sqrt{\Delta t}(\ln(R(1)) - \mu) \quad (2.27)$$

$$\ln(R_f(\Delta t)) = r\Delta t \quad (2.28)$$

Už máme všetko potrebné na to, aby sme ukázali aký tvar majú oba parametre normálneho rozdelenia logaritmických výnosov podkladového aktíva  $\mu_Q$  a  $\sigma_Q^2$ . Ako prvú si vyjadíme strednú hodnotu:

$$\begin{aligned} \mu_Q &= E^{Q\Delta t}[\mu\Delta t + \sqrt{\Delta t}(\ln(R(1)) - \mu)] \\ &= \mu\Delta t + E^{Q\Delta t}[\sqrt{\Delta t}(\ln(R(1)) - \mu)] \\ &= \mu\Delta t + \Delta t \underbrace{(p_u(\ln(R_u(1)) - \mu) + p_d(\ln(R_d(1)) - \mu))}_{E^P[\ln(R(1))]=0} + \\ &\quad + \alpha\Delta t(\ln(R_u(1)) - \mu - \ln(R_d(1)) + \mu) + o(\Delta t) \\ &= \underbrace{[\mu + \alpha(\ln(R_u(1)) - \ln(R_d(1)))]}_{r - \frac{\sigma^2}{2}} \Delta t + o(\Delta t) \end{aligned} \quad (2.29)$$

podobne aj pre disperziu platí

$$\begin{aligned} \sigma_Q^2 &= Var^{Q\Delta t}(\mu\Delta t + \sqrt{\Delta t}(\ln(R(1)) - \mu)) \\ &= Var^{Q\Delta t}(\sqrt{\Delta t}(\ln(R(1)) - \mu)) \\ &= E^{Q\Delta t}[(\sqrt{\Delta t}(\ln(R(1)) - \mu))^2] - E^{Q\Delta t}[(\sqrt{\Delta t}(\ln(R(1)) - \mu))]^2 \end{aligned} \quad (2.30)$$

Pravá časť je rádu  $\Delta t^2$  a preto ju môžeme nahradiť  $o(\Delta t)$ . Pokračujeme:

$$\begin{aligned} Var^{Q\Delta t}(\sqrt{\Delta t}(\ln(R(1)) - \mu)) &= p_u\Delta t(\ln(R_u(1)) - \mu)^2 + p_d\Delta t(\ln(R_d(1)) - \mu)^2 + o(\Delta t) = \\ &= \sigma^2\Delta t + o(\Delta t) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Porovnaním (2.30) a (2.31) s (2.7) a (2.8) získavame podobu parametrov rozdelenia mesačných výnosov

$$\mu_Q = r - \frac{\sigma^2}{2} \quad (2.32)$$

$$\sigma_Q^2 = \sigma^2 \quad (2.33)$$

Pre celkovú periódu  $T$  implicitne platí

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} E^{Q\Delta t}[\ln(R(T))] = (r - \frac{\sigma^2}{2})T \quad (2.34)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} Var^{Q\Delta t}[\ln(R(T))] = \sigma^2 T \quad (2.35)$$



Vidíme, že limita Brownovho pohybu pre  $\Delta t \rightarrow 0$  pri rizikovo neutrálnych pravdepodobnostiach dáva normálne rozdelenie so strednou hodnotou  $\mu_Q = (r - \frac{\sigma^2}{2})T$  a disperziou  $\sigma_Q^2 = \sigma^2 T$ .

## 2.3 Black-Scholesova formula

V 1. kapitole sme si pri odvodzovaní binárnych stromových modelov ukázali, že súčasná cena Call opcie  $C_0$  je daná ako stredná hodnota z hodnôt opcie na konci periódy  $T$  pri rizikovo neutrálnych pravdepodobnostiach diskontovaná do súčasnosti

$$C_0 = e^{-rT} E^Q[C_T] \quad (2.36)$$

kde  $C_T = \max(S_T - K, 0)$ . Zároveň sme v predchádzajúcej časti odvodili, že limitné rozdelenie cien podkladového aktíva je normálne rozdelenie so strednou hodnotou  $(r - \frac{\sigma^2}{2})T$  a disperziou  $\sigma^2 T$  a potom  $\ln(R(T)) \sim N\left((r - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T\right)$ .  $S_T = S_0 R_T$ , čiže  $\ln(S_T) = \ln(S_0) + \ln(R_T)$ . Teda

$$\ln(S_T) \sim N\left(\ln(S_0) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T\right) \quad (2.37)$$

(2.36) tak môžeme prepísať ako:

$$C_0 = e^{-rT} E^Q \left[ (e^{\ln(S_T)} - e^{\ln(K)}) |_{\ln(S_T) > \ln(K)} \right] \quad (2.38)$$

Kôli rozsahu a zložitosti uvádzame bez dôkazu nasledujúce tvrdenie. Pre náhodnú veličinu  $X$  z normálneho rozdelenia so strednou hodnotou  $\tilde{\mu}$  a disperziou  $\tilde{\sigma}^2$  a konštantu  $a$  platí:

$$E[(e^X - e^a) |_{X > a}] = e^{\tilde{\mu} + \frac{\tilde{\sigma}^2}{2}} \Phi\left(\frac{\tilde{\mu} + \tilde{\sigma}^2 - a}{\tilde{\sigma}}\right) - e^a \Phi\left(\frac{\tilde{\mu} - a}{\tilde{\sigma}}\right) \quad (2.39)$$

a tento vzťah pre  $\tilde{\mu} = \ln(S_0) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T$  a  $\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 T$  dáva slávnu formulu publikovanú Blackom, Scholesom a Mertonom v roku 1973:

$$C_0 = S_0 \Phi\left(\frac{\frac{S_0}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - K e^{-rT} \Phi\left(\frac{\frac{S_0}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \quad (2.40)$$

Výslednú formulu vyskúšame na príklade s akciou Apple z prvej kapitoly

**Príklad 2.1.** Chceme oceniť európsku Call opciu so strike price  $K = 515$ , expirujúcou za časovú periódu  $T = 0,4762$  mesiaca, pri súčasnej cene akcie (11.4.2014) Apple

$S_0 = 519,61$ , pri bezrizikovom výnose  $r = 0,002$ . Ako odhad parametra  $\sigma$  použijeme dvojročnú volatilitu  $\sigma = 0,08$ . Hodnoty dosadíme do (2.40) a dostávame

$$\begin{aligned} C_o &= S_0 \Phi \left( \frac{\frac{S_0}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma \sqrt{T}} \right) - K e^{-rT} \Phi \left( \frac{\frac{S_0}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma \sqrt{T}} \right) \\ &= 519,61 * \Phi \left( \frac{\frac{519,61}{515} + \left(0,002 + \frac{0,08^2}{2}\right) * 0,4762}{0,08 * \sqrt{0,4762}} \right) \\ &\quad - 515 * e^{-0,002 * 0,4762} \Phi \left( \frac{\frac{519,61}{515} + \left(0,002 - \frac{0,08^2}{2}\right) * 0,4762}{0,08 \sqrt{0,4762}} \right) \\ &= 14.12 \end{aligned}$$

Rozdiel v cene vypočítanej Black - Scholesovou formulou oproti reálnej trhovej cene sa dá pripísať iným predstavám účastníkov trhu o volatilitate, než je historická volatilita. Na situáciu sa môžeme pozrieť z opačnej strany. Pretože jediný voľný parameter tejto formuly je práve volatilita, môžeme spätne z nej zistiť akú volatilitu odhaduje trh. Túto hodnotu nazývame implikovaná volatilita. Využitím predchádzajúceho príkladu dostávame implikovanú volatilitu akcie Apple

$$\sigma_{imp} = 0,0957$$

Historická volatilita akcie Apple, vypočítaná z výnosov za posledné dva roky je 0,08, trh však odhaduje mierne vyššiu volatilitu na úrovni 0,0957.

### 3 Poissonov model

Pri limite Brownovho pohybu sme nechali konštantné objektívne pravdepodobnosti  $p_u$  a  $p_d$  a časový interval  $\Delta t$  sme limitne poslali do nuly. Pointa Poissonovej limity je úplne opačná, ponecháme konštantné rozdiely medzi logaritmickými výnosmi podkladového aktíva  $\ln(R_u)$  a  $\ln(R_d)$  konštantné, ale pri limitnom prechode budeme meniť pravdepodobnosti. So zmenšujúcou sa periódou  $\Delta t \rightarrow 0$  sa pravdepodobnosť výnosu  $\ln(R_u)$  blíži k jednej a pravdepodobnosť výnosu  $\ln(R_d)$  ide k nule. Takto sa dostaneme k procesu, kde cena aktíva väčšinu času lineárne rastie a raz začas poskočí smerom nadol o pevné číslo  $J$ . Ľahko sa dá nahliadnuť, že tým pádom aj množina možných cien podkladového aktíva resp. hodnôt opcie na konci periódy  $T$  budú diskkrétne, narozdiel od Brownovho pohybu, kde ceny aktíva boli z normálneho rozdelenia.

#### 3.1 Poissonove rozdelenie

Hovoríme, že diskrétna náhodná veličina  $X$  má Poissonove rozdelenie s parametrom  $\lambda > 0$  ak pre  $k = 0, 1, 2, \dots$  je pravdepodobnosť

$$P[X = k] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad (3.1)$$

potom stredná hodnota a disperzia  $X$  sú

$$E[X] = \lambda$$

$$Var[X] = \lambda$$

Poissonove rozdelenie sa dá interpretovať ako pravdepodobnosť, že daná udalosť nastane v danom časovom intervale presne  $k$  krát, keď v priemere sa vyskytuje  $\lambda$  krát za rovnaký časový interval. Pre ilustráciu si môžeme predstaviť náhodnú veličinu, ktorá bude reprezentovať koľko krát trafí Roger Federer za zápas eso, ak ich v priemere za zápas nastriela  $\lambda$ . Očividne môže nadobúdať hodnoty  $k = 0, 1, 2, \dots$  a pravdepodobnosť ich nastatia sa dá vyjadriť Poissonovym rozdelením.

#### 3.2 Rozdelenie cien podkladového aktíva

Podobne ako v predchádzajúcich kapitolách si budeme strednú hodnotu mesačných logaritmyckých výnosov označovať  $\mu$  a ich disperziu  $\sigma^2$ . Vlastnosti modelu spomínané

v úvode tejto kapitoly si môžeme matematicky zapísať

$$\ln(R_u(\Delta t)) = \tilde{\mu}\Delta t \quad (3.2)$$

$$\ln(R_d(\Delta t)) = \tilde{\mu}\Delta t - J \quad (3.3)$$

$$p_u = 1 - \lambda\Delta t \quad (3.4)$$

$$p_d = \lambda\Delta t \quad (3.5)$$

odkiaľ možno odvodiť strednú hodnotu pri objektívnych pravdepodobnostiach, ktorú si označíme  $E^P$ , z logaritmického výnosu za periódu  $\Delta t$

$$\begin{aligned} E^P[\ln(R(\Delta t))] &= (1 - \lambda\Delta t)\tilde{\mu}\Delta t + \lambda\Delta t(\tilde{\mu}\Delta t - J) = \\ &= (\tilde{\mu} - \lambda J)\Delta t \end{aligned} \quad (3.6)$$

rovnako postupujeme aj pri disperzii logaritmického výnosu na perióde  $\Delta t$  a s využitím zistení z (2.32) dostávame

$$\begin{aligned} Var^P[\ln(R(\Delta t))] &= p_u p_d (X_u - X_d)^2 = \\ &= (1 - \lambda\Delta t)\lambda\Delta t J^2 = \\ &= \lambda\Delta J^2 - (\lambda\Delta t J)^2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

logaritmický výnos za periódu dĺžky 1 je súčtom  $\frac{1}{\Delta t}$  výnosov na periódach dĺžky  $\Delta t$ . Zároveň predpokladáme, že výnosy na neprekrývajúcich sa časových periódach sú nezávislé. Preto pre  $\mu$  a  $\sigma^2$  platí

$$\frac{1}{\Delta t} E[\ln(R(\Delta t))] = E[\ln(R(1))] = \mu \quad (3.8)$$

$$\frac{1}{\Delta t} Var[\ln(R(\Delta t))] = Var[\ln(R(1))] = \sigma^2 \quad (3.9)$$

Dosadením (3.8) do (3.6) a (3.9) do (3.7) dostávame

$$\tilde{\mu} - \Delta t J = \mu \quad (3.10)$$

$$J^2(\lambda - \lambda^2 \Delta t) = \sigma^2 \quad (3.11)$$

Vyjadrením posunu (driftu)  $\tilde{\mu}$  a skoku  $J$  zo sústavy sme dostali

$$\tilde{\mu}(\Delta t) = \mu + \frac{\sqrt{\lambda}\sigma}{\sqrt{1 - \lambda\Delta t}} \quad (3.12)$$

$$J(\Delta t) = \frac{\sigma}{\sqrt{\lambda}\sqrt{1 - \lambda\Delta t}} \quad (3.13)$$

Kedže uvažujeme veľmi malú periódu  $\Delta t \approx 0$  má zanedbateľný vplyv na hodnoty  $\tilde{\mu}$  a  $J$  a teda môžeme dosadiť  $\Delta t = 0$ , čo nám dáva

$$\tilde{\mu}(0) = \mu + \sqrt{\lambda}\sigma \quad (3.14)$$

$$J(0) = \frac{\sigma}{\sqrt{\lambda}} \quad (3.15)$$

V Brownovom modele nadobúda  $\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)$  akúkoľvek hodnotu z intervalu  $(-\infty, \infty)$  naproti tomu ako sme už spomenuli, Poissonov model pripúšťa iba diskrétnu množinu hodnôt, pre  $0, 1, 2, 3, \dots$  skokov v intervale  $[0, T]$  máme

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) = \tilde{\mu}$$

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) = \tilde{\mu} - J$$

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) = \tilde{\mu} - 2J$$

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) = \tilde{\mu} - 3J$$

...

označíme si  $N_t$  počet skokov medzi časom 0 a  $t$ . Potom všeobecne

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = \tilde{\mu}t - N_t J \quad (3.16)$$

$$S_t = S_0 e^{\tilde{\mu}t - N_t J} \quad (3.17)$$

Počty skokov v nezávislých časových intervaloch sú navzájom nezávislé, preto aj  $N_{\Delta t}, N_{2\Delta t} - N_{\Delta t}, N_{3\Delta t} - N_{2\Delta t}, \dots$  sú nezávislé náhodné veličiny. Rozdeľme si interval  $(0, T)$  na  $\frac{T}{\Delta t}$  časových periód dĺžky  $\Delta t$ . Potom zrejme  $P[\text{žiaden skok v intervale } (0, T)] = P[0 \text{ skokov v } (0, \Delta t) \wedge 0 \text{ skokov v } (\Delta t, 2\Delta t) \wedge \dots \wedge 0 \text{ skokov v } ((\frac{T}{\Delta t} - 1)\Delta t, T)]$ . Inak povedané

$$\begin{aligned} p_u^{\frac{T}{\Delta t}} &= (1 - \lambda\Delta t)^{\frac{T}{\Delta t}} \\ &= e^{\frac{T}{\Delta t} \ln(1 - \lambda\Delta t)} \end{aligned} \quad (3.18)$$

teraz využijeme Taylorov rad pre funkciu  $\ln(x + \Delta x)$ :  $\ln(x + \Delta x) - \ln(x) = \frac{\Delta x}{x} + o(\Delta x)$  pre  $x = 1$  a  $\Delta x = -\lambda\Delta t$ .

$$p_0 = e^{-\lambda T + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}} \quad (3.19)$$

keďže  $e^x$  je spojitá funkcia v  $x$  na celom svojom definičnom obore

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t \rightarrow 0} p_0(\Delta t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} e^{-\lambda T + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}} = \\ &= e^{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (-\lambda T + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t})} = \\ &= e^{-\lambda T}\end{aligned}\tag{3.20}$$

tým pádom sa dá ľahko nahliadnuť, že pre malé  $\Delta t \rightarrow 0$  bude pravdepodobnosť presne  $n$  skokov počas periódy  $T$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} P[N_t = n] = \frac{(\lambda T)^n}{n!} e^{-\lambda T}\tag{3.21}$$

a teda pre  $\Delta t \rightarrow 0$  má počet skokov  $N_t$  Poissonove rozdelenie a jeho stredná hodnota a disperzia majú tvar

$$E[N_t] = \lambda T\tag{3.22}$$

$$Var[N_t] = \lambda T\tag{3.23}$$

teraz potrebujeme vyjadriť rizikovo neutrálne pravdepodobnosti  $q_u$  a  $q_d$ .

$$q_u(\Delta t) = \frac{R_f(\Delta t) - R_d(\Delta t)}{R_u(\Delta t) - R_d(\Delta t)}\tag{3.24}$$

$$q_d(\Delta t) = 1 - q_u(\Delta t)\tag{3.25}$$

Pravú stranu rovnosti (3.13)  $\frac{\sigma}{\sqrt{\lambda_P \sqrt{1 - \lambda_P \Delta t}}}$  si vieme prepísať ako  $\frac{\sigma}{\sqrt{\lambda_P}} (1 - \lambda_P \Delta t)^{-1/2}$  a na druhú časť použiť Taylorov rozvoj pre funkciu  $(1+x)^{-1/2}$   $(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + o(x)$ .

$$\tilde{\mu}_{\Delta t} = \underbrace{\mu + \sqrt{\lambda_P} \sigma}_{\tilde{\mu}} + \frac{1}{2} \lambda_P \Delta t + o(\Delta t)\tag{3.26}$$

$$J_{\Delta t} = \underbrace{\frac{\sigma}{\sqrt{\lambda_P}}}_J + \underbrace{\frac{1}{2} \sigma \sqrt{\lambda_P} \Delta t}_{B} + o(\Delta t)\tag{3.27}$$

následne na aproximovanie výnosov využijeme Taylorov rad prvého stupňa pre funkciu  $e^x$ :  $e^x = 1 + x + o(x)$ , kde najskôr  $x = \tilde{\mu} \Delta t + o(\Delta t)$  a potom  $x = (\mu - B) \Delta t + o(\Delta t)$ .

$$R_u(\Delta t) = e^{\tilde{\mu} \Delta t} = 1 + \tilde{\mu} \Delta t + o(\Delta t)\tag{3.28}$$

$$R_d(\Delta t) = e^{\tilde{\mu} \Delta t - J_{\Delta t}} = e^{-J_{\Delta t}} (1 + (\tilde{\mu} - B) \Delta t + o(\Delta t))\tag{3.29}$$

$$R_f(\Delta t) = 1 + r \Delta t + o(\Delta t)\tag{3.30}$$

Dosadením týchto vzťahov do (3.24) dostávame:

$$q_u(\Delta t) = \frac{1 - e^{-J}(\tilde{\mu} - B)\Delta t + o(\Delta t)}{1 - e^{-J} + (\tilde{\mu}(1 - e^{-J}) + e^{-J}B)\Delta t + o(\Delta t)} \quad (3.31)$$

vyberieme z čitateľa aj menovateľa  $(1 - e^{-J})$  a tým získame rovnosť

$$q_u(\Delta t) = \left(1 + \frac{r - e^J(\tilde{\mu} - B)}{1 - e^{-J}}\Delta t + o(\Delta t)\right) \left(1 + \underbrace{\left(\tilde{\mu} + \frac{e^{-J}B}{1 - e^{-J}}\right)\Delta t + o(\Delta t)}_x\right)^{-1} \quad (3.32)$$

aplikovaním Taylorovho radu pre funkciu  $(1 + x)^{-1}$  dostávame:

$$\begin{aligned} q_u(\Delta t) &= 1 + \left(\frac{r - e^J(\tilde{\mu} - B)}{1 - e^{-J}} - \tilde{\mu} - \frac{e^{-J}B}{1 - e^{-J}}\right)\Delta t + o(\Delta t) = \\ &= 1 + \frac{r - \tilde{\mu}}{1 - e^{-J}}\Delta t + o(\Delta t) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Označíme si  $\frac{\tilde{\mu} - r}{1 - e^{-J}} = \lambda_Q$ . Tento parameter vyjadruje intenzitu s akou nastávajú skoky ceny nadol pri rizikovo neutrálnych pravdepodobnostiach.

### 3.3 Poissonova formula

Pripomeňme si ešte raz, že súčasnú cenu opcie počítame ako do súčasnosti diskontovanú strednú hodnotu z hodnôt opcie na konci periódy  $T$  pri rizikovo neutrálnych pravdepodobnostiach. Označme si  $C(T, N_T)$  hodnotu opcie v čase maturity. Potom

$$C(T, N_T) = \max(S_T - K, 0) = \max(S_0 e^{\tilde{\mu}T - N_T J} - K, 0) \quad (3.34)$$

Tento vzťah spolu s odvodeným rozdelením pri rizikovo neutrálnych pravdepodobnostiach spolu dávajú Poissonovu formulu na oceňovanie opcií:

$$\begin{aligned} C_0 &= e^{-rT} E^Q [C(T)] \\ &= e^{-(\lambda_Q + r)T} \sum_{n=0}^{\infty} \max(S_0 e^{\tilde{\mu}T - nJ} - K, 0) \frac{(\lambda_Q T)^n}{n!} \end{aligned} \quad (3.35)$$

**Príklad 3.1.** Pomocou Poissonovej formuly (3.35) oceníme európsku opciu na akciu Apple s realizačnou cenou  $K = 515$  a maturitou  $T = 0,4762$  mesiaca. Akcia sa v súčasnosti obchoduje na úrovni  $S_0 = 519,61$ . Na odhad očakávaného výnosu a volatility akcie použijeme historické dvojročné dáta a dostávame  $\mu = 0,01$  a  $\sigma = 0,08$  intenzitu

skokov odhadneme  $\lambda = 5$ . Bezrizikový výnos je  $r = 0,002$ . Dopočítame parametre vyskytujúce sa v konečnej formule

$$\begin{aligned}\tilde{\mu} &= \mu + \sqrt{\lambda}\sigma = 0,01 + \sqrt{5} * 0,08 = 0,1889 \\ J &= \frac{\sigma}{\sqrt{\lambda}} = \frac{0,08}{\sqrt{5}} = 0,0358 \\ \lambda_Q &= \frac{0,1889 - 0,002}{1 - e^{-0,0358}} = 5,3147\end{aligned}$$

dosadením vypočítaných parametrov do (3.35) dostávame

$$\begin{aligned}C_0 &= e^{-0,002*0,4762} E^Q [C(0, 4762)] \\ &= e^{-(5,3147+0,002)*0,4762} \sum_{n=0}^{\infty} \max(519,61 * e^{0,1889*0,4762-n*0,0358} - 515,0) \frac{(5,3147 * 0,4762)^n}{n!} \\ &= 14.6212\end{aligned}\tag{3.36}$$

Cena vypočítaná Poissonovým modelom je rovnako ako v prípade Black - Scholesovej formuly nižšia ako trhová, ktorá je 16,325 dolára, no je k trhovej cene o kúsok bližšie. Rozdiel oproti trhovej cene je spôsobený odhadovaním troch rôznych parametrov, pričom prirodzená intenzita skokov  $\lambda$ , inak povedané priemerný počet skokov za mesiac nemá ani jasnú interpretáciu.

### 3.4 Zovšeobecnený Poissonov proces

Pri pohľade na Poissonov proces sa ponúka otázka, či je naozaj nutné aby bola dĺžka skoku  $J$  pevne dané číslo, konštantné počas celej doby do expirácie  $T$ . Ako o chvíľu ukážeme, Poissonov proces patrí do oveľa širšej triedy Lévyho procesov, pomenovaných podľa Paula Lévyho, popredného matematika 20. storočia. [5]

#### 3.4.1 Lévyho procesy

Na to aby sme mohli zdefinovať Lévyho proces, potrebujeme najskôr poznať pojem charakteristickej  $\phi_X : R \rightarrow C$  funkcie náhodnej premennej  $X$ , ktorá je v [3] definovaná

$$\phi_X(u) = E [e^{iuX}]\tag{3.37}$$

kde  $i = \sqrt{-1}$ . Charakteristická funkcia jednoznačne určuje rozdelenie náhodnej veličiny  $X$  a tým pádom ak sa dve náhodné veličiny zhodujú v charakteristickej funkcii, sú aj



rovnako rozdelené. Zároveň sa dá z (3.37) odvodiť, že ak  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sú nezávislé náhodné veličiny, potom pre ich súčet  $Y = \sum_{i=1}^n X_i$  a jeho charakteristickú funkciu  $\phi_Y$  platí

$$\phi_Y(u) = \phi_{X_1}(u)\phi_{X_2}(u)\phi_{X_3}(u)\dots\phi_{X_n}(u) = \prod_{i=1}^n \phi_{X_i}(u) \quad (3.38)$$

**Definícia 3.2.** Majme rozdelenie s charakteristickou funkciou  $\phi(u)$ . Ak pre každé prirodzené číslo  $n$  platí, že  $\phi(u)$  je tiež  $n$ -tou mocninou charakteristickej funkcie, nazýva sa toto rozdelenie pravdepodobnosti *nekonečne deliteľné*.

Výhodou nekonečne deliteľných procesov je, že si ich môžeme ľubovoľne rozdeliť na viac častí, ktorých rozdelenia (charakteristickú funkciu) poznáme.

**Definícia 3.3.** Uvažujme funkciu  $f : [a, b] \rightarrow R$ , pre ktorú platí, že pre všetky body  $t \in (a, b]$  má funkcia  $f$  limitu zľava a je spojitá sprava. Autor v [5] nazýva proces generovaný takouto funkciou *cadlag* z francúzskeho *continue á droite et limites á gauche*

Vidíme, že každá spojitá funkcia je zároveň *cadlag*. Môžeme prejsť k definícii Lévyho procesu uvedenej v [2].

**Definícia 3.4.** *Lévyho proces* je nekonečne deliteľný stochastický *cadlag* proces  $(X_t)_{t \geq 0}$  s hodnotami v  $R^d$ , začínajúci v nule, matematicky  $X_0 = 0$  spĺňajúci nasledujúce podmienky:

1. nezávislé prírastky: pre každú rastúcu postupnosť časov  $t_0, t_1, \dots, t_n$  sú náhodné premenné  $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  nezávislé.
2. stacionárne prírastky: rozdelenie  $X_{t+h} - X_t$  nezávisí od  $t$ .
3. stochastická spojitosť:  $\forall \varepsilon > 0 \lim_{h \rightarrow 0} P(|X_{t+h} - X_t| \geq \varepsilon) = 0$

Z tretieho bodu definície môžeme vidieť, že pravdepodobnosť, že skok nastane v nejakom konkrétnom čase  $t$  je 0. Zároveň z nekonečnej deliteľnosti vieme popísať rozdelenie prírastkov za periódu  $[t, t+h]$  pomocou charakteristickej funkcie. Prírastok  $X_{t+h} - X_t$  na perióde  $[t, t+h]$  bude mať charakteristickú funkciu  $(\phi(u))^h$ , nezávislú od  $t$ , tým pádom ani rozdelenie prírastku nezávisí od  $t$ , čo je tvrdenie druhého bodu definície. Kumulatívna distribučná funkcia  $\psi(u) = \ln \phi(u)$  sa riadi nasledujúcim predpisom, známym pod názvom *Lévyho - Khinitchinova formula*.

$$\psi(u) = i\gamma u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} - 1 - iux 1_{|x| < 1} \nu(dx) \quad (3.39)$$

Z formuly sa dá vidieť, že proces je charakterizovaný trojicou Lévyho parametrov  $[\gamma, \sigma^2, \nu(dx)]$ , zastupujúcich tri nezávislé časti Lévyho procesu: lineárnu deterministickú časť, Brownovu časť a skokovú časť.

### 3.4.2 Zovšeobecnenie Poissonovho procesu

Špeciálnym prípadom Lévyho procesu s nulovou Brownovou časťou je aj Poissonov proces, ktorým sa zaoberáme v tejto práci. Tento proces však vieme zovšeobecniť tak, že veľkosť skokov nebude konštantná, ale bude mať vlastné rozdelenie. Majme základný Poissonov proces s parametrom  $\lambda > 0$ , kde  $P[N_t = n] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$ . Nech  $Z_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  sú nezávislé rovnako rozdelené náhodné veličiny s charakteristickou funkciou  $\phi_Z(u)$ . Potom sumu, kde  $t \geq 0$

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Z_i \quad (3.40)$$

nazývame zovšeobecnený Poissonov proces. Jeho hodnota  $X_t$  v čase  $t$  je súčtom  $N_t$  náhodných premenných z rovnakého rozdelenia.

Ak odhliadneme od lineárnej časti Poissonovho procesu, vidíme, že ak dosadíme do (3.40) pre všetky  $i$   $Z_i = -J$  dostávame z rovnice pre všeobecný Poissonov proces základný, s ktorým pracujeme v tejto práci. Charakteristická funkcia zovšeobecného Poissonovho procesu  $(X_t)_{t \geq 0}$  má tvar

$$E [e^{iuX_t}] = e^{t\lambda \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iux} - 1) f(dx)}, \forall u \in R \quad (3.41)$$

Z definície a charakteristickej funkcie sa dajú odvodiť nasledujúce vlastnosti zovšeobecného Poissonovho procesu. Poissonov proces, či už základný alebo zovšeobecný, je jediný typ Lévyho procesu, ktorý je po častiach lineárny. Časy  $T_i$ , kedy nastávajú skoky majú rovnaké rozdelenie ako obyčajný Poissonov proces s rovnakou intenzitou skokov  $\lambda$ . Veľkosti skokov  $Z_i$  sú nezávislé a majú rovnaké rozdelenie. Z charakteristickej funkcie potom vyplýva nekonečná deliteľnosť procesu.

## 4 Testovanie modelov

V tejto kapitole si rozoberieme výsledky a pozorovania z testovania modelov na reálnych trhových dátach. Pre oba procesy sme naprogramovali v Matlabe výsledné formuly na ocenenie európskych Call opcií (2.40) a (3.35). Modely budeme testovať na ôsmich likvidných akciách American Airlines, Apple, Facebook, General Electric, General Motors, Intel, McDonalds, Microsoft a akciovom indexe S&P500. Pri testovaní sa obmedzíme na opcie expirujúce za týždeň a za dva týždne. Budeme teda uvažovať maturitu opcie v mesiacoch  $T = \frac{6}{252} * 12 = 0,2857$  alebo  $T = \frac{10}{252} * 12 = 0,4762$ . Z rovnakého dôvodu budeme pracovať pre každú akciu iba so štyrmi realizačnými cenami (strike price)  $K$ , ktoré sú najbližšie k súčasnej cene akcie  $S_0$ . Ako mieru nepresnosti modelov budeme uvažovať sumu druhých mocnín rozdielov cien opcie odhadnutých modelom od reálnej trhovej ceny pre všetky rôzne strike price, pre každú akciu zvlášť. Túto sumu si označíme  $RSS$  z anglického názvu *Residual Sum of Squares*.

### 4.1 Kalibrácia

Obidve výsledné formuly na ocenenie európskych Call opcií závisia od spoločných parametrov, ktoré sú buď vlastnosti konkrétnej opcie - čas expirácie opcie  $T$ , realizačná cena  $K$ , súčasnej ceny podkladového aktíva  $S_0$ , alebo vlastnosti trhu - bezrizikový výnos  $r$ . Parametre opcie sú exaktne dané a za bezrizikový výnos si môžeme zobrať výnos mesačného bezkupónového dlhopisu. Problémom je voľba parametrov špecifických pre každý model. V Black-Scholesovej formuli máme parameter  $\sigma$ . Dá sa interpretovať ako mesačná volatilita podkladového aktíva, ktorej presná hodnota však nie je známa. V Poissonovej formuli máme dokonca až dva neznáme parametre drift  $\tilde{\mu}$  a veľkosť skoku (jump)  $J$ . Ak sa pozrieme späťne ako sme tieto parametre odvodili (3.14), (3.15), zistíme, že závisia od očakávaného výnosu podkladového aktíva  $\mu$ , jeho mesačnej volatility  $\sigma$  a priemerného počtu skokov za mesiac  $\lambda$ . Prvé dva parametre sú síce celkom jasné a môžeme ich odhadnúť napríklad z historických dát, v prípade  $\lambda$  je to ťažšie.

Ku kalibrácii modelov budeme pristupovať dvoma spôsobmi. Môžeme ich nakalibrovať prirodzene - spravíme odhady parametrov z historických cien podkladového aktíva. Pretože priemerný počet skokov za mesiac  $\lambda$  nemá jednoznačnú interpretáciu, odhad-

neme ho na základe našich skúseností z testovania. Druhý postup by sme mohli nazvať Optimálnou kalibráciou. Parametre každého podkladového aktíva vyskytujúce sa priamo v oceňovacej formuli zvolíme tak aby sme minimalizovali  $RSS$  pre všetky strike  $K$  price pri danej maturite opcie  $T$  a takto získané parametre využijeme pri oceňovaní ďalších opcií.

**Príklad 4.1.** Na príklade opcie na akciu Apple ilustrujeme, ako funguje prirodzená a optimálna kalibrácia modelov a aké výsledky dostávame jedným, či druhým postupom. Súčasná cena akcie je  $S_0 = 524,69$  dolárov, jej očakávaný mesačný výnos a volatilitu sme odhadli z historických dát za posledné dva roky  $\mu = 0,01012$  a  $\sigma = 0,08202$ . Momentálny bezrizikový mesačný výnos na trhu je  $r = 0,001$ . Na trhu [7] sme si našli Call opcie expirujúce o 2 týždne.  $T = \frac{10}{252} * 12 = 0,4762$  s realizačnými cenami 520; 522,5; 525 a 527.5 dolárov a trhovými cenami 10,42; 8,975; 7,65 a 6,525 dolárov. Predpokladajme, že cena podkladového aktíva v priemere za mesiac skočí päť krát -  $\lambda = 5$ , ako sa ukáže neskôr z testovacích dát, táto hodnota je naozaj opodstatnená. Vypočítajme ceny pre strike price  $K = 520$  dolárov s reálnou trhovou cenou 10,425 dolára. Pri optimálnom kalibrovaní Poissonovho (neskôr v kapitole vysvetlíme ako sme dané parametre odvodili) modelu sme dostali parametre drift a jump

$$\tilde{\mu} = 0,0601$$

$$J = 0,0439$$

a výslednú cenu

$$C_0 = 10,3415$$

optimálne sme nakalibrovali aj Brownov model, pričom optimálna volatilita je

$$\sigma = 0,0534$$

a cena opcie s realizačnou cenou 520 dolárov

$$C_0 = 10,3967$$

Vidíme, že oba modely mierne podhodnotili cenu opcie. Teraz vypočítame cenu opcií na základe historických odhadov parametrov. Poissonova formula ocenila opciu

$$C_0 = 14,9664$$

cena vypočítaná Black-Scholesovou formulou je

$$C_0 = 14,4229$$

Obe ceny sú výrazne nadhodnotené oproti trhovým. Z prirodzenej aj optimálnej kalibrácie vyšiel o niečo lepšie Brownov model, aj keď v prípade prirodzenej kalibrácie je to spôsobené nejasnou definíciou  $\lambda$ .

Obidva typy kalibrácie otestujeme na všetkých ôsmich akciách a indexe SP500.

#### 4.1.1 Optimálna kalibrácia

Najskôr ukážeme ako sme dostali optimálne parametre v príklade 4.1. Pre každú akciu sme začali tak, že úvodný odhad parametrov sme dostali z historických dát. Následne sme iteračne so zvyšujúcou sa presnosťou prehľadávali interval okolo posledného odhadu parametrov tak, aby sme minimalizovali sumu štvorcov odchýliek od trhových cien.

V nasledujúcej tabuľke vidíme výsledky optimálnej kalibrácie pri oceňovaní európskych opcií na akcie firiem American Airlines, Apple, Facebook, General Electric, General Motors, Intel, McDonalds, Microsoft a akciový indexe S&P500. V prvej tabuľke sú hodnoty  $RSS$  pre opcie expirujúce o týždeň.

Model	American A.	Apple	Facebook	General E.
<b>Poisson</b>	0,0001	0,0267	0,1855	0,0016
<b>Black-Scholes</b>	0,0012	0,0013	0,0021	0,001
General Motors	Intel	McDonalds	Microsoft	S&P500
0,002	0,0004	0,0029	0,0003	0,1232
0,0011	0,0015	0,0003	0,001	0,7469

v ďalšej tabuľke sú štvorce odchýliek cien určených modelmi od reálnych trhových cien opcie s maturitou o dva týždne, teda sme zdvojnásobili periódu  $T$ , za ktorú opcia expiruje

Model	American A.	Apple	Facebook	General E.
<b>Poisson</b>	0,0002	0,0268	0,0043	0,0003
<b>Black-Scholes</b>	0,0059	0,0019	0,0017	0,0008
General Motors	Intel	McDonalds	Microsoft	S&P500
0,0012	0,0002	0,0054	0,0006	0,0246
0,0014	0,002	0,0013	0,0015	1,1972

Zosumarizujeme si, čo sme zistili. Pri opciách expirujúcich za týždeň pri piatich akciách z ôsmich, oceňovala presnejšie Black - Scholesova formula, naopak pri Call opciách s maturitou o dva týždne bol presnejší Poissonov model, tentokrát lepšie aproximoval reálne ceny v piatich prípadoch on a pri troch akciách bol lepší Brownov model a Black - Scholesova formula. Tieto výsledky samé o sebe nestačia na to, aby sme vedeli o niektorom modeli prehlásiť, že je lepší alebo horší, oba dopadli porovnateľne. K zaujímavému zisteniu sme dospeli pri oceňovaní akciového indexu S&P500, kde sa Poissonov model ukazuje byť rádovo 10 až 100-násobne presnejší. Tento jav je zapríčinený faktom, že S&P500 sa nespráva ako akcia, a už vo svojej podstate nenapĺňa predpoklady Brownovho pohybu, pretože nemá pevné váhy resp. zloženie. Váha jednotlivej akcie v indexe sa vypočítava ako pomer trhovej kapitalizácie danej akcie ku kapitalizácii celého trhu, a preto ak napríklad cena akcie porastie nahor, jej váha v indexe taktiež vzrastie.

#### 4.1.2 Prirodzená kalibrácia

Ako sme už spomínali v úvode kapitoly, na to aby sme vedeli bez akýchkoľvek vedomostí o trhových cenách opcií (minulých) vypočítať ich cenu potrebujeme pre Black - Scholesovu formulu poznať volatilitu podkladového aktíva  $\sigma$  a pre Poissonovu formulu aj očakávaný výnos aktíva  $\mu$  a priemerný počet skokov za mesiac  $\lambda$ . Očakávaný výnos odhadneme ako strednú hodnotu mesačných výnosov podkladového aktíva z posledných dvoch rokov. Podobne aj volatilitu odhadneme ako štandardnú odchýlku dvojročných mesačných výnosov. Parameter  $\lambda$ , však nevieme z historických dát nijako odvodiť. Môžeme si pomôcť tak, že z parametrov, ktoré získame optimálnou kalibráciou spätným dosadením  $\mu$  a  $\sigma$  vypočítame hodnoty  $\lambda$  pre každú akciu a pozrieme sa, či takýto postup dáva rozumné výsledky. V nasledujúcej tabuľke uvádzame vypočítané

hodnoty  $\lambda$ .

Maturita	<b>American A.</b>	<b>Apple</b>	<b>Facebook</b>	<b>General E.</b>
<b>7 dní</b>	4,1738	6,6945	3,7064	2,9846
<b>14 dní</b>	6,6039	3,4907	3,6656	3,2186
<b>General Motors</b>	<b>Intel</b>	<b>McDonalds</b>	<b>Microsoft</b>	<b>S&amp;P500</b>
3,6894	4,1225	11,9048	5,864	3,2909
2,0987	2,6712	6,567	2,0356	4,3537

Vidíme, že hoci odhady priemerného počtu skokov za mesiac  $\lambda$  vyšli v celku rozumné čísla až na jednu výnimku z intervalu 1 až 10, nespĺňajú jednu základnú vlastnosť ktorú by sme požadovali, a síce  $\lambda$  by sa nemala meniť s dobou do expirácie, no napriek tomu sa pri niektorých akciách  $\lambda$  zväčší na svoj dvojnásobok alebo zmenší na polovicu. Z tohto dôvodu je pre nás prirodzená kalibrácia Poissonovho modelu nemožná. Pozrime sa aspon na to, aké presné výsledky dostaneme použitím Black - Scholesovej formuly a historických dát. V nasledujúcej tabuľke sú uvedené *RSS* pre tento prípad.

Maturita	<b>American A.</b>	<b>Apple</b>	<b>Facebook</b>	<b>General E.</b>
<b>7 dní</b>	0,1523	32,2023	3,9338	0,0013
<b>14 dní</b>	0,1651	36,7655	4,7061	0,0021
<b>General Motors</b>	<b>Intel</b>	<b>McDonalds</b>	<b>Microsoft</b>	<b>S&amp;P500</b>
0,0276	0,0016	0,5036	0,0015	56,4153
0,0193	0,0021	0,7394	0,0614	79,7492

Znova sa potvrdilo, že správanie trhového indexu nie je vhodné aproximovať Brownovým pohybom. Tiež vidíme, že pre väčšinu akcií prirodzená kalibrácia, vzhľadom na to, že historická volatilita sa môže podstatne líšiť od volatility odhadovanej trhom, dáva výrazne horšie výsledky ako optimálne nakalibrovaný model. Najlepším riešením sa zdá byť nastaviť modely optimálne aktuálnymi cenami na trhu a takto nakalibrované ich použiť na výpočet budúcich cien opcí. Otestujeme, ako si optimálne nakalibrované modely zachovávajú kvalitu (presnosť) s odstupom času a porovnáme ich s Black-Scholesovou formulou naplnenou aktuálnym odhadom parametrov z ročných historických dát. Modely nakalibrujeme marcovými dátami, na ktorých sme ich pôvodne testovali a potom ich použijeme na ocenenie likvidných opcí, momentálne (máj) nachádzajúcich sa na opčných burzách. V nasledujúcej tabuľke je porovnanie presnosti

(RSS) Black-Scholesovej formuly (kalibrovanej marcovými cenami opcií) pri výpočte marcových a májových cien.

Black-Scholes	<b>American A.</b>	<b>Apple</b>	<b>Facebook</b>	<b>General E.</b>
<b>Marec</b>	0,0059	0,0019	0,0017	0,0008
<b>Máj</b>	0,0237	5,2117	0,1462	0,0145
Black-Scholes	<b>General Motors</b>	<b>Intel</b>	<b>McDonalds</b>	<b>Microsoft</b>
<b>Marec</b>	0,002	0,0013	0,0015	1,1972
<b>Máj</b>	0,0588	0,0422	0,0342	0,0143

vidíme, že v priemere optimálne nakalibrovaná Black-Scholesova formula dáva s odstupom času horšie výsledky, čo je aj pochopiteľné, keďže bola nastavená tak aby minimalizovala odchýlky od marcových cien. V ďalšej tabuľke sú obdobné výsledky pre Poissonov model

Poisson	<b>American A.</b>	<b>Apple</b>	<b>Facebook</b>	<b>General E.</b>
<b>Marec</b>	0,0002	0,0268	0,0043	0,0003
<b>Máj</b>	0,0398	5,069	0,3765	0,0138
Poisson	<b>General Motors</b>	<b>Intel</b>	<b>McDonalds</b>	<b>Microsoft</b>
<b>Marec</b>	0,0012	0,0002	0,0054	0,0006
<b>Máj</b>	0,0667	0,0504	0,0421	0,0195

podobne ako v prípade Black-Scholesovej formuly aj Poissonova prirodzene dáva horšie výsledky ako sa vzdalujeme od doby kalibrácie. Ostáva nám ešte zistiť, či optimálne kalibrované modely aj s takýmto veľkým odstupom času budú dávať presnejšie ceny ako kalibrácia z historických dát. Porovnanie optimálne kalibrovaných modelov aplikovaných na výpočet cien o dva mesiace neskôr s Black-Scholesovou formulou s odhadom volatility z ročných dát môžeme vidieť v nasledujúcej tabuľke



Poisson	American A.	Apple	Facebook	General E.
<b>Black-Scholes (Opt)</b>	0,0237	5,2117	0,1462	0,0145
<b>Poisson (Opt)</b>	0,0398	5,069	0,3765	0,0138
<b>Black-Scholes (Hist)</b>	0,2739	153,7171	1,4226	0,0119
Poisson	General Motors	Intel	McDonalds	Microsoft
<b>Black-Scholes (Opt)</b>	0,0588	0,0422	0,0342	0,0143
<b>Poisson (Opt)</b>	0,0667	0,0504	0,0421	0,0195
<b>Black-Scholes (Hist)</b>	0,0382	0,0266	0,1797	0,0037

Poissonova aj Black-Scholesova formula si počínajú veľmi podobne. Zaujímavé však je, že aj napriek tomu, že optimálna kalibrácia je nastavená na dva mesiace staré ceny, pri väčšine akcií ocenia oba modely porovnateľne alebo dokonca presnejšie ako Black-Scholesova formula a čerstvý odhad parametrov z historických dát. Môžeme za najlepší prístup vyhlásiť optimálne kalibrovanie modelov s pravidelným rekaličrovaním, napríklad raz týždenne, určite však s vyššou frekvenciou ako každé dva mesiace.

## Záver

Cieľom bakalárskej práce bolo zoznámiť sa s Brownovým pohybom a Poissonovým procesom, naprogramovať formuly na oceňovanie opcií pre oba modely a porovnať ich schopnosť aproximovať trhové ceny. Pri písaní práce sme vychádzali najmä z diel [1] a [4].

Ako prvé sme oboznámili čitateľa s konceptom binárneho stromového modelu, popisujúceho správanie podkladového aktíva. Model uvažuje obchodovanie len raz za určitý časový úsek, napríklad jeden týždeň a po každom obchodovaní len dve situácie, ktoré môžu nastať. Zuzovaním času medzi dvoma obchodmi síce zväčšíme množinu cien podkladového aktíva, ktorú model pripúšťa, stále však ostáva veľmi obmedzená a ak by sme chceli aby dostatočne husto pokrývala rozsah cien, ktoré by mohli reálne nastať, obtiažnosť výpočtu súčasnej ceny by bola pre výpočtovú techniku neúnosná. Ukázali sme aj ekvivalentný postup pomocou replikačného portfólia, kopírujúceho správanie (hodnoty, výplaty, riziko) opcie, ktoré je však v praxi nevyužiteľné kvôli "treniu" trhu - transakčným nákladom, ktoré by sme museli zaplatiť vždy, keď by sme menili zloženie portfólia.

Riešením problému s výpočtovou náročnosťou binárneho stromu sme sa zaoberali v druhej a tretej kapitole. Odvođením limitných prechodov do spojitého času podľa [1], najskôr v druhej kapitole tak, že sa ponechali konštantné objektívne pravdepodobnosti, s ktorými nastávajú výnosy v uzloch binárneho stromu a rozdiel medzi nimi sa limitne blíži k nule. Týmto postupom sa odvodil Brownov model, radiaci sa medzi Itôve procesy a Black-Scholesova formula na oceňovanie opcií (2.40). Opačným postupom sa odvodil Poissonov proces, patriaci k Lévyho procesom a výsledná Poissonova formula (3.35). Rozdiely medzi výnosmi sa ponechali celý čas konštantné ale s limitným prechodom sa menilo rozdelenie pravdepodobnosti. Na konci kapitoly sme zdefinovali Lévyho procesy a zovšeobecnený Poissonov proces.

V praktickej časti bakalárskej práce, ktorej sa venovala posledná, štvrtá kapitola sme sa zaoberali porovnávaním modelov a rôznych prístupov k ich kalibrácii. Na testovanie sme si okrem ôsmich likvidných akcií vybrali aj trhovú index S&P500. Black-Scholesovu aj Poissonovu formulu na oceňovanie opcií sme naprogramovali v matlabe. Ako kritérium, podľa ktorého sme posudzovali ako dobre odhadujú reálne ceny [6] sme si zvolili

RSS - sumu štvorcov z rozdielov trhových cien od cien odhadnutých modelmi.

Ako prvej sme sa venovali optimálnej kalibrácii - nastavili sme parametre modelov pre každú akciu tak, aby sme minimalizovali RSS. Týmto postupom sme dosiahli u oboch modelov pri výpočte cien akcií veľmi dobré výsledky, na základe ktorých sa nedalo jednoznačne povedať, ktorý z nich oceňuje lepšie. Výrazný rozdiel nastal až pri akciovom indexe S&P500. Ceny opcií na index odhadol Poissonov model viac, než desať krát presnejšie. Tento jav nastal z dôvodu, že S&P500 spôsobom, akým sú určené váhy jednotlivých akcií v indexe nespĺňa základné predpoklady Brownovho pohybu a tým pádom zlyháva aj Black-Scholesova formula.

Následne sme otestovali možnosť kalibrovať modely prirodzene. Parametre vystupujúce vo výsledných formulách (2.40) a (3.35) sme sa pokúsili odhadnúť z historických cien. Pri Black-Scholesovej formuli sme dostali mierne horšie výsledky ako v prípade optimálnej kalibrácie. Prirodzené kalibrovanie Poissonovej formuly sa ukázalo nemožné pre nejasnú interpretáciu intenzity skokov. Pokúsili sme sa tento parameter odhadnúť spätne z parametrov z optimálnej kalibrácie, no aj takto dosiahnuté výsledky nenaplnili naše očakávania ohľadom nemennosti intenzity skokov s časom do expirácie. Rozumným postupom sa po potvrdení záverečným testom ukázali byť optimálne kalibrované modely s pravidelnou rekalkibráciou aktuálnymi cenami. Potvrdili sme to porovnaním dva mesiace spätne kalibrovaného modelu s Black-Scholesovou formulou a aktuálnym odhadom parametrov z historických cien, z ktorého lepšie vyšiel optimálne kalibrovaný model.

Prínosom práce pre čitateľa určite sú porovnania "výkonnosti" modelov pre rôzne typy kalibrácie, zaujímavý záver pre modelovanie správania sa cien akciového indexu S&P500 a indexov s obdobným spôsobom vypočítavania váh. Pre autora bolo prínosné oboznámenie sa s problematikou oceňovania opcií, Brownovým a Poissonovým procesom, či zoznámenie sa s Lévyho procesmi, ktoré zároveň aj ponúkajú možnosť ako na prácu nadviazať.

## Zoznam použitej literatúry

- [1] Černý, A.: *Mathematical techniques in finance: Tools for incomplete markets*, 2. vydanie, Princeton University Press, New Jersey, 2009
- [2] Cont, R., Tankov P.: *Financial modelling with Jump processes*, CRC Press UK, Londýn, 2004
- [3] Janková, K., Pázman, A.: *Pravdepodobnosť a štatistika*, Univerzita Komenského, Bratislava, 2011
- [4] Melicherčík, I., Olešárová, L., Úradníček, V.: *Kapitoly z finančnej matematiky*, Epos, Bratislava, 2005
- [5] Schoutens, W.: *Lévy processes in finance: Pricing financial derivatives*, John Wiley & Sons Ltd, West Sussex, 2003
- [6] CBOE - Chicago Board Options Exchange, dostupné na internete (11.4.2014): <https://www.cboe.com>
- [7] IVolatility.com - Stock Options Analysis and Trading Tools, dostupné na internete (11.4.2014): <http://www.ivolatility.com>
- [8] NYSE - New York Stock Exchange, dostupné na internete (11.4.2014): <https://nyse.nyx.com>