

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



ORTOGONÁLNE A NEORTOGONÁLNE PROJEKCIE A
ICH POUŽITIE

BAKALÁRSKA PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**ORTOGONÁLNE A NEORTOGONÁLNE PROJEKCIE A
ICH POUŽITIE**

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: RNDr. Dušan Krajčovič, CSc.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Silvia Štrbová
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Ortogonálne a neortogonálne projekcie a ich použitie
Orthogonal and oblique projections and their application

Cieľ: Praktické využitie projekcií pri vizualizácii viacrozmerných objektov.

Vedúci: RNDr. Dušan Krajčovič, CSc.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania: 18.10.2013

Dátum schválenia: 14.11.2013
doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Pod'akovanie

Touto cestou sa chcem poďakovať svojmu vedúcemu bakalárskej práce RNDr. Dušanovi Krajčovičovi, CSc. za ochotu, odborné rady, pomoc s prekladom článku v ruskom jazyku a podnetné pripomienky, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce. Ďakujem aj svojej rodine a priateľom za ich trpezlivosť a podporu.

Abstrakt v štátnom jazyku

ŠTRBOVÁ, Silvia: Ortogonálne a neortogonálne projekcie a ich použitie [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: RNDr. Dušan Krajčovič, CSc., Bratislava, 2014, 62 s.

V našej práci sa zaoberáme ortogonálnymi a neortogonálnymi projekciami. Cieľom práce bolo praktické použitie neortogonálnych projekcií pri vizualizácii štvorrozmernej kocky. Práca zahŕňa teoretické poznatky o ortogonálnych a neortogonálnych projekciách, ktoré využijeme na zobrazovanie viacrozmerých útvarov, ako aj samotnú aplikáciu na zobrazenie plášťa štvorrozmernej kocky v trojrozmernej rovine. Práca taktiež obsahuje funkciu vytvorenú v programe Matlab, ktorá pomocou odvodených vzorcov rozvinie štvorrozmernú kocku do trojrozmernej roviny a výsledok vykreslí. Tým boli naplnené ciele práce.

Kľúčové slová: lineárne transformácie, ortogonálne projekcie, neortogonálne projekcie, štvorrozmerná kocka

Abstract

ŠTRBOVÁ, Silvia: Orthogonal and oblique projections and their application [Bachelor Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: RNDr. Dušan Krajčovič, CSc., Bratislava, 2014, 62 p.

In our work we investigate orthogonal and oblique projections. The purpose of our study was practical use of oblique projections to visualize a four dimensional cube. The work includes theoretical knowledge about orthogonal and oblique projections that we use for mapping multidimensional objects as well as their application for mapping the surface of the four dimensional cube in a three dimensional plane. The work includes a function made in Matlab that unfolds the four dimensional cube to a three dimensional plane using formulas and draws the result. Thus the purpose of our work was completed.

Keywords: linear transformations, orthogonal projections, oblique projections, four dimensional cube

Obsah

Zoznam obrázkov	8
Zoznam použitých symbolov	10
Úvod	11
1 Projekcie	12
1.1 Všeobecné vlastnosti projekcií	12
1.2 Ortogonálne projekcie	18
1.3 Neortogonálne projekcie	24
2 Vizualizácia viacrozmerných objektov	29
2.1 Štvorec	33
2.2 Trojrozmerná kocka	37
2.3 Štvorrozmerná kocka	45
Záver	54
Zoznam použitej literatúry	55
Príloha A	56
A.1 Štvorec	56
A.2 Trojrozmerná kocka	57
A.3 Štvorrozmerná kocka	59

Zoznam obrázkov

1	Projekcia na $\text{Span}(x) = \{x\}$ v smere $\text{Span}(y) = \{y\}$	15
2	Projekcia na dvojrozmerný priestor V v smere $\text{Span}(y) = \{y\}$	15
3	Ortogonalná projekcia.	19
4	Rozklad vektora z na $z_1 + z_2$ v prípade ortogonálnych podpriestorov. .	19
5	Ortogonalná projekcia v dvojrozmernom priestore.	20
6	Ortogonalná projekcia v n -rozmernom priestore.	21
7	Rozklad vektora z na $z_1 + z_2$ v prípade neortogonálnych podpriestorov.	25
8	Neortogonalná projekcia v dvojrozmernom priestore.	25
9	Neortogonalná projekcia v n -rozmernom priestore.	26
10	Pohyb bodu v jednorozmernom priestore.	29
11	Pohyb úsečky v dvojrozmernom priestore.	29
12	Pohyb štvorca v trojrozmernom priestore.	30
13	Pohyb trojrozmernej kocky v štvorrozmernom priestore.	30
14	Rozbalenie štvorca.	30
15	Rozbalenie trojrozmernej kocky.	31
16	Rozbalenie štvorrozmernej kocky.	31
17	Centrálna projekcia štvorrozmernej kocky.	32
18	Centrálna projekcia.	33
19	Centrálna projekcia trojrozmernej kocky.	33
20	Štvorec.	34
21	Zobrazenie bodu C do bodu C_x	35
22	Zobrazenie bodu D do bodu D_x	35
23	Zobrazenie bodu D do bodu D_{xx}	36
24	Rozbalenie štvorca.	37
25	Rozvinutie štvorca v Matlabe.	37
26	Trojrozmerná kocka.	38
27	Projekcia bodov E, F v smere osi x	39
28	Projekcia bodov E, H v smere osi y	41
29	Druhá projekcia bodu H v smere osi y	43
30	Rozbalenie trojrozmernej kocky.	44

31	Rozvinutie trojrozmernej kocky v Matlabe.	45
32	Štvorrozmerná kocka.	46
33	Rozbalenie štvorrozmernej kocky.	52
34	Rozvinutie štvorrozmernej kocky v Matlabe.	53

Zoznam použitých symbolov

E^n	Euklidovský priestor
$V \oplus W$	priamy súčet podpriestorov V a W
$V^\perp$	podpriestor kolmý na podpriestor V , $V^\perp = \{y \in E^n y \perp x, x \in V\}$
$\dim(V)$	dimenzia podpriestoru V
$\text{Ker}(A)$	jadro matice A alebo nulový podpriestor matice A , $\text{Ker}(A) = \{x Ax = 0\}$
$\text{Span}(A)$	stĺpcový podpriestor matice A , $\text{Span}(A) = \{Ax x \in R^n\}$
$\text{rank}(A)$	hodnota matice A
$\text{tr}(A)$	stopa matice A
A^T	matica transponovaná k matici A
I_n	jednotková matica rádu n
δ_{ij}	Kroneckerov symbol, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ak } i = j \\ 0 & \text{ak } i \neq j \end{cases}$

Úvod

Špeciálnym prípadom lineárnych transformácií sú projekcie. Projekcie ako také sa využívajú v mnohých vedných odboroch. Základom mnohých metód geometrie, matematickej a numerickej analýzy sú práve projekcie. Pomocou projekcií môžeme preniknúť do poznávania „viacrozmerného“ sveta. Viacrozmerné objekty dokážeme pomocou projekcií rozvinúť na objekty, ktoré majú menšiu dimenziu. Toto bolo aj cieľom našej práce, „zviditeľniť“ štvorrozmerné objekty, konkrétne štvorrozmernú kocku. Naš pokus zobraziť plášť „neviditeľnej“ štvorrozmernej kocky do „viditeľnej“ trojrozmernej roviny sme začali postupným rozbaľovaním štvorca a trojrozmernej kocky, čo nás priviedlo k efektívnemu spôsobu znázornenia viacrozmerných objektov pomocou jednoduchších.

Naša práca pozostáva z dvoch kapitol. Prvá kapitola je teoretickej povahy, uvádzame v nej základné pojmy a charakteristiky týkajúce sa projekcií ako takých a neskôr rozoberáme dva špeciálne typy projekcií, a to ortogonálne a neortogonálne projekcie. Okrem toho sú v tejto kapitole odvodené vzorce pre výpočet matíc projekcií oboch typov, ktoré neskôr využívame v našej praktickej aplikácii. Teoretické poznatky sú bohato ilustrované názornými obrázkami pre lepšie pochopenie matematických pojmov.

Začiatok druhej kapitoly je venovaný spôsobu znázornenia trojrozmernej a štvorrozmernej kocky do dvojrozmernej roviny. Táto názorná predstava nám pomohla pri označení jednotlivých ich vrcholov, ktoré sme následne pomocou projekcií projektovali do rovín nižších dimenzií, čím nám vznikali zaujímavé geometrické objekty. Aj druhá kapitola obsahuje mnoho obrázkov, ktoré pomáhajú čitateľovi pri predstave projektovaných objektov, ako aj samotných projekcií, ktoré sme na ich vizualizáciu použili.

1 Projekcie

1.1 Všeobecné vlastnosti projekcií

V tejto časti pripomenieme niektoré základné pojmy a vlastnosti projekcií.

Definícia 1.1. *Nech $x \in E^n = V \oplus W$. Potom existuje jednoznačný rozklad x taký, že platí*

$$x = x_1 + x_2, \text{ kde } x_1 \in V \text{ a } x_2 \in W.$$

Zobrazenie, ktoré vektoru x priradí vektor x_1 , označíme ϕ . Je to lineárne zobrazenie, preto platí

$$\phi(a_1 y_1 + a_2 y_2) = a_1 \phi(y_1) + a_2 \phi(y_2) \quad (1)$$

pre všetky $y_1, y_2 \in E^n$, kde $a_1, a_2 \in R$. To znamená, že môže byť reprezentované maticou, ktorú budeme nazývať matica projekcie. Túto maticu budeme označovať $P_{V,W}$. Vektor, ktorý vznikne zobrazením vektora x pomocou matice $P_{V,W}$ (t.j. $x_1 = P_{V,W}x$), budeme nazývať projekciou vektora x na podpriestor V v smere podpriestoru W .

Veta 1.2. *Nutná a postačujúca podmienka na to, aby nejaká štvorcová matica P rádu n bola maticou projekcie na podpriestor $V = \text{Span}(P)$ v smere podpriestoru $W = \text{Ker}(P)$, je*

$$P^2 = P. \quad (2)$$

Pri dôkaze Vety 1.2 využijeme nasledovnú lemu:

Lema 1.3. *Nech P je štvorcová matica rádu n a nech platí (2). Potom*

$$E^n = \text{Span}(P) \oplus \text{Ker}(P) \quad (3)$$

a

$$\text{Ker}(P) = \text{Span}(I_n - P). \quad (4)$$

Dôkaz Lemy 1.3. Dôkaz rovnosti (3): Nech $x \in \text{Span}(P)$ a $y \in \text{Ker}(P)$.

Z $x = Pa$ dostaneme

$$Px = P(Pa) = P^2a = Pa = x \text{ a } Py = 0.$$

Preto zo vzťahu

$$x + y = 0 \Rightarrow Px + Py = 0$$

dostaneme

$$Px = x = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Teda $\text{Span}(P) \cap \text{Ker}(P) = \{0\}$. Z

$$\dim(\text{Span}(P)) + \dim(\text{Ker}(P)) = \text{rank}(P) + (n - \text{rank}(P)) = n$$

vyplýva $E^n = \text{Span}(P) \oplus \text{Ker}(P)$.

Dôkaz rovnosti (4): Platia nasledovné implikácie:

$$Px = 0 \Rightarrow x = (I_n - P)x \Rightarrow \text{Ker}(P) \subset \text{Span}(I_n - P)$$

a

$$P(I_n - P) = 0 \Rightarrow \text{Span}(I_n - P) \subset \text{Ker}(P).$$

Teda $\text{Ker}(P) = \text{Span}(I_n - P)$. □

Poznámka: Keď platí (4), tak z rovnice $P(I_n - P) = 0$ dostaneme $P^2 = P$. Teda (2) je nutná a postačujúca podmienka pre (4).

Dôkaz Vety 1.2. (Nutná podmienka) Pre $\forall x \in E^n, y = Px \in V$. Keďže $y = y + 0$, tak platí

$$P(Px) = Py = y = Px \Rightarrow P^2x = Px \Rightarrow P^2 = P.$$

(Postačujúca podmienka) Nech $V = \{y | y = Px, x \in E^n\}$ a $W = \{y | y = (I_n - P)x, x \in E^n\}$.

Podľa Lemy 1.3 sú V a W disjunktné. Potom môžeme ľubovoľné $x \in E^n$ jednoznačne rozložiť na

$$x = Px + (I_n - P)x = x_1 + x_2,$$

kde $x_1 \in V$ a $x_2 \in W$. Z Definície 1.1 vyplýva, že P je matica projekcie na $V = \text{Span}(P)$ v smere $W = \text{Ker}(P)$. □

Nech $E^n = V \oplus W$ a nech $x = x_1 + x_2$, kde $x_1 \in V$ a $x_2 \in W$. Nech $P_{W,V}$ označuje maticu projekcie zobrazujúcu x na x_2 . Potom

$$P_{V,W}x + P_{W,V}x = (P_{V,W} + P_{W,V})x. \quad (5)$$

Keďže táto rovnica platí pre všetky $x \in E^n$, tak musí platiť

$$I_n = P_{V,W} + P_{W,V}.$$

Nech je štvorcová matica P maticou projekcie na podpriestor V v smere podpriestoru W . Potom $Q = I_n - P$ spĺňa

$$Q^2 = (I_n - P)^2 = I_n - 2P + P^2 = I_n - P = Q,$$

čo znamená, že Q je matica projekcie na podpriestor W v smere podpriestoru V . Taktiež platí

$$PQ = P(I_n - P) = P - P^2 = 0, \quad (6)$$

čo ukazuje, že $\text{Span}(Q)$ predstavuje nulový podpriestor matice P (t.j. $\text{Span}(Q) = \text{Ker}(P)$). Podobne z $QP = 0$ vyplýva, že $\text{Span}(P)$ predstavuje nulový podpriestor matice Q (t.j. $\text{Span}(P) = \text{Ker}(Q)$).

Veta 1.4. *Nech $E^n = V \oplus W$. Nutné a postačujúce podmienky na to, aby nejaká štvorcová matica P rádu n bola maticou projekcie na podpriestor V v smere podpriestoru W , sú:*

$$(i) Px = x \text{ pre } \forall x \in V, (ii) Px = 0 \text{ pre } \forall x \in W. \quad (7)$$

Dôkaz. (Postačujúca podmienka) Nech $P_{V,W}$ označuje maticu projekcie na V v smere W a $P_{W,V}$ označuje maticu projekcie na W v smere V .

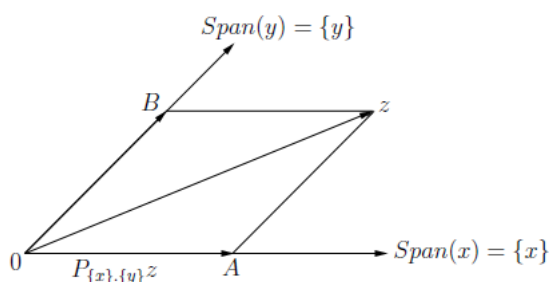
Prenásobením (5) maticou P zľava dostaneme

$$P(P_{V,W}x) + P(P_{W,V}x) = Px,$$

kde $PP_{W,V}x = 0$ kvôli (i) a (ii) a $P_{V,W}x \in V$ a $P_{W,V}x \in W$. Keďže $Px = P_{V,W}x$ platí pre všetky x , tak musí platiť $P = P_{V,W}$.

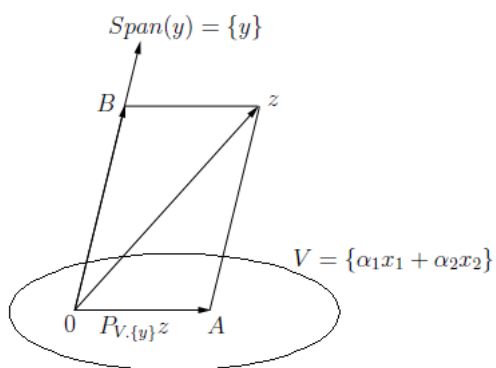
(Nutná podmienka) Pre všetky $x \in V$ platí $x = x + 0$. Teda $Px = x$. Podobne pre všetky $y \in W$ platí $y = 0 + y$, takže $P_y = 0$. $\square$

Príklad 1.1. Na obrázku 1 vidíme, že vektor $\vec{OA}$ je projekcia vektora z na podpriestor $\text{Span}(x)$ v smere podpriestoru $\text{Span}(y)$. Teda $\vec{OA} = P_{\text{Span}(x).\text{Span}(y)}z$, kde $P_{\text{Span}(x).\text{Span}(y)}$ je matica projekcie na podpriestor $\text{Span}(x)$ v smere podpriestoru $\text{Span}(y)$. Tiež platí, že $\vec{OB} = (I_2 - P_{\text{Span}(x).\text{Span}(y)})z$.



Obr. 1: Projekcia na $\text{Span}(x) = \{x\}$ v smere $\text{Span}(y) = \{y\}$.

Príklad 1.2. Na obrázku 2 vidíme, že vektor $\overrightarrow{OA}$ je projekcia vektora z na podpriestor $V = \{x | x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1, \alpha_2 \in R\}$ v smere podpriestoru $\text{Span}(y)$. Teda $\overrightarrow{OA} = P_{V, \text{Span}(y)} z$, kde $P_{V, \text{Span}(y)}$ je matica projekcie na podpriestor V v smere podpriestoru $\text{Span}(y)$.



Obr. 2: Projekcia na dvojrozmerný priestor V v smere $\text{Span}(y) = \{y\}$.

Veta 1.5. Nutná a postačujúca podmienka na to, aby nejaká štvorcová matica P rádu n bola maticou projekcie na podpriestor V dimenzie r ($\dim(V) = r$), je daná vzťahom

$$P = T \Delta_r T^{-1}, \quad (8)$$

kde T je regulárna štvorcová matica rádu n a

$$\Delta_r = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

ktorá má na hlavnej diagonále r jednotiek, kde $1 \leq r \leq n$.

Dôkaz. (Nutná podmienka) Nech $E^n = V \oplus W$ a nech $A = [a_1, a_2, \dots, a_r]$ je matica lineárne nezávislých báзовých vektorov, ktoré generujú podpriestor V a $B = [b_1, b_2, \dots, b_{n-r}]$ je matica lineárne nezávislých báзовých vektorov, ktoré generujú podpriestor W . Nech $T = [A, B]$.

Potom T je regulárna, lebo $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) = \text{rank}(T)$. Preto môžeme všetky $x \in V$ a všetky $y \in W$ vyjadriť ako

$$\begin{aligned} x = A\alpha &= [A, B] \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \\ y = B\beta &= [A, B] \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Teda dostávame

$$\begin{aligned} Px = x &\Rightarrow PT \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = T\Delta_r \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \\ Py = 0 &\Rightarrow PT \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = T\Delta_r \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sčítaním týchto rovníc dostaneme

$$PT \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = T\Delta_r \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Keďže $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ je ľubovoľný vektor v n -dimenzionálnom priestore E^n , tak platí

$$PT = T\Delta_r \Rightarrow P = T\Delta_r T^{-1}.$$

Navyše T môže byť ľubovoľná regulárna matica, pretože $V = \text{Span}(A)$ a $W = \text{Span}(B)$, a teda $E^n = V \oplus W$ môžeme tiež zvoliť ľubovoľný.

(Postačujúca podmienka) P je matica projekcie, lebo $P^2 = P$ a $\text{rank}(P) = r$ z Vety 1.2. □

Lema 1.6. *Nech P je matica projekcie. Potom*

$$\text{rank}(P) = \text{tr}(P). \tag{9}$$

Dôkaz. $\text{rank}(P) = \text{rank}(T\Delta_r T^{-1}) = \text{rank}(\Delta_r) = \text{tr}(T\Delta_r T^{-1}) = \text{tr}(P)$. $\square$

Veta 1.7. *Nech P je štvorcová matica rádu n . Potom sú nasledovné tri tvrdenia ekvivalentné*

$$P^2 = P, \quad (10)$$

$$\text{rank}(P) + \text{rank}(I_n - P) = n, \quad (11)$$

$$E^n = \text{Span}(P) \oplus \text{Span}(I_n - P). \quad (12)$$

Dôkaz. (10) $\rightarrow$ (11): Je zrejmé z $\text{rank}(P) = \text{tr}(P)$.

(11) $\rightarrow$ (12): Nech $V = \text{Span}(P)$ a $W = \text{Span}(I_n - P)$. Potom

$$\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W).$$

Keďže $x = Px + (I_n - P)x$ platí pre ľubovoľné $x \in R^n$, tak $E^n = V + W$. Preto

$$\dim(V \cap W) = 0 \Rightarrow V \cap W = \{0\},$$

z čoho vyplýva (12).

(12) $\rightarrow$ (10): Prenásobením $I_n = P + (I_n - P)$ maticou P sprava dostaneme

$$P = P^2 + (I_n - P)P,$$

z čoho vyplýva, že platí rovnosť

$$P(I_n - P) = (I_n - P)P.$$

Keďže $\text{Span}(P(I_n - P)) \subset \text{Span}(P)$ a $\text{Span}((I_n - P)P) \subset \text{Span}(I_n - P)$, tak dostávame $P(I_n - P) = 0$ a $(I_n - P)P = 0$. $\square$

Dôsledok 1.8.

$$P^2 = P \Leftrightarrow \text{Ker}(P) = \text{Span}(I_n - P). \quad (13)$$

Dôkaz. ($\Rightarrow$): Vyplýva z Lemy 1.3.

($\Leftarrow$): $\text{Ker}(P) = \text{Span}(I_n - P) \Leftrightarrow P(I_n - P) = 0 \Rightarrow P^2 = P$. $\square$

Teoretickú časť 1.1 sme spracovali podľa knihy [5].

1.2 Ortogonálne projekcie

Projekcie rozdeľujeme na dva typy, a to ortogonálne a neortogonálne projekcie. V tejto časti sa budeme venovať ortogonálnym projekciám, popíšeme ich vlastnosti a taktiež odvodíme vzorce pre ich maticové reprezentácie. Ortogonálne projekcie dostaneme tak, že priestor E^n rozložíme na priamy súčet podpriestorov V a W , pričom predpokladáme, že tieto podpriestory sú navzájom ortogonálne, to znamená, že $W = V^\perp$.

Nech $x, y \in E^n$ a nech x a y sú rozložené na $x = x_1 + x_2$ a $y = y_1 + y_2$, kde $x_1, y_1 \in V$ a $x_2, y_2 \in V^\perp$. Nech P označuje maticu projekcie na podpriestor V v smere podpriestoru $V^\perp$. Potom $x_1 = Px$ a $y_1 = Py$. Keďže $(x_2, Py) = (y_2, Px) = 0$, tak musí platiť

$$\begin{aligned}(x, Py) &= (Px + x_2, Py) = (Px, Py) \\ &= (Px, Py + y_2) = (Px, y) = (x, P^T y)\end{aligned}$$

pre všetky x a y , z čoho vyplýva, že

$$P^T = P. \quad (14)$$

Veta 1.9. *Nutné a postačujúce podmienky na to, aby nejaká štvorcová matica P rádu n bola maticou ortogonálnej projekcie, sú*

$$(i) P^2 = P \text{ a } (ii) P^T = P.$$

Dôkaz. (Nutná podmienka) To, že platí $P^2 = P$ je jasné z definície matice projekcie. Nutnosť $P^T = P$ sme ukázali pred uvedením vety.

(Postačujúca podmienka) Nech $x = P\alpha \in \text{Span}(P)$. Potom

$$Px = P(P\alpha) = P^2\alpha = P\alpha = x.$$

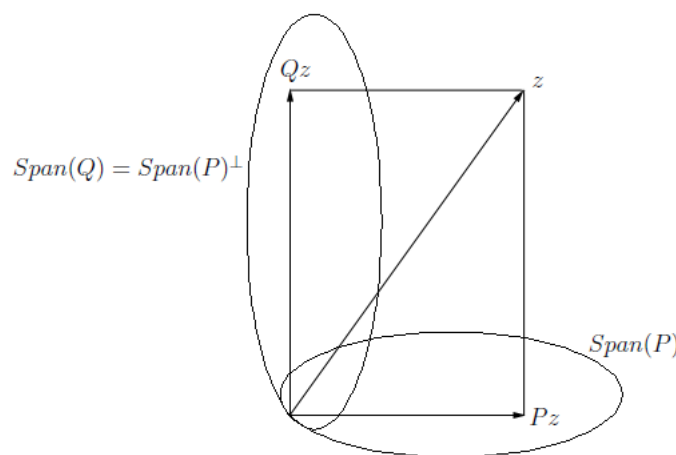
Nech $y \in \text{Span}(P)^\perp$. Potom $Py = 0$, pretože

$$(Px, y) = x^T P^T y = x^T Py = 0$$

musí platiť pre ľubovoľné x . Podľa Vety 1.4 je P maticou projekcie na $\text{Span}(P)$ v smere $\text{Span}(P)^\perp$, teda je maticou ortogonálnej projekcie na $\text{Span}(P)$. $\square$

Definícia 1.10. Matica projekcie P , pre ktorú platí $P^2 = P$ a $P^T = P$, sa nazýva matica ortogonálnej projekcie. Vektor Px sa nazýva ortogonálna projekcia vektora x . Matica ortogonálnej projekcie P je v skutočnosti matica projekcie na podpriestor $\text{Span}(P)$ v smere podpriestoru $\text{Span}(P)^\perp$, ale zvyčajne sa označuje iba ako matica ortogonálnej projekcie na podpriestor $\text{Span}(P)$.

Na obrázku 3 vidíme ortogonálnu projekciu Pz vektora z na $\text{Span}(P)$ a ortogonálnu projekciu Qz (kde $Q = I - P$) vektora z na $\text{Span}(Q)$, pričom $\text{Span}(Q) = \text{Span}(P)^\perp$.

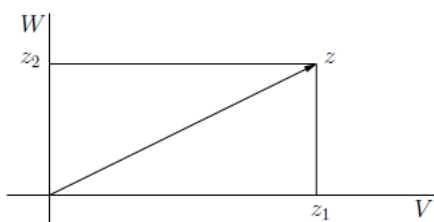


Obr. 3: Ortogonálna projekcia.

Poznámka: Matica projekcie, ktorá nespĺňa podmienku $P^T = P$, sa nazýva matica neortogonálnej projekcie.

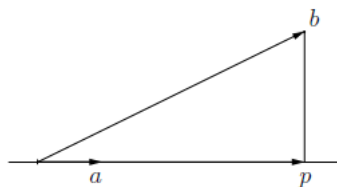
Odvodenie vzorca pre výpočet jednorozmernej ortogonálnej projekcie

Uvažujme dvojrozmerný priestor $E^2 = V \oplus W$. Nech sa vektor z dá rozložiť na $z = z_1 + z_2$, kde $z_1 \in V$ a $z_2 \in W$ (obrázok 4). To znamená, že $P_{V,W}z = z_1$ a $P_{W,V}z = z_2$.



Obr. 4: Rozklad vektora z na $z_1 + z_2$ v prípade ortogonálnych podpriestorov.

Teraz odvodíme vzorec pre výpočet jednorozmernej ortogonálnej projekcie vektora b na vektor a . Nech $p = x.a$, kde $x \in R$, je ortogonálna projekcia vektora b na vektor a (obrázok 5).



Obr. 5: Ortogonálna projekcia v dvojrozmernom priestore.

Potom platí, že $b - p \perp a$, teda ich skalárny súčin je nulový.

$$a^T(b - p) = 0$$

$$a^T(b - xa) = 0$$

$$a^Tb - x.a^Ta = 0,$$

a teda

$$x = \frac{a^Tb}{a^Ta},$$

z čoho vyplýva, že

$$p = \frac{a^Tb}{a^Ta}.a. \quad (15)$$

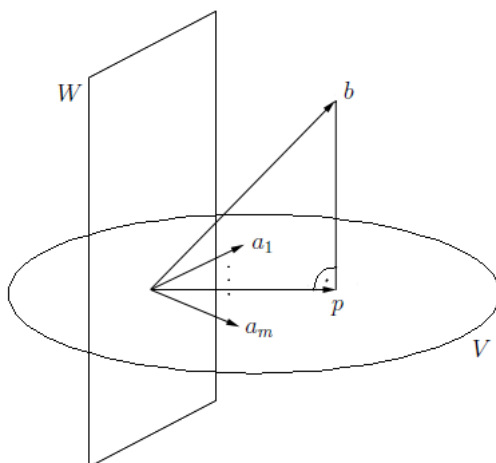
Ododenie vzorca pre maticovú reprezentáciu ortogonálnej projekcie

Teraz zovšeobecníme ortogonálnu projekciu na viacrozmerný podpriestor V . Uvažujme n -rozmerný priestor $E^n = V \oplus W$.

Nech sú vektory $a_1, a_2, \dots, a_m$ lineárne nezávislé a tvoria podpriestor V . Nech $p = Ax$ je ortogonálna projekcia vektora b na podpriestor V (obrázok 6), kde Ax je lineárna kombinácia vektorov $a_1, a_2, \dots, a_m$, teda

$$Ax = \begin{pmatrix} | & & | \\ a_1 & \cdots & a_m \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Potom musí platiť, že $b - p \perp Ay$, kde Ay je ľubovoľný vektor z V .



Obr. 6: Ortogonálna projekcia v n -rozmernom priestore.

Čiže

$$(b - p)^T Ay = 0$$

$$(b - Ax)^T Ay = 0$$

$$b^T Ay - x^T A^T Ay = 0$$

$$(b^T A - x^T A^T A)y = 0, \text{ kde } y \text{ je ľubovoľný vektor,}$$

teda platí

$$b^T A - x^T A^T A = 0$$

$$b^T A = x^T A^T A$$

$$A^T b = A^T Ax,$$

a teda

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b,$$

z čoho vyplýva, že

$$p = A(A^T A)^{-1} A^T b. \quad (16)$$

V odvodení sme využili násobenie maticou $(A^T A)^{-1}$. Existenciu tejto matice dokážeme nasledovnou lemov:

Lema 1.11. *K ľubovoľnej matici A typu $n \times m$, ktorá má hodnotu r ($\text{rank}(A) = r$), je $A^T A$ symetrická matica a $\text{rank}(A^T A) = r$.*

Dôkaz. Symetrickosť $A^T A$:

$$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A.$$

Aby sme ukázali, že hodnoty týchto matíc sa rovnajú, stačí ukázať, že matice A a $A^T A$ majú rovnaký nulový podpriestor. Potom z toho, že hodnota matice plus dimenzia nulového podpriestoru sa rovná počtu stĺpcov matice

$$r + (m - r) = m,$$

a matice A a $A^T A$ majú práve m stĺpcov, vyplýva rovnosť hodnôt týchto matíc.

Nech $x \in \text{Ker}(A)$, t.j. $Ax = 0$.

Potom z

$$A^T Ax = A^T 0 = 0$$

vyplýva, že $x \in \text{Ker}(A^T A)$. To znamená, že platí

$$\text{Ker}(A) \subset \text{Ker}(A^T A).$$

Nech $x \in \text{Ker}(A^T A)$, t.j. $A^T Ax = 0$. Túto rovnicu skalárne vynásobíme vektorom x^T zľava a dostaneme

$$x^T A^T Ax = x^T 0 = 0.$$

Teda platí, že

$$x^T A^T Ax = \|Ax\|^2 = 0,$$

z čoho vyplýva, že $Ax = 0$ a teda $x \in \text{Ker}(A)$. V tomto prípade dostávame

$$\text{Ker}(A^T A) \subset \text{Ker}(A).$$

Spojením týchto výsledkov dostávame

$$\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^T A).$$

□

Dôsledok 1.12. Ak sú stĺpce matice A lineárne nezávislé, potom $r = m$, z čoho vyplýva, že $A^T A$ je štvorcová symetrická matica rádu m a pretože jej hodnota je m , tak k nej existuje inverzná matica $(A^T A)^{-1}$.

Veta 1.13. *Nech $A = [a_1, a_2, \dots, a_m]$, kde $a_1, a_2, \dots, a_m$ sú lineárne nezávislé. Potom matica ortogonálnej projekcie na podpriestor $V = \text{Span}(A)$, generovaný vektormi $a_1, a_2, \dots, a_m$, je daná vzťahom*

$$P = A(A^T A)^{-1} A^T. \quad (17)$$

Dôkaz. Nech $x_1 \in \text{Span}(A)$. Z $x_1 = A\alpha$ dostaneme

$$Px_1 = x_1 = A\alpha = A(A^T A)^{-1} A^T x_1.$$

Nech $x_2 \in \text{Span}(A)^\perp$. Potom

$$A^T x_2 = 0 \Rightarrow A(A^T A)^{-1} A^T x_2 = 0.$$

Nech $x = x_1 + x_2$. Z $Px_2 = 0$ dostaneme

$$Px = A(A^T A)^{-1} A^T x$$

a (17) platí, pretože x je ľubovoľný vektor. □

V prípade, že podpriestor V je zadaný ortonormálnou bázou, matica ortogonálnej projekcie nadobúda tvar

$$P = AA^T, \quad (18)$$

pretože v tomto prípade platí, že matica $A^T A$ je rovná I_m .

Nech $Q = I_n - P$. Potom Q je matica ortogonálnej projekcie na podpriestor $\text{Span}(A)^\perp$, čo je kolmý doplnok podpriestoru $\text{Span}(A)$.

Príklad 1.3. Nech $1_n = (1, 1, \dots, 1)^T$ (n -zložkový vektor jednotiek). Nech P_M označuje maticu ortogonálnej projekcie na $V_M = \text{Span}(1_n)$. Potom

$$P_M = 1_n(1_n^T 1_n)^{-1} 1_n^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Matica ortogonálnej projekcie na $V_M^\perp = \text{Span}(1_n)^\perp$, čo je ortogonálny doplnok podpriestoru $\text{Span}(1_n)$, je daná

$$I_n - P_M = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1 - \frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & 1 - \frac{1}{n} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Nech

$$Q_M = I_n - P_M. \quad (21)$$

Je zrejmé, že P_M a Q_M sú obe symetrické a platia nasledovné vzťahy:

$$P_M^2 = P_M, Q_M^2 = Q_M \text{ a } P_M Q_M = Q_M P_M = 0. \quad (22)$$

Poznámka: Matica Q_M v (21) sa niekedy označuje aj $P_M^\perp$.

Príklad 1.4. Nech

$$x_R = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x} \\ x_2 - \bar{x} \\ \vdots \\ x_n - \bar{x} \end{pmatrix}, \text{ kde } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j.$$

Potom

$$x = Q_M x_R, \quad (23)$$

a teda

$$\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2 = \|x\|^2 = x^T x = (Q_M x_R)^T (Q_M x_R) = x_R^T Q_M^T Q_M x_R = x_R^T Q_M x_R.$$

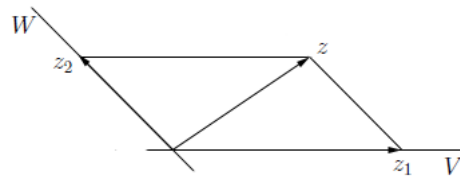
Časť 1.2, v ktorej sme sa venovali ortogonálnym projekciám, sme spracovali podľa kníh [5] a [4].

1.3 Neortogonálne projekcie

V nasledovnej časti sa venujeme neortogonálnym (alebo kosým) projekciám a odvodeniu vzorcov na ich maticovú reprezentáciu. Neortogonálne projekcie sú projekcie, v ktorých podpriestory V a W , pre ktoré platí $E^n = V \oplus W$, nie sú na seba kolmé.

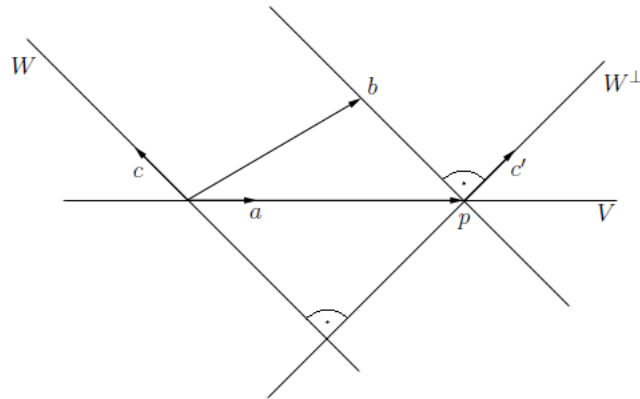
Ovodenie vzorca pre výpočet jednorozmernej neortogonálnej projekcie

Opäť najskôr uvažujme dvojrozmerný priestor $E^2 = V \oplus W$. Nech sa vektor z dá rozložiť na $z = z_1 + z_2$, kde $z_1 \in V$ a $z_2 \in W$ (obrázok 7). To znamená, že $P_{V,W}z = z_1$ a $P_{W,V}z = z_2$.



Obr. 7: Rozklad vektora z na $z_1 + z_2$ v prípade neortogonálnych podpriestorov.

Odvodíme vzorec pre výpočet jednorozmernej neortogonálnej projekcie vektora b na vektor a (ktorý v prípade jednorozmernej projekcie tvorí podpriestor V , na ktorý projektujeme) v smere vektora c (ktorý v tomto prípade tvorí podpriestor W , v smere ktorého projektujeme). Nech $p = x.a$, kde $x \in R$, je neortogonálna projekcia vektora b na vektor a v smere vektora c (obrázok 8).



Obr. 8: Neortogonálna projekcia v dvojrozmernom priestore.

Potom platí, že $b - p \perp c'$ (kde c' je vektor z podpriestoru $W^\perp$), teda ich skalárny súčin je nulový.

$$(b - p)^T c' = 0$$

$$(b - xa)^T c' = 0$$

$$b^T c' - x.a^T c' = 0,$$

a teda

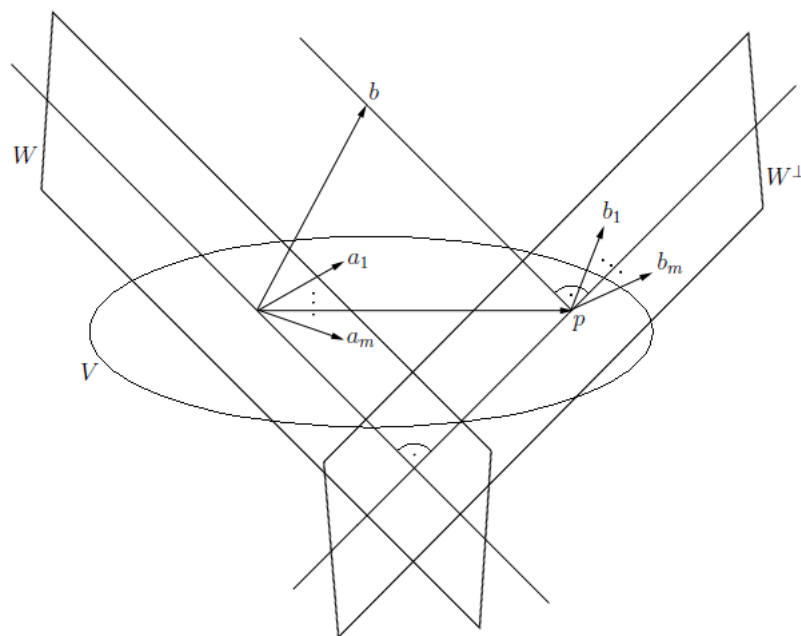
$$x = \frac{b^T c'}{a^T c'},$$

z čoho vyplýva, že

$$p = \frac{b^T c'}{a^T c'}.a. \quad (24)$$

Odvodenie vzorca pre maticovú reprezentáciu neortogonálnej projekcie

Neortogonálnu projekciu zovšeobecníme na viacrozmerný podpriestor V . Uvažujme n -rozmerný priestor $E^n = V \oplus W$.



Obr. 9: Neortogonálna projekcia v n -rozmernom priestore.

Nech sú vektory $a_1, a_2, \dots, a_m$ lineárne nezávislé a tvoria podpriestor V a nech sú vektory $b_1, b_2, \dots, b_m$ lineárne nezávislé a tvoria podpriestor $W^\perp$. Nech $p = Ax$ je neortogonálna projekcia vektora b na podpriestor V v smere podpriestoru W (obrázok 9), kde Ax je lineárna kombinácia vektorov $a_1, a_2, \dots, a_m$, teda

$$Ax = \begin{pmatrix} | & & | \\ a_1 & \dots & a_m \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Nech B je matica tvorená vektormi $b_1, b_2, \dots, b_m$, teda

$$B = \begin{pmatrix} | & & | \\ b_1 & \dots & b_m \\ | & & | \end{pmatrix}.$$

Potom tiež platí, že $b - p \perp By$, kde By je nejaký vektor z $W^\perp$.

Čiže

$$\begin{aligned}(b-p)^T B y &= 0 \\ (b-Ax)^T B y &= 0 \\ b^T B y - x^T A^T B y &= 0 \\ (b^T B - x^T A^T B) y &= 0, \text{ kde } y \text{ je ľubovoľný vektor,}\end{aligned}$$

teda platí

$$\begin{aligned}b^T B - x^T A^T B &= 0 \\ b^T B &= x^T A^T B \\ B^T b &= B^T A x,\end{aligned}$$

ak existuje matica $(B^T A)^{-1}$, tak platí

$$x = (B^T A)^{-1} B^T b,$$

z čoho vyplýva, že

$$p = A(B^T A)^{-1} B^T b. \quad (25)$$

Veta 1.14. *Nech $A = [a_1, a_2, \dots, a_m]$, kde $a_1, a_2, \dots, a_m$ sú lineárne nezávislé a nech $B = [b_1, b_2, \dots, b_m]$, kde $b_1, b_2, \dots, b_m$ sú tiež lineárne nezávislé. Potom matica neortogonálnej projekcie na podpriestor $V = \text{Span}(A)$, generovaný vektormi $a_1, a_2, \dots, a_m$, v smere podpriestoru W , ktorého ortogonálny doplnok $W^\perp = \text{Span}(B)$ je generovaný vektormi $b_1, b_2, \dots, b_m$, je daná vzťahom*

$$P = A(B^T A)^{-1} B^T. \quad (26)$$

Dôkaz. Nech $x_1 \in \text{Span}(A)$. Z $x_1 = A\alpha$ dostaneme

$$P x_1 = x_1 = A\alpha = A(B^T A)^{-1} B^T x_1.$$

Nech $x_2 \in \text{Span}(B)$. Potom

$$B^T x_2 = 0 \Rightarrow A(B^T A)^{-1} B^T x_2 = 0.$$

Nech $x = x_1 + x_2$. Z $P x_2 = 0$ dostaneme

$$P x = A(B^T A)^{-1} B^T x$$

a (26) platí, pretože x je ľubovoľný vektor. □

Nech P je matica neortogonálnej projekcie na podpriestor V v smere podpriestoru W . Nech $W^\perp$ je ortogonálny doplnok podpriestoru $W = \text{Ker}(P)$. Je zrejmé, že podpriestory $W^\perp$ a V budú rovnakej dimenzie. Potom matica neortogonálnej projekcie P môže byť charakterizovaná nasledovnými vzťahmi:

$$(i) Px \in V \text{ a } (ii) (I - P)x \perp W^\perp, \quad (27)$$

kde x je ľubovoľný vektor.

Teraz uvidíme iný spôsob maticovej reprezentácie neortogonálnej projekcie. Nech A je matica $A = [a_1, a_2, \dots, a_m]$ vytvorená bázovými vektormi podpriestoru $V = \text{Span}(P)$ a nech B je matica $B = [b_1, b_2, \dots, b_m]$ vytvorená bázovými vektormi podpriestoru $W^\perp$, ortogonálneho doplnku $W = \text{Ker}(P)$. Hovoríme, že tieto bázy sú biortogonálne, ak platí

$$(a_i, b_j) = \delta_{ij}, \text{ kde } \delta_{ij} \text{ je Kroneckerov symbol,} \quad (28)$$

čo v maticovom zápise znamená

$$B^T A = I. \quad (29)$$

Predpokladajme, že Px patrí do V . Nech Ay je reprezentácia Px v báze A . Vzťah $x - Px \perp W^\perp$ je ekvivalentný podmienke

$$((x - Ay), b_j) = 0 \text{ pre } j=1, \dots, m. \quad (30)$$

V maticovom zápise vyzerá táto podmienka nasledovne:

$$B^T(x - Ay) = 0. \quad (31)$$

Keď sú matice A a B zostavené z biortogonálnych báz, tak platí $y = B^T x$. Preto v tomto prípade platí

$$Px = AB^T x. \quad (32)$$

Keďže rovnosť (32) platí pre ľubovoľné x , tak maticová reprezentácia P bude:

$$P = AB^T. \quad (33)$$

V prípade, že matice A a B nie sú zostavené z biortogonálnych báz, použijeme vzorec (26).

Časť 1.3 venovanú neortogonálnym projekciám sme spracovali podľa kníh [2] a [3].

2 Vizualizácia viacrozmerných objektov

V tejto kapitole využijeme teoretické poznatky popísané v prvej kapitole pri vizualizácii viacrozmerných objektov.

Cieľom našej práce bolo zobraziť plášť štvorrozmernej kocky do trojrozmerného priestoru, teda „rozbaľiť“ štvorrozmernú kocku.

Ako si však máme predstaviť štvorrozmernú kocku?

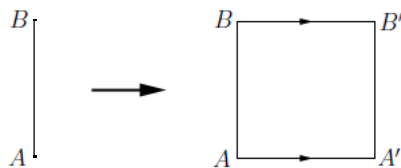
Aby sme si mohli predstaviť štvorrozmernú kocku, mali by sme sa najskôr pozrieť na obyčajnú trojrozmernú kocku, na „dvojrozmernú kocku“, čiže štvorec a taktiež na „jednorozmernú kocku“, čiže úsečku.

Na obrázku 10 vidíme, ako sa bod hýbe a vytvára úsečku.



Obr. 10: Pohyb bodu v jednorozmernom priestore.

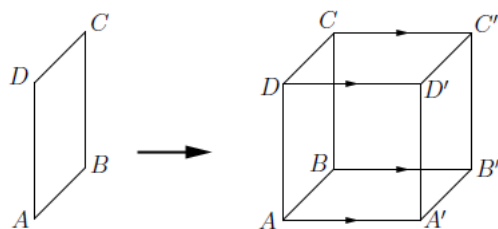
Obrázok 11 ilustruje, ako sa jednorozmerná kocka (úsečka) hýbe a vytvára štvorec.



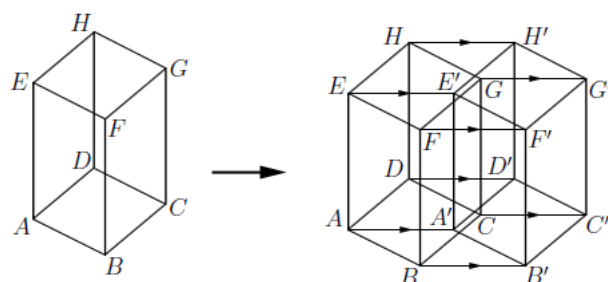
Obr. 11: Pohyb úsečky v dvojrozmernom priestore.

Na obrázku 12 vidíme, ako sa dvojrozmerná kocka (štvorec) hýbe a vytvára trojrozmernú kocku.

Keď sa pozorne pozeráme na tieto obrázky, tak môžeme pochopiť obrázok 13, kde je zobrazená štvorrozmerná kocka. Tak ako sa dvojrozmerná kocka (čiže štvorec) hýbe a vytvára trojrozmernú kocku, tak aj trojrozmerná kocka v pohybe vytvára štvorrozmernú kocku.



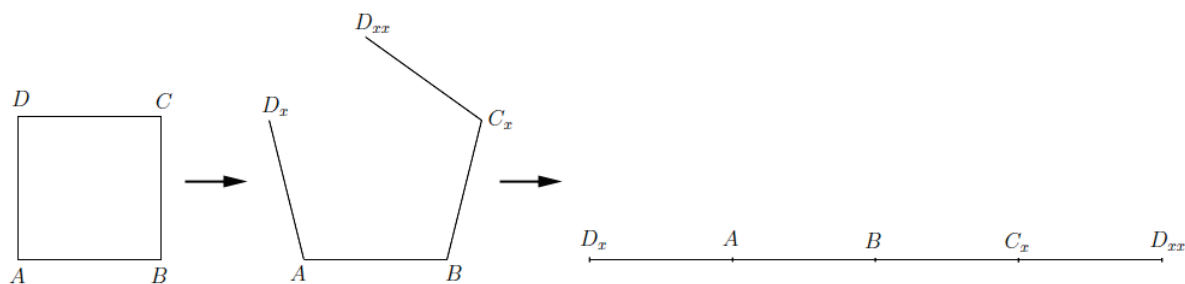
Obr. 12: Pohyb štvorca v trojrozmernom priestore.



Obr. 13: Pohyb trojrozmernej kocky v štvorrozmernom priestore.

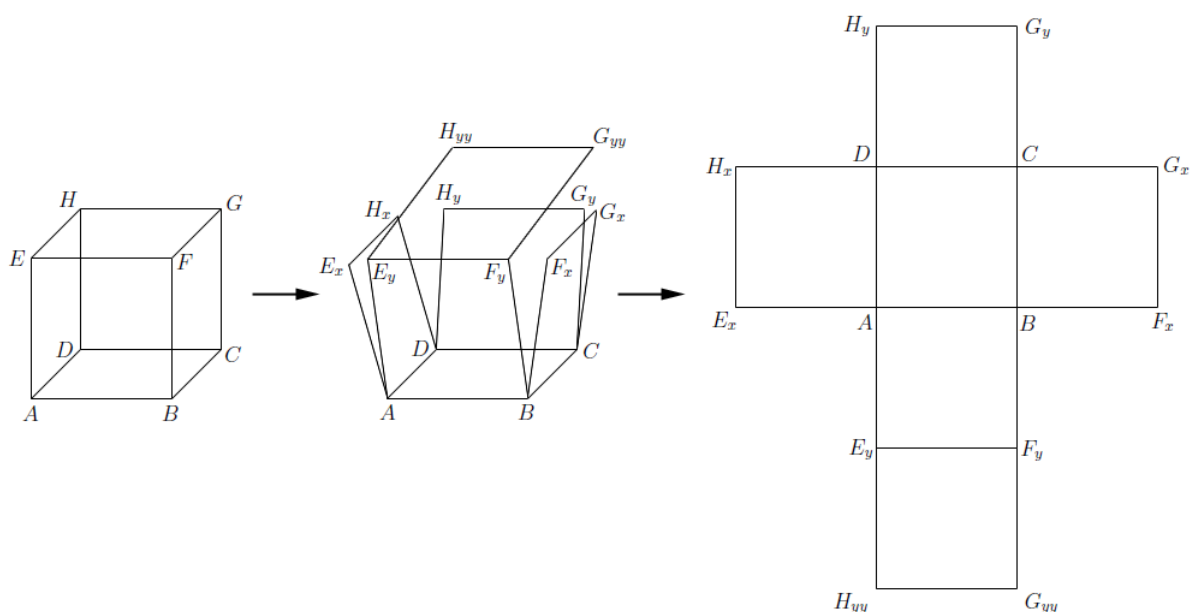
Ako rozbaľiť štvorrozmernú kocku?

Aby sme si mohli predstaviť rozbaľenie štvorrozmernej kocky, najprv sa pozrieme na rozbaľenie dvojrozmernej kocky (obrázok 14) a trojrozmernej kocky (obrázok 15). Podrobný postup rozbaľenia pomocou projekcií je uvedený v častiach 2.1 a 2.2.



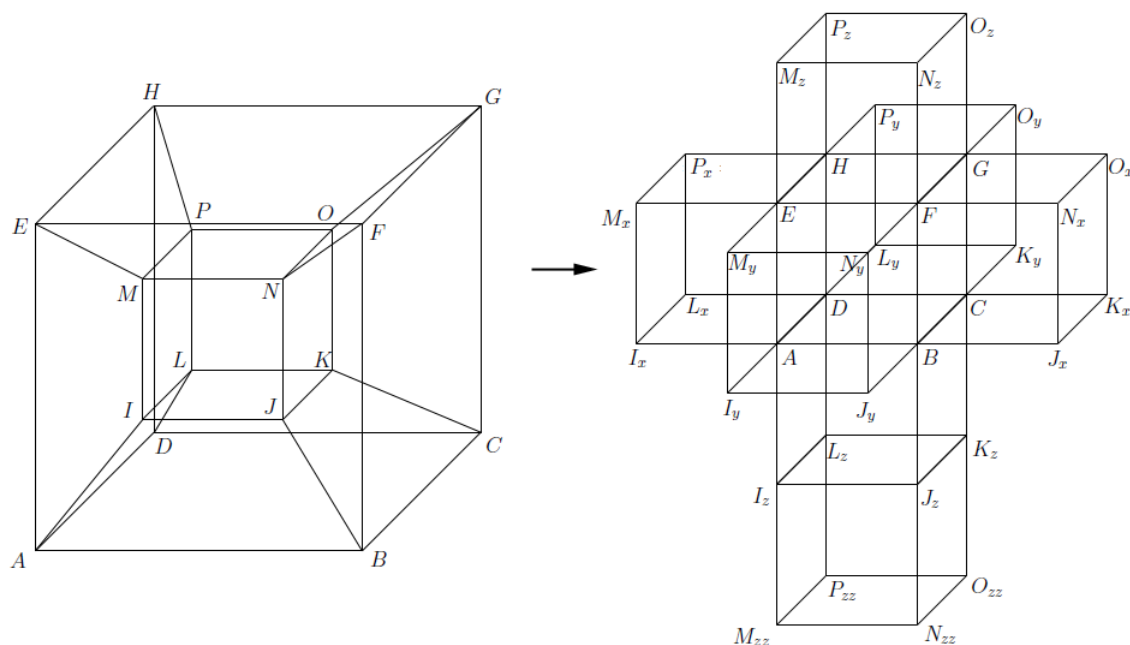
Obr. 14: Rozbaľenie štvorca.

Vidíme, že rozbaľenie štvorca je jednorozmerné a pozostáva zo 4 úsečiek. Rozbaľenie trojrozmernej kocky je dvojrozmerné a pozostáva zo 6 štvorcov. Analogicky, rozbaľenie štvorrozmernej kocky bude trojrozmerné a bude pozostávať z 8 trojrozmerných kociek (obrázok 16). Na tomto obrázku sme použili iné zobrazenie štvorrozmernej kocky, ako



Obr. 15: Rozbalenie trojrozmernej kocky.

na obrázku 13, vysvetlenie pôvodu tohto typu zobrazenia uvedieme neskôr. Podrobné odvodenie rozvinutia štvorrozmernej kocky pomocou projekcií je uvedené v časti 2.3.



Obr. 16: Rozbalenie štvorrozmernej kocky.

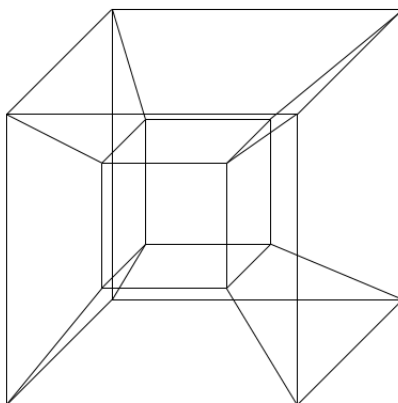
Tak ako môžeme trojrozmernú kocku zlepiť z jej plášťa na obrázku 15 tým, že vrcholy $E_x, E_y; F_x, F_y; G_x, G_y, G_{yy}$ a H_x, H_y, H_{yy} stotožníme spolu so zodpovedajúcimi

hranami, podobne môžeme dostať štvorrozmernú kocku z jej rozvinutia podľa obrázku 16 tak, že zlepíme vrcholy označené rovnakými písmenami, no rôznymi indexmi, napríklad M_x , M_y , M_z , M_{zz} zlepíme do jedného bodu M . Pritom, samozrejme, musíme zlepiť nielen vrcholy, ale aj zodpovedajúce hrany a plochy.

Pozrime sa opäť na obrázok 16. Môžeme predpokladať, že predstavuje maketu čudného 8-izbového domu. Tento dom opísal americký spisovateľ - fantasta Robert A. Heinlein v poviedke „*And He Built a Crooked House*“ (v českom preklade: Domeček jako klíčka). Keď sa hlavní hrdinovia prechádzali po tomto čudesnom dome, zostali prekvapení z nasledovnej okolnosti: keď sa začali prechádzať v určitom smere, na konci ich prechádzky sa znova dostali do miestnosti, z ktorej vyšli. Vidno to aj z rozvinutia štvorrozmernej kocky na obrázku 16, napríklad, keď sa pohybujeme zdola nahor, po prejdení štyroch miestností sa opäť dostaneme do izby, ktorá je na prízemí. Čiže podkrovia domu je spojené s prízemím.

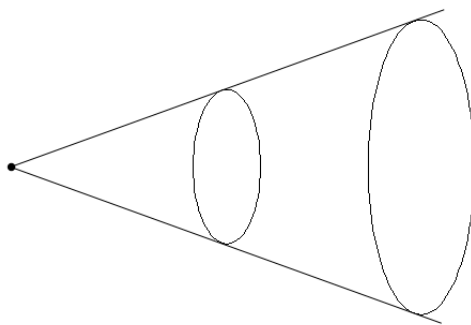
Iný spôsob zobrazenia štvorrozmernej kocky

Existuje ešte jeden populárny spôsob zobrazenia štvorrozmernej kocky, ktorý vidíme na obrázku 17. Osem trojrozmerných kociek je zobrazených na tomto obrázku vnútornou malou kockou, vonkajšou veľkou kockou a šiestimi useknutými pyramídami, ktoré spájajú zodpovedajúce plochy malej a veľkej kocky.



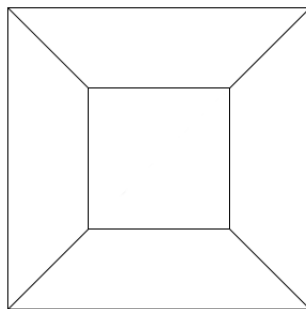
Obr. 17: Centrálnej projekcia štvorrozmernej kocky.

Tento obrázok dostaneme pri centrálnej projekcii (obrázok 18) štvorrozmernej kocky na niektorú trojrozmernú plochu.



Obr. 18: Centrálna projekcia.

Zmysel obrázku 17 ľahšie pochopíme, keď sa pozrieme na obrázok 19, na ktorom je zobrazená centrálna projekcia trojrozmernej kocky na dvojrozmernú plochu.



Obr. 19: Centrálna projekcia trojrozmernej kocky.

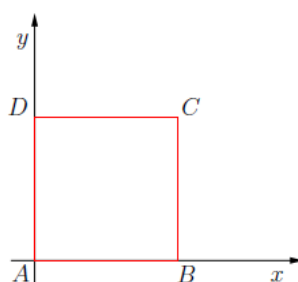
Na základe obrázku 17 je veľmi pohodlné určiť počet rôznych prvkov, z ktorých sa skladá štvorrozmerná kocka. Konkrétne má 16 vrcholov, 32 jednorozmerných hrán, 24 dvojrozmerných hrán (v tvare štvorcov) a 8 trojrozmerných hrán (v tvare kociek).

V predchádzajúcej časti tejto kapitoly sme vychádzali z článku [1].

V nasledujúcich častiach uvedieme podrobný postup rozbalenia kociek pomocou neortogonálnych projekcií. Pre zjednodušenie budeme uvažovať kocky s jednotkovou dĺžkou hrany.

2.1 Štvorec

Začneme najjednoduchším prípadom, čiže „dvojrozmernou kockou“. Teda chceme zobraziť „plášť“ štvorca (obrázok 20) v jednorozmernom podpriestore.



Obr. 20: Štvorec.

To znamená, že každý vrchol štvorca $ABCD$ predstavuje bod dvojrozmerného afinného priestoru, ktorý zobrazíme na priamku, ktorá nám predstavuje jednorozmerný afinný podpriestor (t.j. druhá súradnica bude nulová). Taktiež každú stranu štvorca (úsečka v dvojrozmernom priestore) zobrazíme do jednorozmerného podpriestoru. Štvorec umiestnime do počiatku súradnicovej sústavy, a teda súradnice jeho vrcholov sú nasledovné:

$$A = [0, 0]^T;$$

$$B = [1, 0]^T;$$

$$C = [1, 1]^T;$$

$$D = [0, 1]^T;$$

Vidíme, že vrcholy A , B a aj celá úsečka AB sa už v cieľovom jednorozmernom podpriestore nachádzajú, teda platí

$$A_x = A = [0, 0]^T; \tag{34}$$

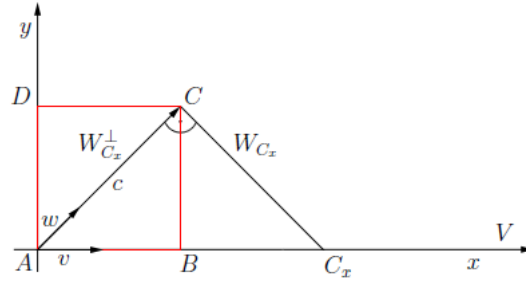
$$B_x = B = [1, 0]^T; \tag{35}$$

Zobrazenie vrcholu C

Na obrázku 21 vidíme projekciu C_x bodu C na podpriestor V v smere podpriestoru W_{C_x} . Podľa vzorca (24), ktorý sme odvodili v časti 1.3, potrebujeme vektor v tvoriaci podpriestor, na ktorý projektujeme, t.j. podpriestor V a vektor w tvoriaci podpriestor kolmý na podpriestor, v smere ktorého projektujeme, t.j. podpriestor $W_{C_x}^\perp$.

Vidíme, že

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ a } w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Obr. 21: Zobrazenie bodu C do bodu C_x .

Ako prvý zobrazíme bod C do bodu C_x . Teda vektor c , spájajúci počiatok súradnicovej sústavy a vrchol C , sprojektujeme do vektora, ktorý spája počiatok súradnicovej sústavy a bod C_x . Je zrejmé, že zložky tohoto vektora budú zároveň súradnicami bodu C_x , preto budeme pre jednoduchosť uvádzať rovno vzorec pre výpočet bodu. Pre bod C_x platí

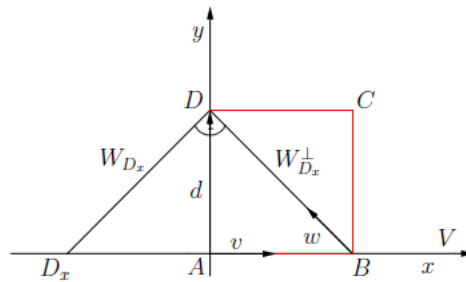
$$C_x = \frac{c^T w}{v^T w} \cdot v = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Zobrazením tohto vrcholu, sme zobrazili aj celú úsečku BC na úsečku $B_x C_x$.

Zobrazenie vrcholu D

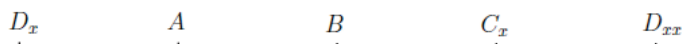
Ešte nám zostávajú 2 úsečky: CD a AD . To znamená, že bod D bude zobrazený v dvoch bodoch: D_x v zápornom smere osi x a D_{xx} v kladnom smere osi x .

Na obrázku 22 vidíme projekciu D_x bodu D na podpriestor V v smere podpriestoru W_{D_x} .



Obr. 22: Zobrazenie bodu D do bodu D_x .

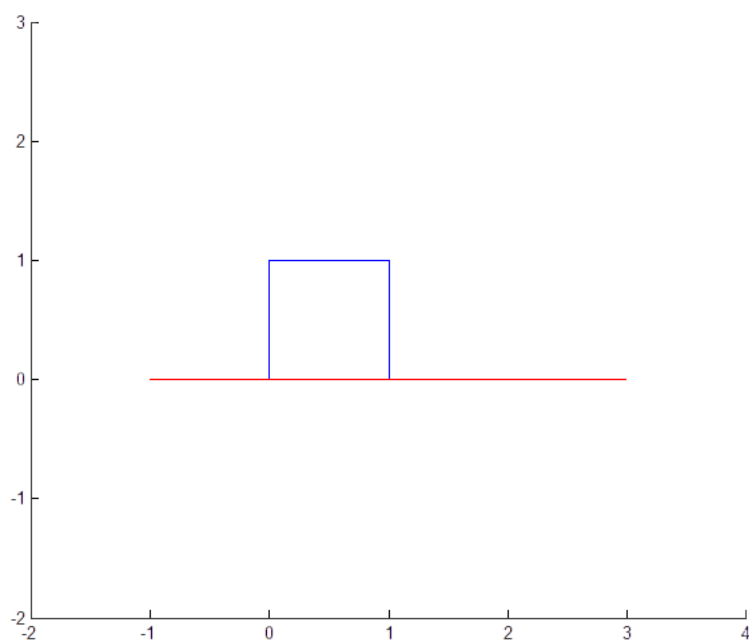
Podpriestor V zostáva rovnaký ako v prípade zobrazenia bodu C , pretože všetky body



Obr. 24: Rozbalenie štvorca.

Tým sme zobrazili všetky strany štvorca v jednorozmernom podpriestore. Ilustruje to obrázok 24.

Obrázok 25 je vytvorený funkciou napísanou v programe Matlab a predstavuje rozvinutie „plášťa“ štvorca do jednorozmerného podpriestoru. Modrou farbou je znázornený štvorec a jeho rozvinutie je znázornené červenou farbou. Funkcia má jeden parameter d , ktorým je možné meniť dĺžku strany štvorca. Funkcia je uvedená v Prílohe A.1.

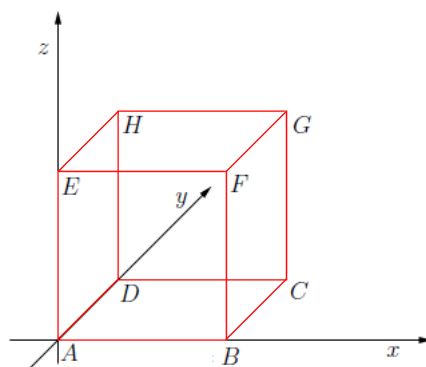


Obr. 25: Rozvinutie štvorca v Matlabe.

2.2 Trojrozmerná kocka

V tejto časti rozvinieme trojrozmernú kocku podobným spôsobom, ako sme v časti 2.1 rozvinuli štvorec. Chceme zobraziť plášť trojrozmernej kocky (obrázok 26) v dvojrozmernom podpriestore.

Rovnako ako v prípade štvorca, kocku umiestnime do počiatku súradnicovej sústavy s



Obr. 26: Trojrozmerná kocka.

nasledovnými súradnicami vrcholov:

$$A = [0, 0, 0]^T; \quad E = [0, 0, 1]^T;$$

$$B = [1, 0, 0]^T; \quad F = [1, 0, 1]^T;$$

$$C = [1, 1, 0]^T; \quad G = [1, 1, 1]^T;$$

$$D = [0, 1, 0]^T; \quad H = [0, 1, 1]^T;$$

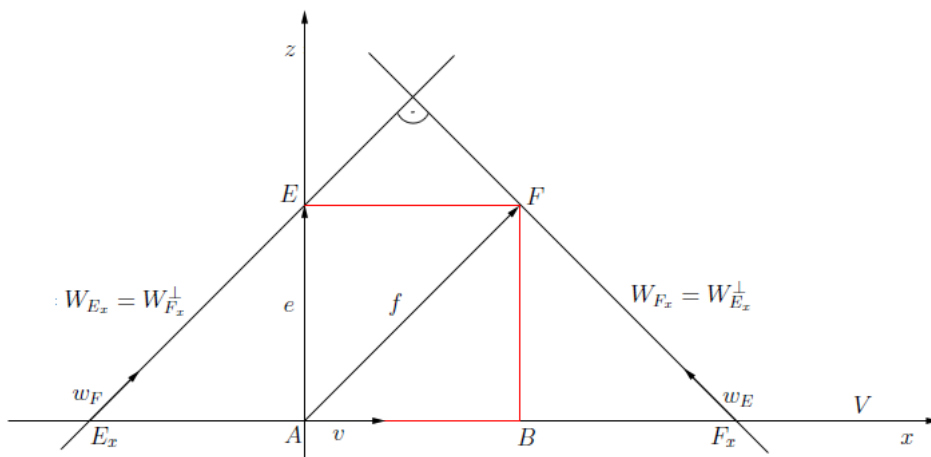
Všimnime si, že súradnice bodov A, B, C, D sú rovnaké ako v prípade štvorca, avšak majú tretiu súradnicu, ktorá je nulová. Vieme teda, že štvorec $ABCD$ sa už v cieľovom dvojrozmernom podpriestore nachádza, preto body A, B, C, D zobrazovať nebudeme.

Taktiež si všimnime súradnice bodov E, F, G, H . Prvé dve súradnice majú zhodné s bodmi A, B, C, D , ale líšia sa treťou súradnicou, ktorá je jednotková. Tento fakt využijeme pri určovaní súradníc štvorrozmernej kocky.

Keďže projektujeme do dvojrozmerného podpriestoru, musíme body E, F, G, H projektovať v dvoch smeroch: v smere osi x a v smere osi y .

Projekcie v smere osi x

Na obrázku 27 vidíme dvojrozmerný pohľad na kocku v smere osi y , teda štvorec $ABFE$. Obrázok znázorňuje projekciu bodov E a F v smere osi x , označíme ich E_x a F_x . Všimnime si, že štvorec $DCGH$ by pri tomto pohľade vyzeral rovnako (s tým rozdielom, že je posunutý v smere osi y , v ktorej smere však teraz neprojektujeme).



Obr. 27: Projekcia bodov E, F v smere osi x .

Pri projektovaní pláštá kocky budeme využívať vzorec (25) z časti 1.3. Opäť budeme potrebovať bázo­vé vektory tvoriace podpriestor, na ktorý projektujeme a podpriestor kolmý na podpriestor, v smere ktorého projektujeme. Avšak v prípade trojrozmernej kocky budú bázo­vé vektory dva (nie jeden ako v prípade štvorca), pretože tieto podpriestory sú dvojrozmerné.

Dvojrozmerný podpriestor V , na ktorý budeme projektovať vrcholy E, F, G, H , je tvorený dvoma báзовými vektormi $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, v smere osi x a vektorom $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, v smere osi y . Maticu, ktorej stĺpce sú tieto vektory, označíme A a bude nasledovná:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

 $F_x:$

Chceme zobrazit vrchol F do bodu F_x . Najskôr však musíme nájsť bázo­vé vektory tvoriace podpriestor $W_{F_x}^\perp$. Sú to vektory $w_F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Opäť z nich vytvoríme

maticu, ktorú označíme B :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Aj v tomto prípade budeme pre zjednodušenie využívať fakt, že vektor, ktorý je projekciou vektora f na V v smere W_{F_x} , má rovnaké zložky, ako sú súradnice bodu F_x .

Potom pre bod F_x platí

$$F_x = A(B^T A)^{-1} B^T f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (41)$$

G_x :

Pri zobrazení vrcholu G do bodu G_x sa matica B zložená z vektorov tvoriacich podpriestor kolmý na podpriestor, v smere ktorého projektujeme nezmení, pretože rovina tvorená týmito vektormi je invariantná na posun v smere osi y . Preto pre bod G_x platí

$$G_x = A(B^T A)^{-1} B^T g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

E_x :

Ďalej zobrazíme vrchol E do bodu E_x . Tentoraz sa nám zmení matica B , čiže opäť

musíme nájsť báze vektory podpriestoru $W_{E_x}^\perp$. Sú to vektory $w_E = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Teda matica B bude vyzeráť nasledovne:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Pre bod E_x platí

$$E_x = A(B^T A)^{-1} B^T e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (44)$$

H_x :

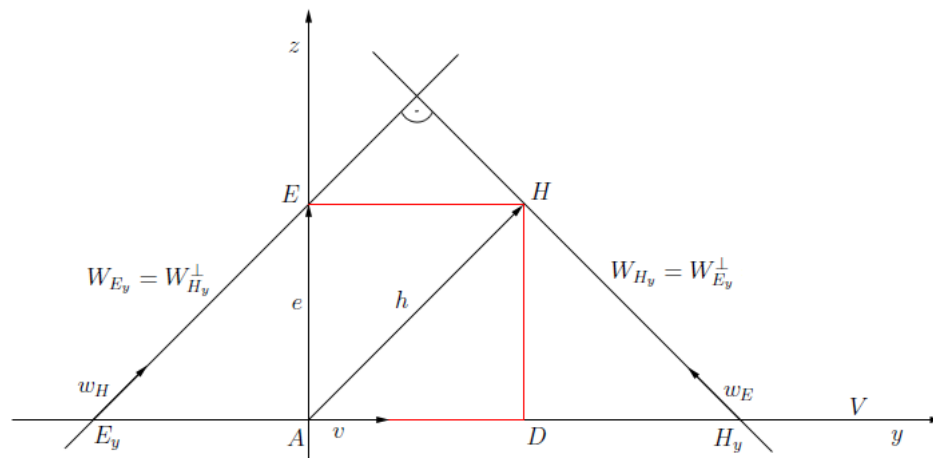
Pri zobrazení vrcholu H do bodu H_x môžeme opäť využiť maticu B z predchádzajúceho zobrazenia. Pre bod H_x teda platí

$$H_x = A(B^T A)^{-1} B^T h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Zobrazili sme všetky štyri body (E, F, G, H) v smere osi x a vznikli nám dva štvorce $E_x A D H_x$ a $B F_x G_x C$ v cieľovom dvojrozmernom podpriestore.

Projekcie v smere osi y

Na obrázku 28 je dvojrozmerný pohľad na kocku v smere osi x , teda štvorec $ADHE$. Vidíme tam projekcie bodov E a H v smere osi y , ktoré označíme E_y a H_y . Opäť si môžeme všimnúť, že štvorec $BCGF$ by pri tomto pohľade vyzeral rovnako (iba je posunutý v smere osi x , ale v tomto smere teraz neprojektujeme).



Obr. 28: Projekcia bodov E, H v smere osi y .

Stále projektujeme do rovnakého podpriestoru V , takže matica A bude (39).

H_y :

Teraz zobrazíme vrchol H do bodu H_y . Nájdeme bázoové vektory tvoriace podpriestor

$W_{H_y}^\perp$. Sú to vektory $w_H = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Matica B bude:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Potom bod H_y bude mať súradnice

$$H_y = A(B^T A)^{-1} B^T h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (47)$$

G_y :

Znova platí, že pri zobrazení vrcholu G do bodu G_y sa matica B zložená z vektorov tvoriacich podpriestor kolmý na podpriestor, v smere ktorého projektujeme nezmení, pretože rovina tvorená týmito vektormi je invariantná na posun v smere osi x . Potom pre bod G_y bude platiť

$$G_y = A(B^T A)^{-1} B^T g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (48)$$

E_y :

Ďalej zobrazíme vrchol E do bodu E_y . Bázoové vektory podpriestoru $W_{E_y}^\perp$ budú $w_E =$

$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a matica B :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (49)$$

Pre bod E_y platí

$$E_y = A(B^T A)^{-1} B^T e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (50)$$

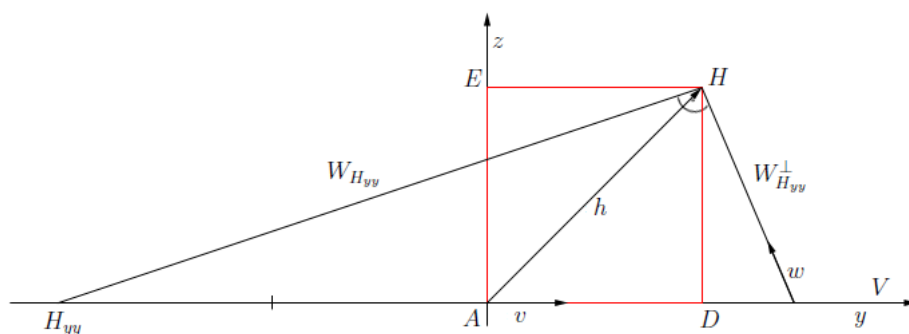
F_y :

Pri zobrazení vrcholu F do bodu F_y opäť využijeme maticu B z predchádzajúceho zobrazenia. Teda pre bod F_y platí

$$F_y = A(B^T A)^{-1} B^T f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Znova sme zobrazili všetky štyri body (E, F, G, H) , ale tentokrát v smere osi y a vznikli nám ďalšie dva štvorce $E_y F_y B A$ a $D C G_y H_y$ v cieľovom dvojrozmernom podpriestore.

Posledná stena trojrozmernej kocky, ktorú sme nezobrazili na podpriestor V , je $EFGH$. Zobrazíme ju v smere osi y , ako vidíme na obrázku 29. Opäť budeme naraz projektovať vrcholy H a G . Ich projekcie označíme H_{yy} a G_{yy} .



Obr. 29: Druhá projekcia bodu H v smere osi y .

H_{yy} :

Projektujeme vrchol H do bodu H_{yy} . Bázové vektory podpriestoru $W_{H_{yy}}^\perp$ budú $w_H =$

$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a matica B :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (52)$$

Pre bod H_{yy} platí

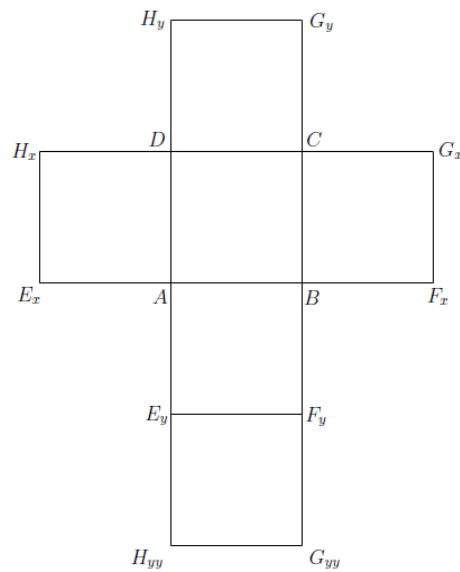
$$H_{yy} = A(B^T A)^{-1} B^T h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (53)$$

G_{yy} :

Pre projekciu G_{yy} vrcholu G platí

$$G_{yy} = A(B^T A)^{-1} B^T g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (54)$$

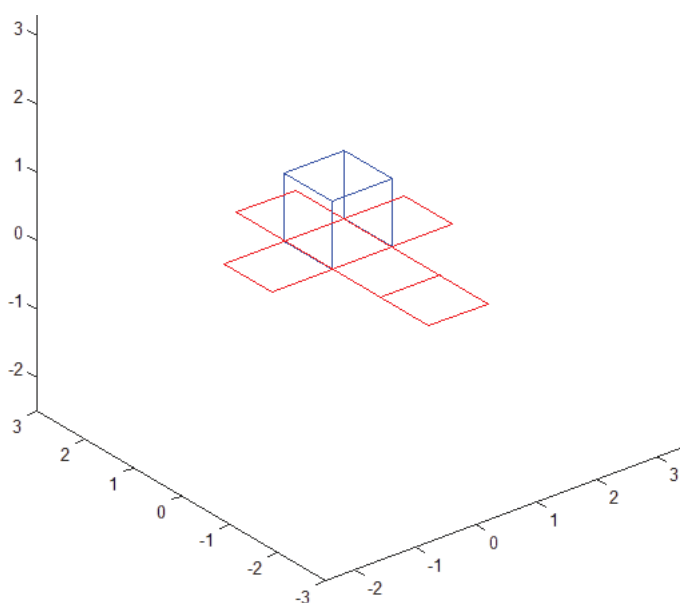
Tým sme na cieľový podpriestor V zobrazili posledný, šiesty štvorec $H_{yy}G_{yy}F_yE_y$.



Obr. 30: Rozbalenie trojrozmiernej kocky.

Na obrázku 30 vidíme plášť trojrozmernej kocky zobrazený v dvojrozmernom podpriestore.

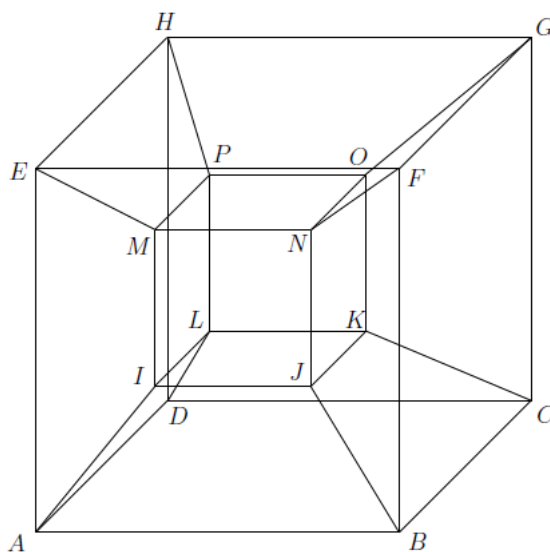
Obrázok 31 predstavuje rozvinutie plášťa trojrozmernej kocky do dvojrozmerného podpriestoru. Vidíme tam pôvodnú trojrozmernú kocku znázornenú modrou farbou a jej plášť v dvojrozmernom podpriestore znázornený červenou farbou. Tento obrázok je opäť vytvorený funkciou napísanou v programe Matlab. Funkcia má jeden parameter d , ktorým je možné meniť dĺžku hrany trojrozmernej kocky. Funkcia je uvedená v Prílohe A.2.



Obr. 31: Rozvinutie trojrozmernej kocky v Matlabe.

2.3 Štvorrozmerná kocka

Posledná časť je venovaná zobrazeniu plášťa štvorrozmernej kocky v trojrozmernom podpriestore, čo bolo cieľom našej práce. Pri zobrazovaní využijeme poznatky a postupy, ktoré sme použili v častiach 2.1 a 2.2 a podobným spôsobom rozvinieme štvorrozmernú kocku. Štvorrozmernú kocku vidíme na obrázku 32.



Obr. 32: Štvorrozmerná kocka.

Aj v tomto prípade umiestnime kocku do počiatku súradnicovej sústavy s nasledovnými súradnicami vrcholov:

$$\begin{array}{llll}
 A = [0, 0, 0, 0]^T; & E = [0, 0, 1, 0]^T; & I = [0, 0, 0, 1]^T; & M = [0, 0, 1, 1]^T; \\
 B = [1, 0, 0, 0]^T; & F = [1, 0, 1, 0]^T; & J = [1, 0, 0, 1]^T; & N = [1, 0, 1, 1]^T; \\
 C = [1, 1, 0, 0]^T; & G = [1, 1, 1, 0]^T; & K = [1, 1, 0, 1]^T; & O = [1, 1, 1, 1]^T; \\
 D = [0, 1, 0, 0]^T; & H = [0, 1, 1, 0]^T; & L = [0, 1, 0, 1]^T; & P = [0, 1, 1, 1]^T;
 \end{array}$$

Pri určovaní súradníc vrcholov štvorrozmernej kocky sme využili vedomosť z časti 2.2: súradnice bodov A, B, C, D, E, F, G, H budú rovnaké ako v trojrozmernej kocke so štvrtou súradnicou nulovou. Teda platí, že kocka $ABCDEFGH$ sa nachádza v cieľovom trojrozmernom podpriestore a ďalej ju zobrazovať nebudeme. Súradnice bodov I, J, K, L, M, N, O, P budú mať prvé tri zložky rovnaké ako A, B, C, D, E, F, G, H , avšak štvrtá súradnica bude jednotková.

V tomto prípade projektujeme do trojrozmerného podpriestoru, čiže body I, J, K, L, M, N, O, P budeme projektovať v troch smeroch: v smere osi x , v smere osi y a v smere osi z .

Pri projektovaní znova využijeme vzorec (25) z časti 1.3. Taktiež budeme potrebovať bázové vektory tvoriace podpriestor, na ktorý projektujeme a podpriestor kolmý

na podpriestor, v smere ktorého projektujeme. V prípade štvorrozmernej kocky budú bazové vektory tri, pretože tieto podpriestory sú trojrozmerné.

Najskôr určíme bazové vektory podpriestoru V , na ktorý projektujeme. Sú to vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, v smere osi x , $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, v smere osi y a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, v smere osi z . Matica A bude nasledovná:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (55)$$

Tak ako pri trojrozmernej kocke, aj v tomto prípade nám vzniknú skupiny bodov, ktoré budeme zobrazovať naraz, pretože ich budeme projektovať v smere rovnakého podpriestoru. Budú to skupiny štyroch bodov.

Projekcie v smere osi x

N_x, O_x, J_x, K_x :

Tieto body budeme zobrazovať v kladnom smere osi x a bazové vektory podpriestoru kolmého na podpriestor, v smere ktorého budeme projektovať, sú nasledovné:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Matica B bude:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Opäť vezmeme do úvahy fakt, že projekcia vektora n (spájajúceho počiatok súradnicovej sústavy a bod N) je vektor, ktorého zložky sú súradnicami bodu N_x . Preto pre

bod N_x bude platiť

$$\begin{aligned} N_x &= A(B^T A)^{-1} B^T n = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Rovnakým spôsobom dorátame ďalšie body:

$$O_x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, J_x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, K_x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

M_x, P_x, I_x, L_x :

Túto skupinu bodov budeme zobrazovať v zápornom smere osi x . Bázové vektory podpriestoru kolmého na podpriestor, v smere ktorého budeme projektovať, budú:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ a matica } B \text{ bude:}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (57)$$

$$M_x = A(B^T A)^{-1} B^T m =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$P_x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, I_x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, L_x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Do cieľového trojrozmerného podpriestoru sme zobrazili dve trojrozmerné kocky.

Projekcie v smere osi y

M_y, N_y, I_y, J_y :

Ďalšiu skupinu bodov zobrazíme v zápornom smere osi y . Bázové vektory podpriestoru kolmého na podpriestor, v smere ktorého budeme projektovať, budú nasledovné:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Teda matica } B \text{ bude:}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Matice A a B a vektor spájajúci počiatok súradnicovej sústavy a vrchol, ktorý zobrazujeme, dosadíme do vzorca (25) a dostaneme:

$$M_y = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, N_y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, I_y = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, J_y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

P_y, O_y, L_y, K_y :

Tieto body zobrazíme v kladnom smere osi y a bázové vektory podpriestoru kolmého na podpriestor, v smere ktorého budeme projektovať, budú:

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Matica B bude nasledovná:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (59)$$

Opäť dosadíme matice a príslušný vektor do vzorca (25) a dostaneme body:

$$P_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, O_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, L_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, K_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Do cieľového trojrozmerného podpriestoru sme zobrazili ďalšie dve trojrozmerné kocky.

Projekcie v smere osi z

M_z, N_z, P_z, O_z :

Túto skupinu bodov budeme projektovať v kladnom smere osi z . Bázové vektory podpriestoru kolmého na podpriestor, v smere ktorého projektujeme, budú:

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a dostaneme maticu B :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (60)$$

Znova vypočítame súradnice zobrazovaných bodov pomocou vzorca (25):

$$M_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, N_z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, P_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, O_z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

I_z, J_z, L_z, K_z :

Ďalšiu skupinu bodov budeme zobrazovať v zápornom smere osi z a bázové vektory podpriestoru kolmého na podpriestor, v smere ktorého budeme projektovať, budú nasledovné:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Matica } B \text{ bude:}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (61)$$

Matice A, B a príslušný vektor dosadíme do vzorca a dostaneme body:

$$I_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, J_z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, L_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, K_z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

V cieľovom podpriestore máme zobrazených sedem trojrozmerných kociek. Chýba nám teda posledná, ktorú opäť zobrazíme v zápornom smere osi z .

$M_{zz}, N_{zz}, P_{zz}, O_{zz}$:

Bázové vektory podpriestoru kolmého na podpriestor, v smere ktorého budeme projektovať, budú nasledovné:

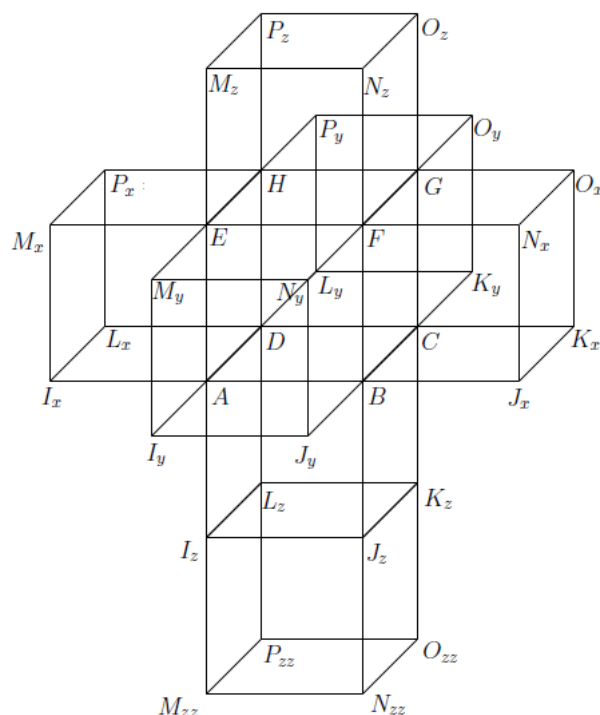
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ a matica } B \text{ bude:}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (62)$$

Do vzorca dosadíme matice A, B a príslušný vektor a dostaneme zobrazené body:

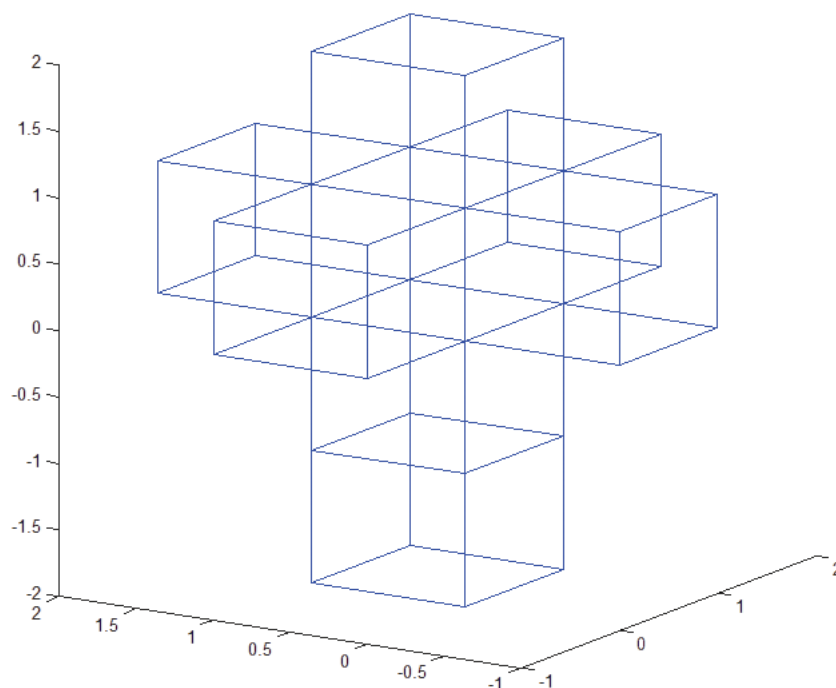
$$M_{zz} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, N_{zz} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, P_{zz} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, O_{zz} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Celý plášť štvorrozmernej kocky sme zobrazili do trojrozmerného podpriestoru (obrázok 33).



Obr. 33: Rozbalenie štvorrozmernej kocky.

Obrázok 34 je opäť vytvorený funkciou, ktorú sme napísali v programe Matlab a predstavuje rozvinutý plášť štvorrozmernej kocky v trojrozmernom podpriestore. Funkcia má jeden parameter d , ktorým je možné meniť dĺžku hrany štvorrozmernej kocky. Funkcia je uvedená v Prílohe A.3.



Obr. 34: Rozvinutie štvorrozmernej kocky v Matlabe.

Záver

V tejto bakalárskej práci sme sa detailne venovali projekciám. V prvej kapitole sme systematicky rozpracovali teóriu projekcií z pohľadu lineárnych transformácií v konečnorozmerných lineárnych priestoroch. Zaoberáme sa v nej aj neortogonálnymi (kosými) projekciami, ktorých špeciálnym prípadom sú takzvané ortogonálne projekcie, čo vychádza nad rámec bežného vysokoškolského učiva. Táto kapitola môže byť užitočná hlavne pre študentov lineárnej algebry na prehĺbenie učiva o projekciách.

Dôležitejšia je druhá kapitola, v ktorej sa venujeme samotnému cieľu našej práce, čiže praktickému využitiu projekcií pri vizualizácii viacrozmerných objektov. Konkrétne sme sa venovali rozvinutiu plášťa štvorrozmernej kocky do trojrozmernej roviny. Prvým krokom, ktorý sme museli zvládnuť, bolo názorne zobrazíť viacrozmerné útvary do dvojrozmernej roviny, čomu sa venujeme na začiatku druhej kapitoly. Zvolili sme jednoduchú metódu, ktorá je demonštrovaná pohybom jednoduchších útvarov v priestore vyššej dimenzie. Avšak toto znázornenie štvorrozmernej kocky (obrázok 13, strana 30) nevyhovovalo všetkým našim požiadavkám, preto sme na znázornenie štvorrozmernej kocky použili centrálnu projekciu, pri ktorej vznikol taký obrazec štvorrozmerného útvaru, ktorý nám poskytol všetky potrebné údaje (obrázok 17, strana 32). Následne sme prešli k samotnej projekcii. Najskôr sme rozbalili „plášť“ štvorca (obrázok 24, strana 37), čo sme neskôr využili pri projekcii plášťa trojrozmernej kocky do dvojrozmernej roviny (obrázok 30, strana 44). Poznatky z týchto výpočtov nám pomohli zostrojiť trojrozmerný útvar zodpovedajúci plášťu štvorrozmernej kocky (obrázok 33, strana 52), čo sa nám podarilo vďaka tomu, že sme pre príslušné vrcholy kocky zostrojili matice neortogonálnych projekcií, čím vznikol útvar na uvedenom obrázku. Všetky použité projekcie pri zobrazovaní plášťov štvorca, trojrozmernej kocky a štvorrozmernej kocky sme naprogramovali v Matlabe. Vstupným parametrom týchto funkcií bol parameter d , označujúci dĺžku hrany príslušnej kocky. Výstupom z funkcií boli súradnice zobrazených vrcholov a taktiež obrázky 25 (strana 37), 31 (strana 45) a 34 (strana 53), ktoré zobrazujú pôvodnú kocku a taktiež „rozbalenú“ kocku na jednom obrázku, okrem prípadu štvorrozmernej kocky, kde výstupný obrázok tvorí iba plášť štvorrozmernej kocky v trojrozmernej rovine.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Dužin, S., Rubcov, V.: *Četyrehmernyj kub*, Kvant 198 (1986), dostupné na internete (30.4.2014):
http://kvant.ras.ru/1986/06/chetyrehmernyj_kub.htm
- [2] Saad, Y.: *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, SIAM, 2003
- [3] Saad, Y.: *Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems*, SIAM, 2011
- [4] Strang, G.: *Linear Algebra and Its Applications*, Academic Press, 1976
- [5] Yanai, H., Takeuchi, K., Takane, Y.: *Projection Matrices, Generalized Inverse Matrices, and Singular Value Decomposition*, Springer Science+Business Media, LLC, 2011

Príloha A

A.1 Štvorec

```
function kocka2d(d)
A=[0;0];
B=[d;0];
C=[d;d];
D=[0;d];

line([A(1),B(1)], [A(2),B(2)])
line([B(1),C(1)], [B(2),C(2)])
line([C(1),D(1)], [C(2),D(2)])
line([D(1),A(1)], [D(2),A(2)])

v=[1;0];
w=[1;1];
Cx=C'*w/(v'*w)*v;
w=[-1;1];
Dx=D'*w/(v'*w)*v;
w=[1;3];
Dxx=D'*w/(v'*w)*v;

line([Dx(1),Dxx(1)], [Dx(2),Dxx(2)], 'Color', 'red')
axis([-1-d 3*d+1 -1-d 3*d+1])
axis square
```

A.2 Trojrozmerná kocka

```
function kocka3d(d)

A=[0;0;0];
B=[d;0;0];
C=[d;d;0];
D=[0;d;0];
E=[0;0;d];
F=[d;0;d];
G=[d;d;d];
H=[0;d;d];

plot3([A(1),B(1)], [A(2),B(2)], [A(3),B(3)])
line([B(1),C(1)], [B(2),C(2)], [B(3),C(3)])
line([C(1),D(1)], [C(2),D(2)], [C(3),D(3)])
line([D(1),A(1)], [D(2),A(2)], [D(3),A(3)])
line([A(1),E(1)], [A(2),E(2)], [A(3),E(3)])
line([B(1),F(1)], [B(2),F(2)], [B(3),F(3)])
line([C(1),G(1)], [C(2),G(2)], [C(3),G(3)])
line([D(1),H(1)], [D(2),H(2)], [D(3),H(3)])
line([E(1),F(1)], [E(2),F(2)], [E(3),F(3)])
line([F(1),G(1)], [F(2),G(2)], [F(3),G(3)])
line([G(1),H(1)], [G(2),H(2)], [G(3),H(3)])
line([H(1),E(1)], [H(2),E(2)], [H(3),E(3)])

V=[1 0; 0 1; 0 0];
W=[1 0; 0 1; 1 0];
Fx=V*(inv(W'*V))*W'*F;
Gx=V*(inv(W'*V))*W'*G;
W=[-1 0; 0 1; 1 0];
Ex=V*(inv(W'*V))*W'*E;
Hx=V*(inv(W'*V))*W'*H;
```

```
W=[0 1; 1 0; 1 0];
Hy=V*(inv(W'*V))*W'*H;
Gy=V*(inv(W'*V))*W'*G;
W=[0 1; -1 0; 1 0];
Ey=V*(inv(W'*V))*W'*E;
Fy=V*(inv(W'*V))*W'*F;
W=[ 0 1; -1 0; 3 0];
Hyy=V*(inv(W'*V))*W'*H;
Gyy=V*(inv(W'*V))*W'*G;

line([Ex(1),Hx(1)],[Ex(2),Hx(2)], 'Color','red')
line([Hy(1),Hyy(1)],[Hy(2),Hyy(2)], 'Color','red')
line([Gyy(1),Gy(1)],[Gyy(2),Gy(2)], 'Color','red')
line([Fx(1),Gx(1)],[Fx(2),Gx(2)], 'Color','red')
line([Hyy(1),Gyy(1)],[Hyy(2),Gyy(2)], 'Color','red')
line([Ey(1),Fy(1)],[Ey(2),Fy(2)], 'Color','red')
line([Ex(1),Fx(1)],[Ex(2),Fx(2)], 'Color','red')
line([Hx(1),Gx(1)],[Hx(2),Gx(2)], 'Color','red')
line([Hy(1),Gy(1)],[Hy(2),Gy(2)], 'Color','red')
axis([-1-3/2*d 5/2*d+1 -1-2*d 2*d+1 -1-3/2*d 5/2*d+1])
axis square
```

A.3 Štvorrozmerná kocka

```
function kocka4d(d)

A=[0;0;0;0];
B=[d;0;0;0];
C=[d;d;0;0];
D=[0;d;0;0];
E=[0;0;d;0];
F=[d;0;d;0];
G=[d;d;d;0];
H=[0;d;d;0];
I=[0;0;0;d];
J=[d;0;0;d];
K=[d;d;0;d];
L=[0;d;0;d];
M=[0;0;d;d];
N=[d;0;d;d];
O=[d;d;d;d];
P=[0;d;d;d];

V=[1 0 0; 0 1 0; 0 0 1; 0 0 0];
W=[1 0 0; 0 1 0; 0 0 1; 1 0 0];
Nx=V*(inv(W'*V))*W'*N;
Ox=V*(inv(W'*V))*W'*O;
Jx=V*(inv(W'*V))*W'*J;
Kx=V*(inv(W'*V))*W'*K;
W=[-1 0 0; 0 1 0; 0 0 1; 1 0 0];
Mx=V*(inv(W'*V))*W'*M;
Px=V*(inv(W'*V))*W'*P;
Ix=V*(inv(W'*V))*W'*I;
Lx=V*(inv(W'*V))*W'*L;
W=[ 0 1 0;-1 0 0; 0 0 1; 1 0 0];
```

```
My=V*(inv(W'*V))*W'*M;
Ny=V*(inv(W'*V))*W'*N;
Iy=V*(inv(W'*V))*W'*I;
Jy=V*(inv(W'*V))*W'*J;
W=[0 1 0; 1 0 0; 0 0 1; 1 0 0];
Py=V*(inv(W'*V))*W'*P;
Oy=V*(inv(W'*V))*W'*O;
Ly=V*(inv(W'*V))*W'*L;
Ky=V*(inv(W'*V))*W'*K;
W=[0 1 0; 0 0 1; 1 0 0; 1 0 0];
Mz=V*(inv(W'*V))*W'*M;
Nz=V*(inv(W'*V))*W'*N;
Pz=V*(inv(W'*V))*W'*P;
Oz=V*(inv(W'*V))*W'*O;
W=[ 0 1 0; 0 0 1;-1 0 0; 1 0 0];
Iz=V*(inv(W'*V))*W'*I;
Jz=V*(inv(W'*V))*W'*J;
Lz=V*(inv(W'*V))*W'*L;
Kz=V*(inv(W'*V))*W'*K;
W=[ 0 1 0; 0 0 1;-1 0 0; 3 0 0];
Mzz=V*(inv(W'*V))*W'*M;
Nzz=V*(inv(W'*V))*W'*N;
Pzz=V*(inv(W'*V))*W'*P;
Ozz=V*(inv(W'*V))*W'*O;

plot3([My(1),Iy(1)],[My(2),Iy(2)],[My(3),Iy(3)])
line([Ny(1),Jy(1)],[Ny(2),Jy(2)],[Ny(3),Jy(3)])
line([Mx(1),Ix(1)],[Mx(2),Ix(2)],[Mx(3),Ix(3)])
line([Mz(1),Mzz(1)],[Mz(2),Mzz(2)],[Mz(3),Mzz(3)])
line([Nz(1),Nzz(1)],[Nz(2),Nzz(2)],[Nz(3),Nzz(3)])
line([Nx(1),Jx(1)],[Nx(2),Jx(2)],[Nx(3),Jx(3)])
```

```
line([Px(1),Lx(1)],[Px(2),Lx(2)],[Px(3),Lx(3)])
line([Pz(1),Pzz(1)],[Pz(2),Pzz(2)],[Pz(3),Pzz(3)])
line([Oz(1),Ozz(1)],[Oz(2),Ozz(2)],[Oz(3),Ozz(3)])
line([Ox(1),Kx(1)],[Ox(2),Kx(2)],[Ox(3),Kx(3)])
line([Py(1),Ly(1)],[Py(2),Ly(2)],[Py(3),Ly(3)])
line([Oy(1),Ky(1)],[Oy(2),Ky(2)],[Oy(3),Ky(3)])

line([Mz(1),Nz(1)],[Mz(2),Nz(2)],[Mz(3),Nz(3)])
line([Pz(1),Oz(1)],[Pz(2),Oz(2)],[Pz(3),Oz(3)])
line([My(1),Ny(1)],[My(2),Ny(2)],[My(3),Ny(3)])
line([Mx(1),Nx(1)],[Mx(2),Nx(2)],[Mx(3),Nx(3)])
line([Px(1),Ox(1)],[Px(2),Ox(2)],[Px(3),Ox(3)])
line([Py(1),Oy(1)],[Py(2),Oy(2)],[Py(3),Oy(3)])
line([Iy(1),Jy(1)],[Iy(2),Jy(2)],[Iy(3),Jy(3)])
line([Ix(1),Jx(1)],[Ix(2),Jx(2)],[Ix(3),Jx(3)])
line([Lx(1),Kx(1)],[Lx(2),Kx(2)],[Lx(3),Kx(3)])
line([Ly(1),Ky(1)],[Ly(2),Ky(2)],[Ly(3),Ky(3)])
line([Iz(1),Jz(1)],[Iz(2),Jz(2)],[Iz(3),Jz(3)])
line([Lz(1),Kz(1)],[Lz(2),Kz(2)],[Lz(3),Kz(3)])
line([Mzz(1),Nzz(1)],[Mzz(2),Nzz(2)],[Mzz(3),Nzz(3)])
line([Pzz(1),Ozz(1)],[Pzz(2),Ozz(2)],[Pzz(3),Ozz(3)])

line([Mz(1),Pz(1)],[Mz(2),Pz(2)],[Mz(3),Pz(3)])
line([Nz(1),Oz(1)],[Nz(2),Oz(2)],[Nz(3),Oz(3)])
line([Mx(1),Px(1)],[Mx(2),Px(2)],[Mx(3),Px(3)])
line([My(1),Py(1)],[My(2),Py(2)],[My(3),Py(3)])
line([Ny(1),Oy(1)],[Ny(2),Oy(2)],[Ny(3),Oy(3)])
line([Nx(1),Ox(1)],[Nx(2),Ox(2)],[Nx(3),Ox(3)])
line([Ix(1),Lx(1)],[Ix(2),Lx(2)],[Ix(3),Lx(3)])
line([Iy(1),Ly(1)],[Iy(2),Ly(2)],[Iy(3),Ly(3)])
line([Jy(1),Ky(1)],[Jy(2),Ky(2)],[Jy(3),Ky(3)])
```

```
line([Jx(1),Kx(1)],[Jx(2),Kx(2)],[Jx(3),Kx(3)])  
line([Iz(1),Lz(1)],[Iz(2),Lz(2)],[Iz(3),Lz(3)])  
line([Jz(1),Kz(1)],[Jz(2),Kz(2)],[Jz(3),Kz(3)])  
line([Mzz(1),Pzz(1)],[Mzz(2),Pzz(2)],[Mzz(3),Pzz(3)])  
line([Nzz(1),Ozz(1)],[Nzz(2),Ozz(2)],[Nzz(3),Ozz(3)])  
axis square
```