UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

SIMULOVANIE DÁT Z ROZDELENÍ

BAKALÁRSKA PRÁCA

2014 **Mátyás Varga**

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

SIMULOVANIE DÁT Z ROZDELENÍ

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program:	Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	Mgr. Darina Graczová

Bratislava 2014

Mátyás Varga

54076742

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta:	Mátyás Varga
Študijný program:	ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor:	9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce:	bakalárska
Jazyk záverečnej práce:	slovenský

Názov: Simulovanie dát z rozdelení / *Simulating of data from the distribution*

Cieľ: Vytvorenie aplikácie využitím MATLAB GUI na generovanie dát z rôznych rozdelení.

Vedúci:	Mgr. Darina Graczová
Katedra:	FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry:	prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania:	18.10.2013

Dátum schválenia: 14.11.2013

doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
garant študijného programu

....
študent

....
vedúci práce

Poďakovanie Touto cestou sa chcem poďakovat svojej vedúcej bakalárskej práce Mgr. Darine Graczovej za jej ochotu, pomoc, odborné vedenie a trpezlivosť.

Abstrakt v štátnom jazyku

VARGA, Mátyás: Simulovanie dát z rozdelení [Bakalárska práca]

Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky;
Školiteľ: Mgr. Darina Graczová, Bratislava, 2014, 50s.

Cieľom tejto bakalárskej práce bola teoretická analýza možnosti využitia štatistických rozdelení v stochastických procesoch na simulovanie cien akcií a použitím výsledkov tejto teoritickej analýzy vytvorenie skutočnej aplikácie. Preskúmali sme používanie viacerých rozdelení v stochastických procesoch a vytvorili sme programovú aplikáciu používajúcu popísané procesy, pomocou ktorej sme aj otestovali ich fungovanie na skutočných údajoch. Program v procese simulovania využíva aj metódu Monte Carlo, ktorá sa používa najčastejšie na simulovanie podobných procesov. Práca sa zaoberá aj vytvorením optimálneho portfólia na základe vygenerovaných očakávaných výnosov.

Kľúčové slová: Štatistické rozdelenia, Stochastické procesy, Monte Carlo metóda, Geometrciký Brownov pohyb, Markowitzovo portfólio

Abstrakt v cudzom jazyku

VARGA, Mátyás: Data simulation from statistical distributions [Bachelor Thesis]

Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics;
Supervisor: Mgr.Darina Graczová, Bratislava, 2014, 50p.

The main goal of this bachelor thesis was the theoretical description and practical use of statistical distributions in stochastic processes to simulate stock prices. We designed various processes and constructed an application which applies the aforementioned processes to test them on historical data. The program uses the Monte Carlo simulation for each stochastic process, the most popular method for similar simulations. The thesis also deals with creating an optimal portfolio according to the generated expected returns.

Keywords: Statistical distribution, Stochastic proceses, Monte Carlo methods, Geometrical Brownian motion, Markowitz

Obsah

Úvod **8**

1. Základné pojmy z oblasti štatistiky **9**

1.1 Náhodná premenná 9

1.2 Stredná hodnota 9

1.3 Disperzia 9

1.4 Štandardná odchýlka alebo Smerodajná odchýlka 10

1.5 Šikmosť 10

1.6 Špicatosť 11

1.7 Variancia 11

1.8 Kovariancia a korelácia 12

1.9 Kovariančná matica 12

1.10 Distribučná funkcia 13

1.11 Hustota náhodnej veličiny 13

2 Rozdelenia **14**

2.1 Normálne rozdelenie 14

2.2 Studentovo rozdelenie 15

2.3 Logistické rozdelenie 16

2.4 Cauchyho rozdelenie 17

3 Zostrojenie modelu a spôsob simulovania **18**

3.1 Výnos 18

3.2 Stochastické procesy 18

3.3 Brownov pohyb ako základný model na určenie budúcich výnosov akcií 19

3.1.1 Defínicia Brownovho pohybu 19

3.4 Geometrický Brownov Pohyb (GBM) 21

3.5 Korelovaný Geometrický Brownov Pohyb 23

3.5.1 Generovanie korelovaných náhodných premených z normálneho rozdelenia 23

3.6 Všeobecný stochastický proces 25

3.7 Monte Carlo metóda 26

3.6.1 Meranie presnosti modelu 27

3.7 Vytvorenie portfólia 28

3.7.1 Markowitzovo portfólio 28

4 Praktická časť 31
4.1 Základná schéma fungovania aplikácie 31
4.2 Získanie a úprava dát 32
3.2.1 Úprava vstupných dát 33
4.3 Výpočet štatistických premenných. 34
4.4 Zostrojenie modelov a simulácia. 35
4.4.1 Zostrojenie modelov pre iné rozdelenie 36
4.5 Vyhodnotenie generovaných dát. 37
4.5.1 Normálne rozdelenie 37
4.5.2 Logistické, Studentovo a Cauchyho rozdelenie 38
4.5.3 Kontrola a chyba simulovania. 39
4.6 Testovanie vstupných podmienok 42
4.7 Korelovaný Brownov pohyb 43
4.8 Vytvorenia portfólia 44
4.8.1 Markowitzovo portfólio 45
Záver 46
Zoznam použitej literatúry 47
Prílohy 49

Úvod

Predikcia cien akcií a ceny indexov bola vždy a aj v súčasnosti je stredobodom pozornosti každého investora a predstavuje podstatnú časť ekonomickej aktivity finančných inštitúcií. Aktuálnosť a dôležitosť problematiky vystihuje i pridelenie Nobelovej ceny za ekonomické vedy, ktorú získali traja americkí ekonómovia Eugen F.Fama, Lars Peter Hansen a Robert J. Shiller za empirické analýzy cien aktív.

V tejto práci sa budeme zaoberať vytvorením aplikácie, čo je užitočným nástrojom pre investora na zistenie výnosu a rizika svojho portfólia, respektíve na vytvorenia nového portfólia. Pomocou tejto aplikácie bude možné použiť určité štatistické rozdelenia na simulovanie vývoja výnosov a cien akcií a indexov, ako aj vyhodnotiť zhodu výsledkov jednotlivých štatistických rozdelení so skutočnými historickými dátami.

Touto problematikou sa zaoberá veľké množstvo publikácií, vo väčšine prípadov používajú špeciálne viacrozmerné rozdelenia. Táto aplikácia používa stochastické procesy používajúc normálne rozdelenie ako základ, ale postupne budeme realizovať a analyzovať ďalšie procesy, používajúce zložitejšie rozdelenia. Práca obsahuje definíciu týchto stochastických procesov, popisuje ich modifikáciu pre účely simulovania vývoja cien akcií a indexov a súčasťou práce je aj vytvorená aplikácia používajúca uvedené teoretické zistenia. Program v procese simulovania využíva aj metódu Monte Carlo, čo je najpopulárnejšia metóda na simulovanie procesov.

Taký typ aplikácie má významné využitie aj v praxi. Podobné softvéry používajú aj jednotlivé banky a brokerské spoločnosti na predikciu výnosov a na zostrojenie prognóz. Dôležitou podmienkou pri tvorbe aplikácie bola aj jednoduchosť a nenáročnosť jej používania.

1. Základné pojmy z oblasti štatistiky

V tejto kapitole sú zadefinované tie základné pojmy z teórie pravdepodobnosti a zo štatistiky, ktoré sa v ďalších kapitolách používajú pri definovaní rôznych rozdelení a pri zostrojení modelov na simulovanie vývoja cien akcií. Čerpali sme najmä z [5] a [10].

1.1 Náhodná premenná

Nech je množina výsledkov náhodného pokusu Ω. Symbolom (Ω, S, P), kde S je σ-algebra merateľných množín na Ω a P je pravdepodobnostná miera na Ω, budeme označovať pravdepodobnostný priestor.

Definícia 1.1. *Nech* (Ω, S, P) *je pravdepodobnostný priestor. Zobrazenie* $X : \Omega \to R$ *nazývame náhodnou premennou, ak pre každé* $x \in R$ *platí* $\{\omega : X(\omega) < x\} \in S$.

T.j. pre každé $x \in R$ je vzorom intervalu $(-\infty, x)$ nejaký náhodný jav $A = \{\omega : X(\omega) < x\}$ patriaci do množiny S. Náhodná premenná X priradí jednoznačne každému elementárnemu

javu ω reálne číslo. $X(\omega)$ sa nazýva realizácia náhodnej premennej X.

1.2 Stredná hodnota

Definícia 1.2. *Nech X je náhodná premenná, ktorá nadobúda hodnoty* $xi, i = 1,2, \ldots$ *s pravdepodobnosťami* $p_i = P(X = x_i)$. *Strednou hodnotou náhodnej veličiny X nazveme číslo* $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i$, *ak tento rad konverguje absolútne. Ak rad nekonverguje absolútne budeme hovoriť, že náhodná premenná nemá strednú hodnotu.*

Stredná hodnota umožňuje najlepšie charakterizovať náhodnú premennú s jedným číslom. Keď všetky hodnoty náhodnej premennej $xi, i = 1,2, \ldots$ majú rovnakú pravdepodobnosť $pi = P(X = xi)$, tak stredná hodnota bude priemer hodnôt xi.

Definícia 1.3. *Nech* $X = (X_1 \ldots X_n)^T$ *je vektor náhodných premenných. Potom jeho stredná hodnota* $E(X)$ *je vektor* $E(X) = (E(X_1) \ldots E(X_n))^T$.

1.3 Disperzia

Definícia 1.4. *Nech X je ľubovoľná náhodná premenná nech jej stredná hodnota je* $E(X) = \mu$. *Potom disperzia je definovaná nasledujúcim vzťahom:*

$$D(X) = \sqrt{E(X^2) - E^2(X)}.$$

1.4 Štandardná odchýlka alebo Smerodajná odchýlka

Definícia 1.4. *Smerodajná odchýlka je definovaná ako kladná druhá odmocnina z priemernej kvadratickej odchýlky.*

$$S = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}.$$

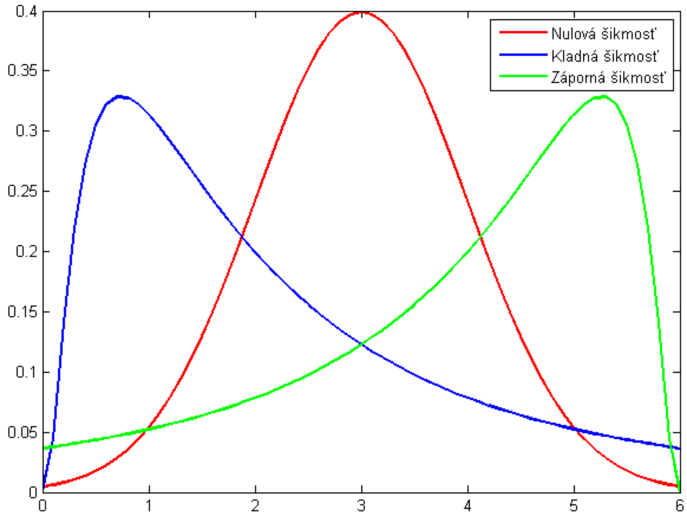
Štandardná odchýlka vyjadruje do akej miery sú hodnoty rozptýlené od strednej hodnoty.

1.5 Šikmosť

Definícia 1.5. *Nech X je ľubovoľná náhodná premenná a nech jej stredná hodnota je $E(X) = \mu$ a disperzia je $D(X) = \sigma^2$. Potom koeficient asymetrie je definovaný nasledovným podielom:*

$$\gamma_1 = \frac{E[X - E(X)]^3}{(var\ X)^{3/2}}.$$

I. $\gamma 1 = 0$: v tomto prípade hovoríme, že rozdelenie pravdepodobnosti je symetrické. Znamená to, že hodnoty náhodnej veličiny sú rovnomerne rozdelené na pravú aj ľavú stranu od strednej hodnoty.
II. $\gamma 1 > 0$: ide o pozitívne alebo pravostranne zošikmené rozdelenie. Znamená to, že napravo od priemeru sa vyskytujú vzdialenejšie hodnoty ako naľavo a väčšina hodnôt sa nachádza viac vľavo od priemeru.
III. $\gamma 1 < 0$: ide o negatívne alebo ľavostranne zošikmené rozdelenie.



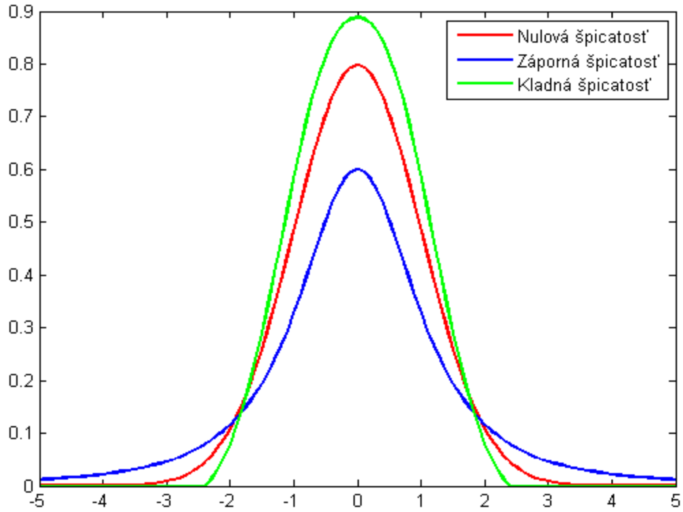
OBR. 1 Tvar hustoty rozdelenia pre rôzne hodnoty šikmosti

1.6 Špicatosť

Definícia 1.6. *Nech X je ľubovoľná náhodná premenná a nech jej stredná hodnota je $E(X) = \mu$ a disperzia je $D(X) = \sigma 2$. Potom koeficient špicatosti je definovaný nasledovným podielom:*

$$\gamma_2 = \frac{E[X - E(X)]^4}{(var\ X)^2} - 3.$$

I. $\gamma 2 = 0$: v tomto prípade ide o normované normálne rozdelenie.
II. $\gamma 2 > 0$: kladný koeficient špicatosti hovorí, že dané rozdelenie pravdepodobnosti je špicatejšie ako normálne rozdelenie.
III. $\gamma 2 < 0$: dané rozdelenie pravdepodobnosti je viac ploché ako normálne rozdelenie.



OBR. 2 Tvar hustoty rozdelenia pre rôzné hodnoty špicatosti

1.7 Variancia

Definícia 1.7. *Nech X je diskrétna náhodná veličina so strednou hodnotou $E(X)$. Variancia náhodnej veličiny X je číslo*

$$Var(X) = E[(X - E(X))2]$$

Ak táto stredná hodnota existuje.

Strednú hodnotu sme definovali ako číslo, ktoré charakterizuje náhodnú veličinu. Presnosť tejto charakteristiky vyjadruje variancia náhodnej veličiny. Čím je variancia menšia, nadobudnuté hodnoty náhodnej veličiny sú tým bližšie k strednej hodnote.

1.8 Kovariancia a korelácia

Definícia 1.8. *Nech X a Y sú diskrétne náhodné veličiny so strednými hodnotami a varianciami. Potom strednú hodnotu $E((X - E(X)(Y - E(Y))$ (ak existuje) budeme nazývať kovarianciou X a Y. (označíme ako $cov(X,Y)$).*

Kovariancia vyjadruje závislosť medzi dvomi náhodnými veličinami.

Definícia 1.9. *Nech X a Y sú diskrétne náhodné veličiny so strednými hodnotami $E(X), E(Y)$ a nenulovými varianciami $var(X)$ a $var(Y)$.Koeficient korelácie medzi X a Y je číslo*

$$\rho_{X,Y} = cov\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{var(X)}}, \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{var(Y)}}\right)$$

Korelačný koeficient je špeciálnym prípadom kovariancie dvoch náhodných veličín. Vyjadruje kovarianciu medzi dvoma normovanými náhodnými veličinami X a Y.

- ρ nadobúda hodnoty z intervalu $[-1, 1]$;
- ak $\rho = 1$, ide o priamu lineárnu (t. j. funkčnú) závislosť;
- ak $\rho = -1$ ide o nepriamu lineárnu (t. j. funkčnú) závislosť;
- ak $\rho = 0$ vieme vo všeobecnosti povedať iba to, že náhodné premenné sú nekorelované .

Pre nezávislé náhodné premenné X a Y platí vždy, že $\rho(X,Y) = 0$.

1.9 Kovariančná matica

Definícia 1.10. *Kovariančná matica náhodného vektora $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ je matica*

$$\sum = var(X) = E\{[X - E(X)][X - E(X)]T\} = \begin{pmatrix} var(X_1) & \cdots & cov(X_1, X_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(X_1, X_n) & \cdots & var(X_n) \end{pmatrix}$$

Veta 1.1. *Nech A je matica, b je vektor. Potom*

$$E(AX + b) = AE(X) + b$$

$$var(AX + b) = Avar(X)A^T$$

Dôkaz: Prvá rovnosť vyplýva z vlastnosti strednej hodnoty náhodného vektora (Definíca1.3.).

$$var(AX+b) \ = \big[[(AX+b)-E(AX+b)][(AX+b)-E(AX+b)^T]\big]$$

$$= E\big[A\big(X-E(X)\big)(X-E(X))^T A^T\big]$$

$$= AE\big[\big(X-E(X)\big)(X-E(X))^T\big]A^T$$

$$= Avar(X)A^T.$$

Veta 1.1. *Ak X je náhodný vektor, tak* $var(X)$ *je symetrická pozitívne semidefinitná matica, t.j. pre každé* $u \in R^n$ *platí:*

$$u^T var(X)u \ \geq 0.$$

Dôkaz: Dôkaz okamžite vyplýva z Vety1.1. $u^T var(X)u = var(u^T X) \geq 0$ pre každé u.

1.10 Distribučná funkcia

Definícia 1.11. *Distribučná funkcia náhodnej veličiny* $X : \Omega -> R$ *je funkcia* $F: R -> < 0,1 >$ *definovaná predpisom* $F(x) = P(X < x)$.

Distribučná funkcia udáva pravdepodobnosť, že hodnota náhodnej veličiny je menšia ako zadaná hodnota. Distribučná funkcia jednoznačne určuje rozdelenie pravdepodobnosti.

1.11 Hustota náhodnej veličiny

Definícia 1.12. *Náhodná veličina je spojitá, ak existuje nezáporná integrovateľná funkcia* f *tak, že pre každé* $x \in R$ *platí:*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Funkcia f *sa nazýva hustota.*

Pod integrálom rozumieme Riemannov určitý integrál. V spojitom prípade hustota pravdepodobnosti je úzko spätá s distribučnou funkciou. Hustota nie je daná jednoznačne, ak ju zmeníme na konečnej množine, zrejme dostaneme inú hustotu toho istého rozdelenia.

2 Rozdelenia

V tejto kapitole vychádzame najmä z [8] a [9].

2.1 Normálne rozdelenie

Normálne rozdelenie je najdôležitejším rozdelením spojitej veličiny v teórii pravdepodobnosti. Týmto rozdelením pravdepodobnosti sa síce neriadi veľké množstvo veličín, ale je používané vo viacerých modeloch ako základné rozdelenie.

Defínicia 2.1. *Náhodná premenná má normálne rozdelenie s parametrami μ a σ^2, ak má hustotu*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Stručný zápis: $X \sim N(\mu, \sigma 2)$

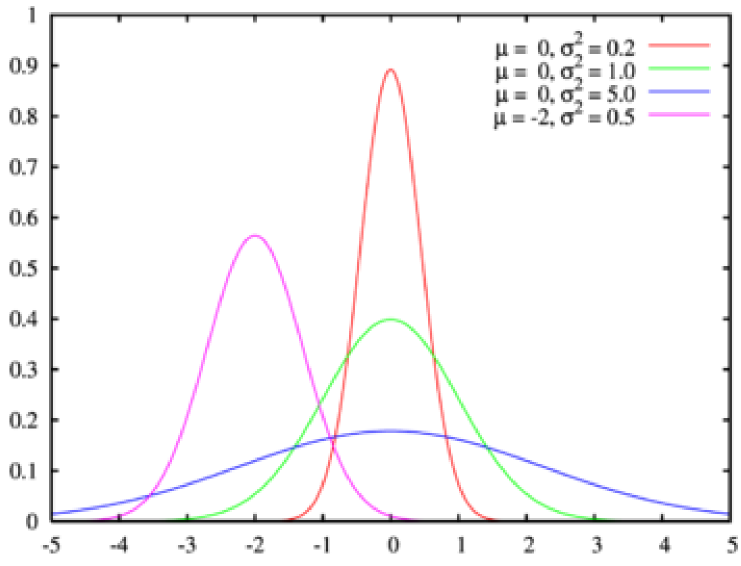
Číselné charakteristiky pre $X \sim N(\mu, \sigma 2)$*:*

Stredná hodnota $E(X) = \mu$

Disperzia $D(X) = \sigma^2$

Koeficient šikmosti $\gamma 1 = 0$

Koeficient špicatosti $\gamma 2 = 0$



OBR. 3 Hustota normálneho rozdelenia

2.2 Studentovo rozdelenie

Studentovo rozdelenie má v matematickej štatistike veľmi významné postavenie a využitie. Najčastejšie sa používa pri určovaní intervalových odhadov a pri testovaní štatistických hypotéz. Studentovo roz

Definícia 2. *Hovoríme, že náhodná premenná X má Studentovo rozdelenie s v - stupňami voľnosti, ak jej hustota má tvar:*

$$f_k(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\sqrt{v\pi}}\left(1+\frac{x^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}$$

Kde gama funkcia je definovaná nasledovne: $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}dx$

Stručný zápis: $X \sim t(v)$

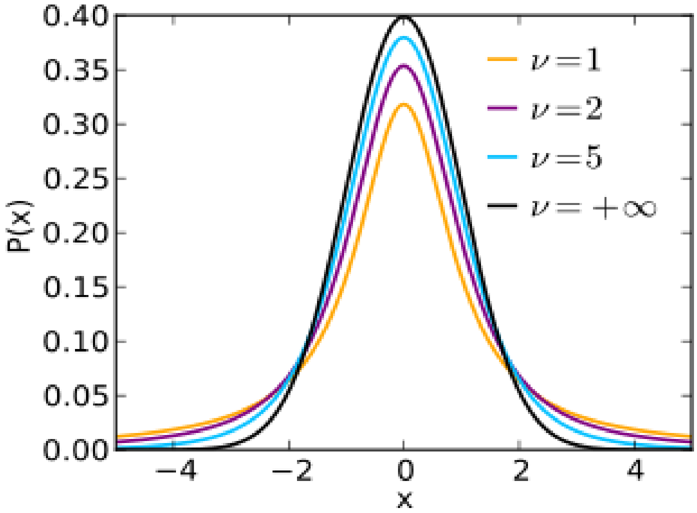
Číselné charakteristiky pre $X \sim t(v)$:

Stredná hodnota $E(X) = 0$, *ak* $v > 1$

Disperzia $D(X) = \frac{v}{v-2}$, *ak* $v > 2$

Koeficient šikmosti $\gamma 1 = 0$

Koeficient špicatosti $\gamma 2 = \frac{3v-6}{v-4}$, *ak* $v > 4$



OBR. 4 Hustota studentovo rozdelenia

2.3 Logistické rozdelenie

Logistické rozdelenie sa podobá na normálne rozdelenie s rozdielom, že Logistické rozdelenie má ťažší chvost.

Definícia 2.1. *Náhodná premenná má logistické rozdelenie s parametrami μ a σ^2, ak má hustotu*

$$f(x) = \frac{e^{\frac{-x-\mu}{\sigma}}}{\sigma\left(1 + e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}\right)^2}$$

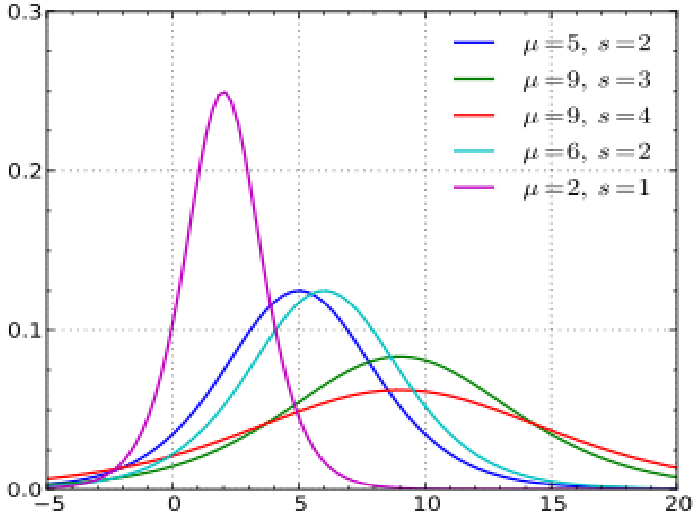
Číselné charakteristiky pre Logistické rozdelenie:

Stredná hodnota $E(X) = \mu$

Disperzia $D(X) = \frac{\sigma^2\pi^2}{3}$

Koeficient šikmosti $\gamma 1 = 0$

Koeficient špicatosti $\gamma 2 = 1{,}2$



OBR. 5 Hustota logistického rozdelenia

2.4 Cauchyho rozdelenie

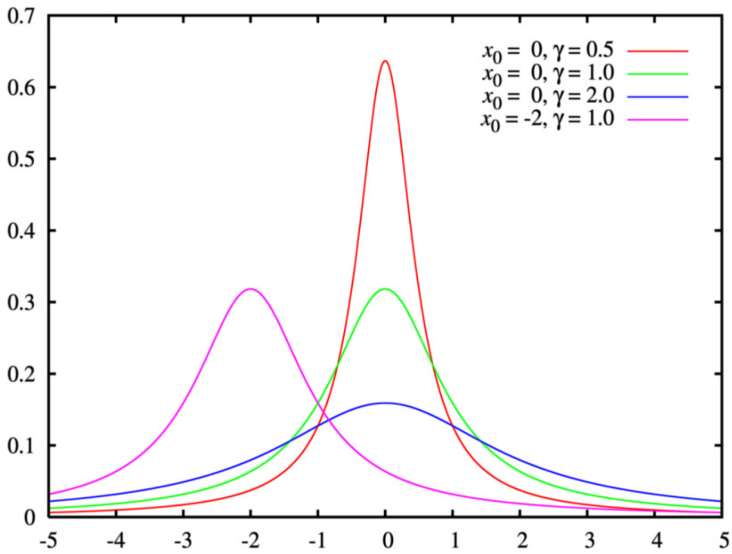
Cauchyho rozdelenie je tiež spojité štatistické rozdelenie s ťažkým chvostom.

Definícia 2.1. *Náhodná premenná má cauchyho rozdelenie s parametrami β a γ, ak má hustotu*

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\gamma}{(x-\beta)^2 + \gamma^2}\right]$$

,kde β je parameter špicatosti a γ je parameter šikmosti rozdelenia.

Číselné charakteristiky pre Cauchyho rozdelenie nie sú zadefinované, treba ich vypočítať cez definícií štatistických premenných.



OBR. 6 Hustota cauchyho rozdelenia

1 Zostrojenie modelu a spôsob simulovania

Táto kapitola predstavuje teoretické základy možnosti používania štatistických rozdelení v praxi. Použitím jednotlivých štatistických rozdelení popíšeme modely na generovanie a simulovanie výnosov akcií do budúcnosti. Štatistické a pravdepodobnostné premenné a momenty vypočítame z historických dát akcií. V tejto kapitole sa zaoberáme len s teoretickým popisom jednotlivých modelov, v ďalšej kapitole tieto modely aj zostrojíme a spravíme všetky simulácie na reálnom príklade. Pri generovaní budúcich cien akcií potrebujeme zadefinovať výnos a niekoľko iných základných pojmov.

3.1 Výnos

Výnos predstavuje, že cena akcie o koľko stotín percentu sa zvýšilo, alebo kleslo v určitom období. Definíciu výnosu môžeme nájsť v [7] a [8].

Definícia 2.1. *Relatívny výnos v časovom okamihu t na n–dní, je definované so vzťahom:* $R_t = \frac{P_t - P_{t-n}}{P_{t-n}}$ *,kde* P_t *je cena aktíva v časovom okamihu t.*

Vo financiách najčastejšie sa vyskytujú relatívne výnosy, čo je uvažovaný ako základný typ výnosov.

Definícia 2.2. *Logaritmický výnos v časovom okamihu t na n–dní, je definované so vzťahom:* $R\mathrm{t} = \ln \frac{Pt}{P_{t-n}}$ *,kde* P_t *je cena aktíva v časovom okamihu t.*

Niekedy logaritmický výnos nám zjednoduší rátanie, alebo nám dáva presnejší výsledok. Práca používa logaritmické výnosy.

3.2 Stochastické procesy

Procesy prebiehajúce v závislosti od náhodnej hodnoty určitého javu nazývame stochastickými. Stochastický proces teda vždy obsahuje aspoň jednu náhodnú premennú. V tejto a ďalšej podkapitole sme si čerpali najmä z knihy [7] a [8].

Definícia 3.1. *Stochastický proces je súbor náhodných premenných* $X = \{Xt; 0 < t < \infty\}$ *na pravdepodobnostnom priestore* (Ω, F, P) *s hodnotami v* R^d*. Pre každé t je*

$$\omega \rightarrow Xt(\omega);\ \omega \in \Omega$$

náhodná premenná. Ak zafixujeme $\omega \in \Omega$, *dostávame funkciu*

$$t \rightarrow Xt(\omega);\ 0 \leq t < \infty$$

ktorá sa nazýva trajektória X priradená ω.

Pre názornosť si t môžeme predstavovať ako čas a ω ako experiment. Potom $X_t(\omega)$ nám predstavuje výsledok experimentu ω v čase t. Niekedy je vhodnejšie písať $X(t,\omega)$ namiesto $X_t(\omega)$. Takto možno stochastický proces považovať za funkciu dvoch premenných:

$$(t,\omega) \ \rightarrow \ X(t,\omega) \ \ z \ [0,\infty] \ \times \ \Omega \ do \ R^d.$$

Definícia 3.2. *V prípade, že platí* $t \ \in \ T \ a \ T \subseteq Z$ *hovoríme o stochastickom procese s diskrétnym časom. V prípade, že T je interval reálnych čísel hovoríme o stochastickom procese s reálnym časom.*

Na generovanie výnosov budeme používať stochastické modely s diskrétnym časom, lebo generovať očakávané výnosy budeme len na celé dni, tj. generujeme len záverečné hodnoty dňa . $X_t(\omega)$ nám bude predstavovať očakávaný výnos v čase t, kde t označuje počet dní od začiatku generovania. To znamená, že t bude nadobúdať hodnoty z množiny celých čísiel ($t \ \in \ T \ a \ T \subseteq Z$).

Definícia 3.3. *Ak náhodné veličiny* X^t *nadobúdajú len diskrétne hodnoty, tak hovoríme o procese s diskrétnymi stavmi. Ak* X^t *nadobúda hodnoty z nejakého intervalu, hovoríme o procese so spojitými stavmi.*

Všetky nižšie popísané modely sú stochastické procesy s diskrétným stavom, lebo každá generovaná hodnota $\mathrm{X_t(\omega)}$ nám udáva jedno presné číslo a nie interval.

3.3 Brownov pohyb ako základný model na určenie budúcich výnosov akcií

Brownov pohyb je najpopulárnejší a najviac používaný stochastický proces. Model je pomenovaný podľa slávneho botanika Roberta Browna, ktorý pozoroval nepravidelný pohyb peľových zrniek. Pohyb bol neskôr vysvetlený pomocou náhodných interakcií s molekulami kvapaliny. Matematický model tohto pohybu napísal Norbert Wiener a odvtedy sa používa aj názov Wienerov proces.

1.1.1 Defínicia Brownovho pohybu

Definícia 3.4. *Brovnow pohyb je stochastický proces s nasledujúcimi vlastnosťami:*

I. *S pravdepodobnosťou* 1 *sú trajektórie* $B_t(\omega)$ *spojité a platí* $B_0 = 0$.
II. *Náhodná premenná* B_t *má normálne rozdelenie* $N(0,t)$
III. $B_{t+s} - B_s$ *má* $N(0,t)$ *rozdelenie. Ďalej platí, že* B_t *má nezávislé prírastky, t.j.* $B_{t1}, B_{t2} \ - \ B_{t1}, \ldots, B_{tk} \ - \ B_{tk-1}$ *sú nezávislé pre všetky* $0 \leq t_1 <\ldots< t_k$.

Tretí bod definície 3.4. nám hovorí o tom, že všetky prírastky $B_{t+s} - B_s$ majú $N(0,t)$ rozdelenie. Z definície vyplýva striktná vlastnosť Brownovho pohybu a to, že generuje dáta len z normálneho rozdelenia. Podľa tejto metódy budeme musieť teda predpokladať, že výnosy sa budú vyvíjať podľa normálneho rozdelenia, čo je dosť silný predpoklad. Práve z tohto dôvodu musíme konštatovať, že Brownov pohyb nie je najlepším modelom na určenie výnosov akcií, ale ako základ sa používa vo viacerých finančných inštitúciach.

Hustotu Brovnowho pohybu na konci časového intervalu $[0;t]$ získame z hustoty normálneho rozdelenia, dosadením: $\mu = 0$ a $\sigma = \sqrt{t}$.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma}}.$$

Kde x predstavuje hodnotu premennej B_t.

Brownov pohyb môžeme definovať aj iným spôsobom:

Definícia 3.5. *Pohyb W je nazývané ako* (μ, σ) *Brownov pohyb, keď ho môžeme napísať v tvare:*

$$W(t) = \mu t + \sigma B(t),$$

kde B je štandartný Browov pohyb z Definície 3.4.

Drift μ ako aj volatilita σ sú v našom označení konštantami, ale vo všeobecnosti ich môžeme nahradiť náhodnými veličinami.

Na generovanie očakávaných výnosov akcií a indexov, podľa definície 3.5. je možné zostrojenie konkrétneho modelu. Po zadefinovaní predpokladu, že výnosy jednotlivých aktív majú charakter normálneho rozdelenia, vieme z nich vypočítať parametre μ a σ. Parametre sú vygenerované tak, aby hustota normálneho rozdelenia, ktorá obsahuje tieto parametre v maximálnej možnej miere kopírovala hodnoty vstupu. Vypočítané parametre dosadíme do modelu z definície 3.5. V tomto modele premenná $B(t)$ je náhodnou premennou, ktorú treba vygenerovať z normálneho rozdelenia $N(0,t)$. Keďže v ďalšom generujeme denné výnosy, tak $t = 1$. Po dosadení:

$$W(t) = \mu + \sigma B(t).$$

Tento vzorec nám vygeneruje očakávaný výnos t-tého dňa simulovania. Z vlastnosti Brownovho pohybu z definície 3.4. tieto denné výnosy budú lineárne nezávislé.

Podľa teórie dokonalých trhov sa výnosy aktív na finančných trhoch správajú náhodne a nezávisle na predchádzajúcom vývoji. Brownov pohyb je preto ideálnym nástrojom na vyjadrenie tohto náhodného správania sa vývoja výnosov akcií. Nevýhodou takto definovaného procesu je, že nie je možné ho použiť na generovanie cien akcií, lebo generovaná pravdepodobnosť môže byť aj záporná a teda cena akcie môže klesnúť až do záporných čísiel, čo v praxi nie je možné. Vo finančných modeloch na simulovanie ceny akcií sa preto používa geometrický Brownov pohyb, čo už tieto nedostatky nemá.

3.4 Geometrický Brownov Pohyb (GBM)

Pri odvodení Geometrického Brownovho pohybu vychádzame z knihy [1].

Nech Δt je určitý časový úsek, $S(t)$ a $S(t + \Delta t)$ sú ceny akcií v danom čase (v súčasnom t a v budúcom čase $t + \Delta t$), a $B(t)$ je prírastok Brownovho pohybu za čas Δt. Základný GBM je zadefinovaný v tvare diferenciálnej rovnici:

$$(1) \quad dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t).$$

Riešenie pre $S(t)$ môžeme nájsť použitím Itôvej lemmy.

<u>Lemma 3.1. (Itôva lemma)</u>

Nech $B(t)$ je Brownian pohyb a nech $W_t(\omega)$ je Itôv proces

$$dW_t(\omega) = \mu(t,\omega)dt + \sigma(t,\omega)dB_t(\omega).$$

Nech $f(t,x) \in C^2([0,\infty) \times R)$. Potom

$$Y_t(\omega) = f\big(t, W_t(\omega)\big),$$

je tiež Itôv proces a platí:

$$dY_t = \frac{\partial f}{\partial t}(t, W_t)dt + \frac{\partial f}{\partial w}(t, W_t)dW + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}(t, W_t)\sigma^2 dt.$$

Odvodenie a dôkaz Itôvej lemmy možno nájsť napr. v [7, str. 150].

Predelením pôvodnej rovnici (1) s výrazom S(t) dostaneme:

$$(1{,}1) \quad \frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dB(t).$$

Prvý člen na pravej strane nazývame deterministická zložka procesu. Premenná μ predstavuje kon- štantný parameter driftu odpovedajúci očakávanej miere výnosu akcie. Za krátky časový interval dt teda vzrastie cena akcie o $\mu S(t\,)dt$. Druhý člen na pravej strane predstavuje sto- chastickú zložku procesu. Jej súčasťou je Brownov pohyb. Parameter σ voláme volatilita. Je rovný smerodajnej odchýlke výnosu a je konštantný celé obdobie modelovania.

Nech $x = ln(S)$. Po dosadením do lemmy3 dostaneme:

$$dx = \left(\frac{\partial x}{\partial S}\mu S + \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 x}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \sigma S\frac{\partial x}{\partial S}dB(t).$$

Chceme vyriešiť diferenciálnu rovnicu a z toho vyjadriť $S(t)$, t.j. vývoj ceny podľa času. Na riešenie tejto rovnici potrebujem derivácie:

$$\frac{\partial x}{\partial S} = \frac{1}{S},$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}.$$

Po dosadením derivácií dostaneme:

$$dx = \left(\frac{1}{2}\mu S + 0 - \frac{1}{2S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \sigma S\frac{1}{S}dB(t),$$

$$dx = \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dB(t)\text{ , kde } dx = d(\ln S).$$

Vyjadríme cenu S v čase T.

$$\ln\big(S(T)\big) - \ln\big(S(0)\big) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma B(T),$$

$$\ln\frac{S(T)}{S(0)} = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma B(T).$$

Zlomok $\ln\frac{S(T)}{S(0)}$ má normálne rozdelenie s parametrami.

$$E\left[\left(\ln\frac{S(T)}{S(0)}\right)\right] = E\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma B(T)\right] = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T,$$

$$D\left[\left(\ln\frac{S(T)}{S(0)}\right)\right] = D\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma B(T)\right] = \sigma^2 T.$$

Aj stredná hodnota, aj disperzia rastú lineárne s časom.

Vyjadrime $S(T)$ aby sme si mohli vypočítať rovno očakávanú cenu v čase T:

$$S(T) = S(0)e^{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T+\sigma B(T)}.$$

Tá je konečná a známa forma pre geometrický Brownov pohyb.

Vidno, že tá formule nikdy nebude generovať záporné hodnoty, takže tento model sa už dá používať na modelovanie ceny akcií.

3.5 Korelovaný Geometrický Brownov Pohyb

Doteraz definované stochastické modely slúžia len na definovanie nezávislých náhodných premenných, v našom prípade ceny len pre jednu konkrétnu akciu. Doposiaľ sme predpokladali, že výnosy akcií jednotlivých firiem sú nezávislé, čiže medzi jednotlivými firmami neexistuje žiadna závislosť. To však nie je pravda, hlavne v jednom ekonomickom priestore. Cieľom tejto podkapitoly je vytvoriť model, ktorým sa dajú simulovať výnosy viacerých akcií s nenulovou koreláciou, čo je zadefinované napríklad v [2]. Ten model sa líši od Geometrického Brwonovho pohybu len v tom, že nebudeme všetky B_t generovať z normálneho rozdelenia s parametrami $(0, t)$, ale budeme generovať vektor náhodných premenných, kde všetky náhodné premenné sú z normálneho rozdelenia s parametrami $(0, \sum)$, kde $\sum$ je kovariančna matica.

3.5.1 Generovanie korelovaných náhodných premených z normálneho rozdelenia

Problémom je generovanie vektora náhodných veličín $X = (X_1, \dots, X_n)$, kde všetky veličiny sú z rozdelenia: $X \sim N(0, \sum)$.

Veta 3.2. *Nech C je všeobecná $(n \times m)$matica a nech $Z = (Z_1, Z_2 \dots Z_n)^T$ je vektor nezávislých náhodných veličín z normálneho rozdelenia $Z_i \sim N(0,1)$. Potom:*

$$C^T Z \sim N(0, C^T C).$$

Aby používaním vety 3.2. sme dostali vektor $X \sim N(0, \sum)$ musíme vhodne zvoliť maticu C. Matica C musí spĺňať: $\sum = C^T C$, kde $\sum$ je vyššie definovaná kovariančná matica. Na rozloženie matice $\sum$ na súčin $C^T C$ slúži Choleskyho dekompozícia.

Definícia 3.6. (Choleskyho dekompozícia)

Poznáme fakt z lineárnej algebry, že každá, kladne definitná matica M sa dá napísať v tvare:

$$M = U^T DU,$$

kde U je horná trojuholníková matica a D je diagonálna matica s kladnými číslami na diagonále.

Cholsekyho dekompozícia znamená, že každá kladne definitná matica A sa dá napísať v tvare: $A = LL^T,$

kde L je dolná trojuholníková matica.

Kedže kovariančná matica $\sum$ je symetrická, pre kladne definitnú maticu (Definíca 1.5.), platí:

$$\sum = \mathrm{U^T D U}$$

$$= \left(\mathrm{U^T}\sqrt{\mathrm{D}}\right) * \left(\sqrt{\mathrm{D}}\mathrm{U}\right)$$

$$= \left(\sqrt{\mathrm{D}}\mathrm{U}\right)^{\mathrm{T}} * \left(\sqrt{\mathrm{D}}\mathrm{U}\right).$$

Nech matica $L = \left(\sqrt{D}U\right)^T$, tak $LL^T = \sum$.

Podľa Vety 3.2. stačí vygenerovať vektor nezávislých premenných $Z = (Z_1, Z_2 \dots Z_n)^T$ z rozdelenia $Z_i \sim N(0,1)$, potom vynásobiť zľava s maticou $L = \left(\sqrt{\mathrm{D}}\mathrm{U}\right)^{\mathrm{T}}$.

$$Y = \left(\sqrt{\mathrm{D}}\mathrm{U}\right)^{\mathrm{T}} * \mathrm{Z}.$$

Súčin generuje vektor náhodných premenných $Y = (Y_1 Y_2 \dots Y_n)^T$ z rozdelenia $Y_i \sim N(0, \sum)$.

Dôkaz:

Vetu 3.2. treba dokázať, lebo tvrdenie nie je samozrejmé.

Nech Z je vektor náhodných veličín $Z = (Z_1, Z_2 \dots Z_n)$, kde $Z_i \sim N(0,1)$ pre každé $i = 1 \dots n$. Keďže každé Z_i a Z_j sú nezávislé, tak platí: $E(Z_i Z_j) = 0$ pre každé $i \neq j$. Z čoho vyplíva:

$$E(ZZ^T) = I.$$

Nech $LL^T = \sum$, je choleskyho dekompozícia kovariančnej matici, kde L je dolná trojuholníková matica v tvare $L = \left(\sqrt{D}U\right)^T$. Nech Y je vyššie zadefinovaný vektor náhodných premenných $Y = \left(\sqrt{\mathrm{D}}\mathrm{U}\right)^{\mathrm{T}} * \mathrm{Z}$. Potom:

$$E(YY^T) = E\left((LZ)(LZ)^T\right) = E(LZZ^TL^T) = LE(ZZ^T)L^T = LIL^T = LL^T = \sum.$$

Potom vektor náhodných premenných má vyššie definované rozdelenie.

3.6 Všeobecný stochastický proces

Všetky zatiaľ definované modely sa opierali o predpoklad, že vstupné dáta pochádzajú z normálneho rozdelenia. Tento predpoklad však vo väčšine prípadov neplatí. Je rozumné vytvoriť všeobecný model, ktorý používa aj iné rozdelenia. Nový model zostrojíme podľa Brownovho modelu, len nezadefinujeme predpoklad normality dát. Model vychádza z vypočítaných hodnôt štatistických premenných a bude obsahovať náhodnú premennú generovanú z vyššie zadefinovaných rozdelení.

Definícia 3.7. *Pohyb X je nazývaný ako všeobecný stochastický model, keď sa dá vyjadriť v tvare:*

$$X(t) = \mu t + \sigma Y(t),$$

kde μ je stredná hodnota historických výnosov, σ je smerodajná odchýlka výnosov a Y je náhodná premenná generovaná z hustoty rozdelenia.

Všeobecný model po simulácii nám umožní porovnať výsledky získané s použitím viacerých štatistických rozdelení.

3.7 Monte Carlo metóda

Metóda je nazvaná podľa mesta Monte Carlo v Monaku, známeho svojimi kasínami a najmä ruletou, čo je hra založená na generovaní náhodných čísiel. Prvý krát sa objavila v Los Alamos, keď vedci pracovali na prvej atómovej bombe a mali riešiť správanie sa neutrónu. John vohn Neumann a Stanislaw Ulmann sa zaoberali s touto problematikou a práve pomocou Monte Carlo metódy sa im podarilo simulovať správanie sa neutrónu na počítači. Metóda prvý krát bola publikovaná v roku 1949, odvtedy sa rýchlo rozvíjala a v súčasnosti sa bežne používa na simuláciu rôznych systémov. Metóda je popísaná vo viacerých publikáciach, my v tejto podkapitole vychádzame najmä z [4],[11] a [12].

Metóda Monte Carlo je trieda algoritmov pre simuláciu systémov. Ide o stochastickú metódu používajúcu náhodné alebo pseudonáhodné čísla. Typicky sú využívané pre výpočet integrálov, najmä viacrozmerných, kde bežné metódy nie sú efektívne. Metóda Monte Carlo má široké využitie od simulácie experimentov, cez počítanie určitých integrálov, až po riešenie diferenciálnych rovníc.

Rozlišujeme 2 druhy Monte Carlo metódy:

1. Analógový model – Pri tejto metóde musíme vedieť modelovať celú situáciu na počítači, to znamená , že by sme mali poznať všetky pravdepodobnostné rozloženia skúmaných javov a fyzikálne zákonitosti, ktorými sa riadia.

2. Neanalógový model – Jedná sa o situáciu, keď pri výpočte nepoužívame model reálnej udalosti. Napríklad výpočet určitého integrálu, prípadne výpočet obsahu ohraničeného útvaru.

Pri modelovaní výnosu vieme modelovať celú situáciu na počítači a poznáme všetky (alebo aspoň predpokladáme) všetky pravdepodobnostné rozloženia skúmaných javov teda práca používa len analógový model.

Vo svojej podstate sú Monte Carlo simulácie založené na veľmi jednoduchom princípe. Zostrojíme model, ktorým vieme čo najlepšie popísať skúmaný objekt a ktorého správanie sa je stochastické. Vygenerujeme veľké množstvo náhodných čísel, po ich úpravách tie čísla budú vstupom modelu. Na konci zozbierame výstupy z modelu a štatisticky ich vyhodnotíme. Jednoduchá schéma Monte Carlo metódy vyzerá:

1. Vytvorenie konkrétneho parametrického modelu

2. Vygenerovanie náhodných čísel a ich dosadenie do modelu

3. Výstup modelu

4. Opakovanie krokov 2. a 3.

5. Analýza numerických výsledkov

Aby sme si mohli lepšie predstaviť ako bude vyzerať simulácia v našom prípade, ukážeme na príklade GBM. V prvom kroku vytvoríme model geometrického Brownovho modelu. Do modelu dosadíme smerodajnú odchýlku a strednú hodnotu, ktoré sme získali z historických dát. V druhom kroku vygenerujeme náhodné čísla zo štandartného normálneho rozdelenia a dosadíme ich do modelu. Výstupy budú pravdepodobné ceny akcie po čase T. Potom opakujeme simuláciu mnohokrát a z takýchto vytvorených cien zostrojíme štatistické odhady, ako napríklad medián, priemer, odchýlku a podobné. V priebehu práce tieto kroky ešte podrobnejšie rozoberieme.

3.6.1 Meranie presnosti modelu

Dôležitou súčasťou metódy Monte Carlo je vypočítanie presnosti nášho odhadu. Našu hľadanú neznámu X sme odhadli pomocou realizácii náhodnej veličiny $\bar{X}$, pričom platí medzi nimi približná rovnosť:$X \cong \bar{X}$.

Absolútna chyba merania je algebraický rozdiel medzi výsledkom merania $\bar{X}$ a skutočnou hodnotou meranej veličiny X.

$$\Delta X = |X - \bar{X}|.$$

Relatívna chyba je podiel absolútnej chyby merania a skutočnej hodnoty meranej veličiny. Výsledkom podielu je jedna hodnota, ktorá často sa udáva v percentách.

$$\delta_X = \frac{\Delta X}{X} = \frac{|X - \bar{X}|}{X}.$$

Súčet štvorcov chýb udáva celkovú veľkosť chýb počas celého procesu simulovania. Je zadefinované z vzťahom:

$$\rho_X = \sum_{1}^{n} (X - \bar{X})^2.$$

3.7 Vytvorenie portfólia

V predošlých kapitolách sme sa zaoberali tým, ako predpovedať budúce ceny aktív z historických dát a ako generovať očakávané výnosy. Pri investovaní je dôležité správne vytvorenie portfólia. Najlepšie existujúce portfólio má najmenšie riziko, pri najväčšom výnosu. Pre investora je dôležité poznať stredný výnos a riziko portfólia aktív.

Výpočet strednej hodnoty výnosu portfólia je :

$$E(r) = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i,$$

$E(r)$ je stredná hodnota výnosu portfólia,

r_i je výnos aktíva i, $i = 1,2,\ldots,n$.

Riziko portfólia určuje smerodajná odchýlka zadefinovaná v prvej kapitole. Hodnota smerodajnej odchýlky predstavuje priemernú hodnotu vychýlení výnosu od jeho strednej hodnoty.

Existuje viac možností vytvorenia optimálnych portfólií, práca sa zaoberá s Markowitzovým modelom.

3.7.1 Markowitzovo portfólio

Markowitzovho portfólio je odvodené napr. v [6] a [7].

Ako sme už povedali existuje viac možností na vytvorenia portfólia, ale investor vždy musí vybrať či chce maximalizovať výnos, alebo minimalizovať riziko. Bakalárska práca sa zaoberá s Markowitzovým portfóliom, kde je zafixovaný želaný výnos a pri tomto výnose sa minimalizuje riziko.

Tento model matematicky sa dá napísať v tvare:

$$min \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \, v_i = v_p$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

kde r_i sú náhodné premenné predstavujúce výnosy jednotlivých aktív, v_i ich stredné hodnoty. Kovariancia $\sigma_{ij} = cov(r_i r_j)$ a w_i sú váhy jednotlivých aktív v portfóliu. Aby mal Markowitzov model práve jedno riešenie, musí splniť dva predpoklady:

1. Výnosy r_i sú lineárne nezávislé.

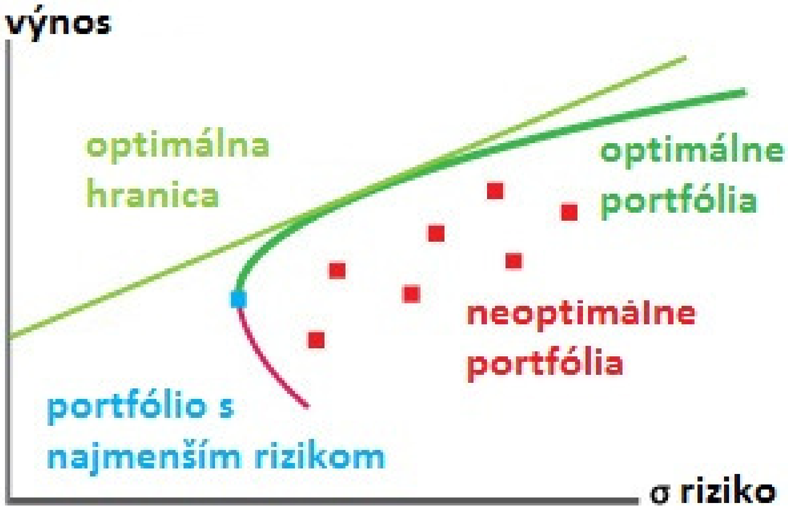
Ak:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i r_i = const,$$

potom $w_i = 0$ pre $\forall i = 1,2,\dots,n$. Tento predpoklad nie je obmedzujúci, pretože ak výnos niektorej akcie v portfóliu je lineárnou kombináciou výnosov iných akcií v portfóliu, možno túto akciu z portfólia vyradiť, pretože sa dá nahradiť inými akciami. Z toho potom vyplýva, že kovariančná matica $\sum$ je regulárna a pozitívne definitná.

2. Existujú dve aktíva $1 \leq i,j \leq n$, pre ktoré $v_i \neq v_j$.

Ak by mali všetky aktíva v portfóliu rovnaké očakávané výnosy v, potom by aj portfólio muselo mať očakávaný výnos v a Markowitzova úloha pre $v_p \neq v$ nemala riešenie.



OBR. 7 Všetky možné portfólia

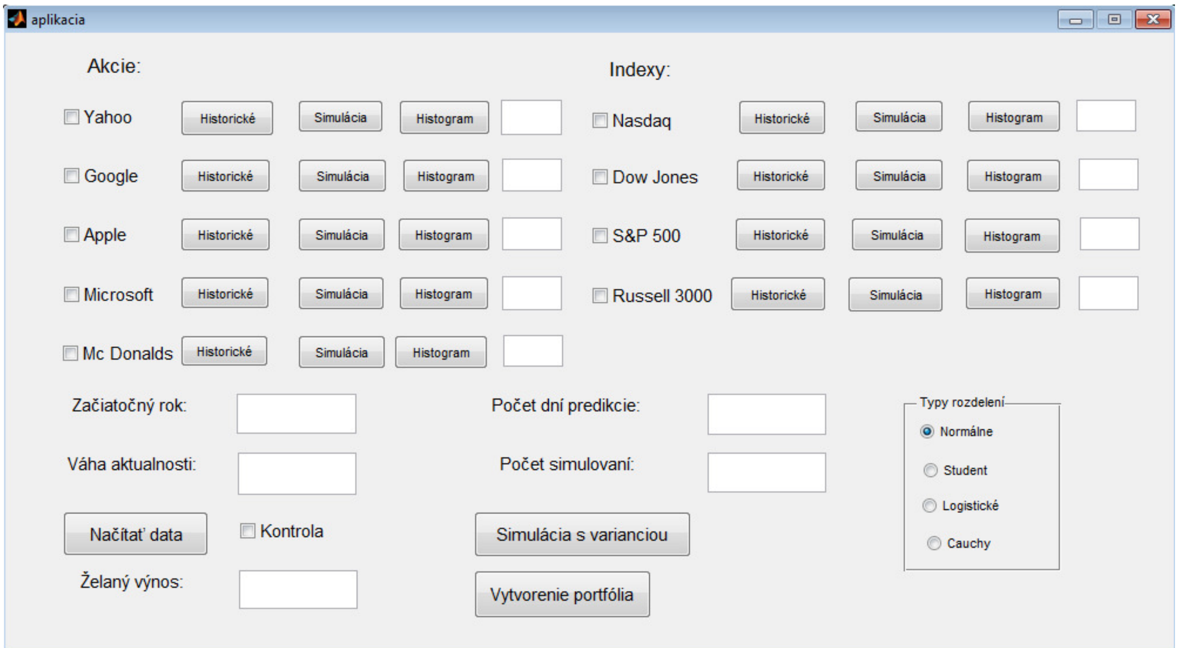
Na obrázku 7 vidíme očakávaný výnos v závislosti od očakávaného rizika. Portfólia, ktoré sú optimálne sa nachádzajú na optimálnej hranici. Portfólia pod hranicou nie sú efektívne, lebo pri výnose, ktoré nadobúdajú sa dá nájsť iné portfólio s takým istým výnosom, ale s menším rizikom. Vo vnútri paraboly sa nachádzajú všetky existujúce portfólia, ako aj samostatné aktíva. Nad optimálnou hranicou sa už nenachádzajú žiadne portfólia, lebo v tom prípade tie by mali byť ešte lepšie ako optimálne. Také portfólia sa nedajú poskladať

4 Praktická časť

Cieľom tejto bakalárskej práce bolo vytvorenie aplikácie, ktorá na základe teoretickej analýzy stochastických procesov a štatistických rozdelení uskutočnenej v predchádzajúcich kapitolách umožní simulovať vývoj cien akcií a indexov. Táto kapitola obsahuje popis tvorby a spôsob používania aplikácie. Samotný softvér bol vytvorený v prostredí Matlab GUI. Aplikácia dokáže simulovať vývoj cien akcií, dokáže vyhodnotiť vypočítané výsledky a graficky ich prehľadne znázorniť. Dôležitou podmienkou pri tvorbe aplikácie bola aj jednoduchosť a nenáročnosť jej používania. V tejto časti bakalárskej práce nasleduje popis a názorná ukážka fungovania aplikácie.

4.1 Základná schéma fungovania aplikácie

Užívateľské rozhranie aplikácie – úvodná obrazovka:



OBR. 8 Úvodná obrazovka aplikácie

Popis používania aplikácie:

1. Používateľ vyznačí všetky akcie resp. indexy, vývoj ktorých chce simulovať resp. pre ktoré chce generovať očakávané hodnoty.
2. Nastaví rok začatia načítania historických údajov. Aplikácia, aby bola vždy aktuálna, vždy pracuje s najnovšími údajmi, tj. od zadaného počiatočného roku, až do dňa používania.
3. Zadá váhu aktuálnosti - význam popísaný v ďalšej podkapitole.
4. Program načíta údaje a vypíše všetky štatistické premenné o vstupných údajoch.

5. Vývoj cien načítaných aktív môže graficky znázorniť tlačením tlačidla „Historické“.
6. Nastaví počet dní, na ktoré chce vykonať simuláciu a zadá počet simulácií, koľko očakávaných hodnôt má program vygenerovať na každý deň. Čím viac simulácií, tým presnejšie popisujú generované výnosy rozdelenie, z ktorého sú generované. Odporúčaný počet je 10 000 simulácií.
7. Používateľ si môže vybrať z viacerých rozdelení, ktoré bude používať v procese simulovania. Je možné zadať len jedno rozdelenie, kombinácia rôznych rozdelení nie je možná.
8. K jednotlivým akciám resp. indexom sú priradené tlačidlá „Simulácia“ a „Histogram“. „Simulácia“ vygeneruje očakávané výnosy a druhé tlačidlo znázorňuje výnosy na konci predikčného intervalu pomocou histogramu.
9. Aplikácia umožňuje používať na simuláciu očakávaných hodnôt aj metódu korelovaného brownovho pohybu, pri čom je potrebné nastaviť aj želaný výnos, pre vytvorenie Markowitzovho portfólia.
10. Po vykonaní simulácie vývoja vybratých aktív je možné vytvoriť portfólio a aplikácia vypočíta očakávaný výnos zadaného portfólia. Používateľ zadá váhy pre jednotlivé akcie a indexy, ktoré určia mieru zastúpenie daného aktíva v portfóliu.

Základná schéma fungovania aplikácie – rozpísaná podrobnejšie v ďalšom:

1. Získanie a úprava dát.
2. Vypočítanie štatistických premenných.
3. Zostrojenie modelov.
4. Opakovanie simulácií podľa zadanej hodnoty.
5. Vyhodnotenie získaných numerických výsledkov.

4.2 Získanie a úprava dát

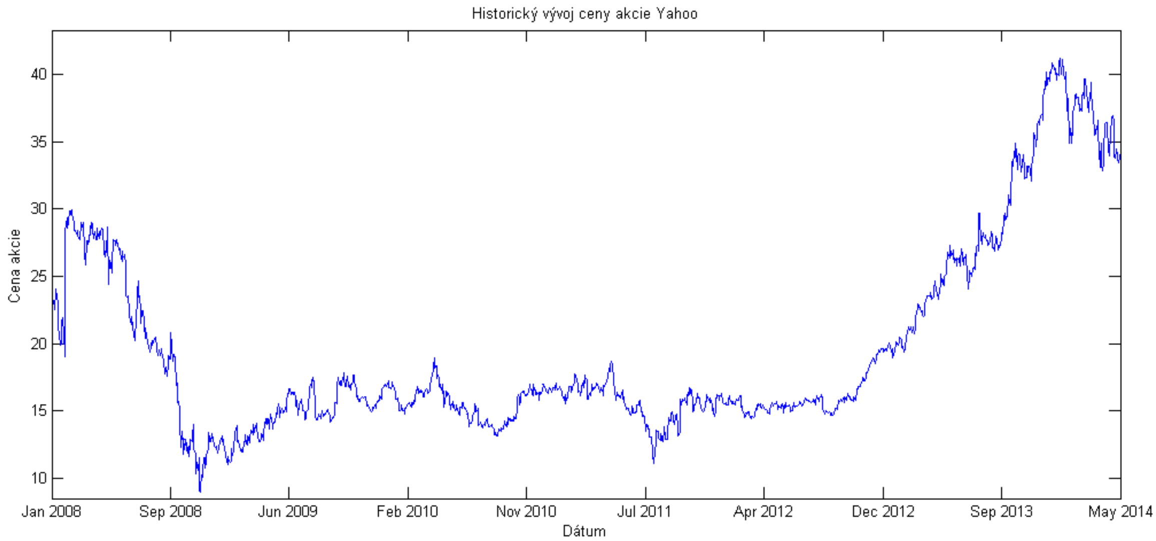
Aplikácia generuje budúci výnos akcií, takže všetky štatistické premenné treba vypočítať pre výnosy, nie pre ceny akcií.

Vstupom aplikácie sú historické ceny tých akcií a indexov, ktoré používateľ pred začatím načítania nastavil. Cieľom aplikácie je generovanie denných výnosov, t.j. treba získať vstupné údaje na každý obchodovaný deň na burze. Vstupné údaje aplikácia číta z web stránky yahoo finance [3].

Aby bola aplikácia vždy aktuálna, spracováva „najnovšie“ dáta, t.j. od zadaného dátumu (ktoré nastaví používateľ), až do aktuálneho dňa. V programe na zabezpečenie aktuálnosti sa používa samostatná funkcia: aktual.m. Funkcia je napísaná v prostredí matlab, ale využíva aj programovací jazyk Java, ktorý umožní stiahnuť všetky údaje z vyššie uvedenej webovej stránky stlačením jedného tlačidla.

Webstránka obsahuje na každý obchodovaný deň 7 rôznych údajov o akciách a indexoch. Z tých 7 údajov program na simulovanie potrebuje: dátum, a „close price“. Keďže štatistické premenné, ktoré používame počas simulácie sú vypočítané z „close price“ akcií a indexov, potom aj generované hodnoty predstavujú výnosy na konci dňa.

Načítané ceny, sa dajú znázorniť pomocou grafu od zadaného začiatočného dátumu až do dňa používania. Napríklad pre Yahoo od roku 2008 graf vyzerá nasledovne:



OBR. 9 Vývoj ceny akcie firmy Yahoo

3.2.1 Úprava vstupných dát

Systém poskytuje možnosť zadať váhy aktuálnosti. V podstate to znamená, že existuje možnosť určiť, aby čerstvejšie hodnoty mali väčší vplyv na očakávaný výnos ako dávnejšie hodnoty. Tj. Aby výnosy z roku 2008 mali menší vplyv na určenie očakávaného výsledku ako výnosy z roku 2013. Používateľ má možnosť zadať váhu aktuálnosti pomocou reálneho čísla z interval $[0,1)$, ktoré určí či je hodnotnejší posledný, najčerstvejší výnos ako ten najstarší. V simulovaní a modelovaní najčastejšie sa používajú exponenciálne váhy, ktoré sú odvodené v [13]. Exponenciálne váhy sú zadefinované v tvare:

$$\alpha^n * R_1 + \alpha^{n-1}(1-\alpha) * R_{n-2} \ldots + \alpha(1-\alpha) * R_{n-1} + (1-\alpha) * R_n,$$

kde „α“ je používateľom zadaná hodnota, „n“ je počet dnešných výnosov v danom období a „R_n“ je výnos n-tého dňa. Keď používateľ nastaví $\alpha = 0$, tak aplikácia nepoužíva žiadne váhy.

V ukážkových prípadoch nepoužívame váhy, to necháme na používatela.

4.3 Výpočet štatistických premenných.

Aplikácia postupne vypočíta štatistické premenné definované v prvej kapitole a uloží ich do tabuľky. V ukážkovom prípade sú štatistické premenné vypočítané od 1.1.2010 do 15.5.2014.:

	Yahoo	Google	Apple	Microsoft	Nasdaq	Dow Jones	Mc Donalds	S&P 500	Russell 3000
Yahoo	1	0.4381	0.2853	0.3763	0.5943	0.5248	0.3089	0.5595	0.5657
Google	0.4381	1	0.4137	0.4186	0.6571	0.5685	0.3472	0.6097	0.6088
Apple	0.2853	0.4137	1	0.3495	0.6173	0.4775	0.3225	0.5330	0.5308
Microsoft	0.3763	0.4186	0.3495	1	0.6745	0.6447	0.3996	0.6493	0.6445
Nasdaq	0.5943	0.6571	0.6173	0.6745	1	0.9133	0.5627	0.9589	0.9671
Dow Jones	0.5248	0.5685	0.4775	0.6447	0.9133	1	0.6234	0.9777	0.9703
Mc Donalds	0.3089	0.3472	0.3225	0.3996	0.5627	0.6234	1	0.5983	0.5936
S&P 500	0.5595	0.6097	0.5330	0.6493	0.9589	0.9777	0.5983	1	0.9978
Russell 3000	0.5657	0.6088	0.5308	0.6445	0.9671	0.9703	0.5936	0.9978	1

	Yahoo	Google	Apple	Microsoft	Nasdaq	Dow Jones	Mc Donalds	S&P 500	Russell 3000
Stredná hodnota ceny akcie	21	366	433	29	3097	13304	84	1441	857
Stredná hodnota výnosu	0.2385	0.1806	0.2619	0.1381	0.1532	0.1167	0.1428	0.1370	0.1415
Štandartna odchýlka	4.8723	4.0080	4.3822	3.6288	2.8563	2.3214	2.2549	2.5559	2.6592
Medián výnosu	0.0704	0.0718	0.2529	0	0.2295	0.1405	0.2298	0.1789	0.2241
Šikmosť výnosu	0.2444	0.7412	-0.1163	-0.2078	-0.3216	-0.3535	-0.1178	-0.3807	-0.3870
Špicatosť výnosu	6.6430	15.7894	7.6699	8.1192	6.2774	6.8461	5.6176	7.2419	7.3382

OBR. 10 Štatistické premenné

V prvej tabuľke sú znázornené korelácie medzi vybranými aktívami. Zo získaných hodnôt sa dajú vyčítať aj nasledujúce zaujímavosti:

- Akcie spoločnosti Apple sú viac prepojené s akciami firmy Mc Donalds, ako s firmou Yahoo, napriek tomu, že Yahoo je z oblasti IT podobne ako Apple.

- Ako sa dalo čakať najväčšia závislosť existuje medzi indexami (Dow Jones, Nasdaq, atď.). Je to logické, lebo tieto indexy obsahujú aj akcie tých istých dominantných spoločností, ktoré majú podstatný vplyv na vývoj jednotlivých indexov.

Druhá tabuľka obsahuje jednotlivé štatistické premenné. Premenné sú vypočítané na celý obchodovaný rok. Prvá zaujímavá premenná je stredná hodnota výnosu. Táto hodnota nám udáva výšku priemerného ročného výnosu daného aktíva.

Štandardná odchýlka výnosu udáva rizikovosť aktíva. Vidíme, že indexy sú tak zostrojené, aby mali menšie riziko ako jednotlivé akcie. S výnimkou je spoločnosť Mc Donalds, ktorej výnosy sú stabilné. Vyplýva to z charakteru spoločnosti.

Všimnime si, ži všetky akcie a indexy majú väčšiu špicatosť ako jedna, čiže sú špicatejšie ako normálne rozdelenie.

Okrem akcií Apple a Yahoo všetky ostatné aktíva majú šikmosť menšiu ako 0, teda lepšie ich opisujú pozitívne alebo pravostranne zošikmené rozdelenia, ako normálne.

Kvôli tomu rozdelenie s ťažkými chvostami lepšie opisujú vývoj výnosu akcií a indexov.

4.4 Zostrojenie modelov a simulácia.

Všetky zostrojené modely simulujeme s Monte Carlo metódou. Ako ukážkový prípad sme si zvolili najpopulárnejšie indexy a akcie z New Yorskej burzy.

V ukážkovom prípade simulujeme vývoj výnosov na 260 obchodovaných dní, čiže na celý jeden rok. Aplikácia generuje výnosy týždenne vždy od pondelka do piatku, teda na víkendy nie. Cez víkendy je New Yorkská burza zatvorená, takže ani v reálnom živote sa nemenia ceny akcií. Burza je zatvorená aj cez americké sviatky, ale to už táto aplikácia neberie do úvahy a preto generuje za rok 260 výnosov. V obchodnom živote sa ráta 252 obchodovaných dní, čiže tých 8 dní je akceptovateľný rozdiel medzi reálnym životom a aplikáciu. Najprv zostrojíme obyčajný Brownov pohyb definovaný v predchádzajúcich kapitolách nasledovne:

$$W(t) = \mu t + \sigma B(t),$$

kde μ je stredná hodnota denného výnosu a σ je smerodajná odchýlka denného výnosu. Premenná $B(t)$ je náhodne generovaná z normálneho rozdelenia s parametrami 0 a 1, teda t = 1. Keďže t = 1, tak aj generované výnosy budú denné. $W(t)$ je generovaný výnos na t-tý deň.

Teda parametre v modele budú:

$$\mu = 4{,}465 * 10^{-4}, \qquad \sigma = 9{,}479 * 10^{-3},$$

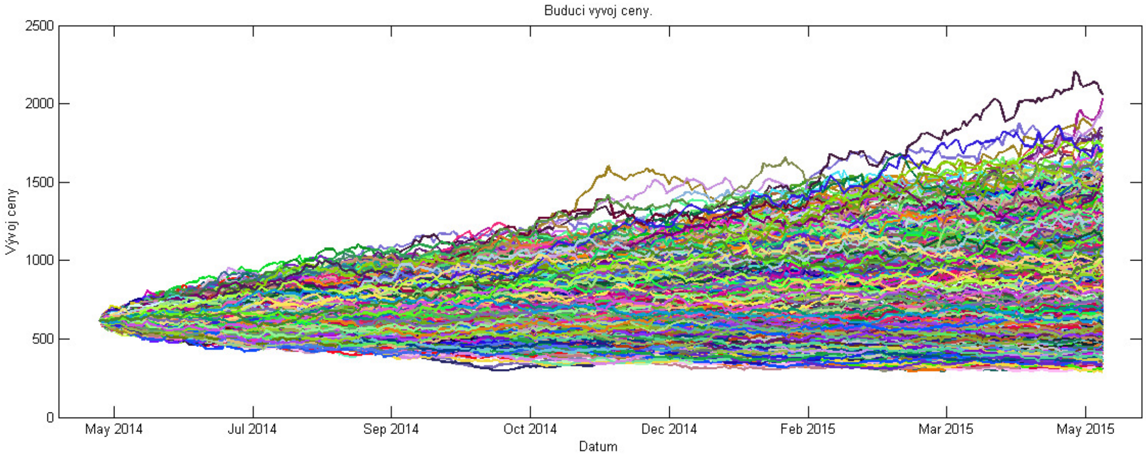
$$W(t) = 4{,}465 * 10^{-4} + 9{,}479 * 10^{-3} * v,$$

kde v je generovaná náhodná premenná z rozdelenia $N(0{,}1)$.

Cieľom aplikácie je generovať súvislý vývoj ceny akcií na zadaný počet dní, čo označme premennou „n“. Aplikácia generuje pre každý deň očakávané výnosy W(t), ktoré sú lineárne nezávislé. Tieto generované výnosy, potom dosadí do vyššie zadefinovaného vzorca, pre výpočet ceny akcie

$$S(T) = S(0)e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W(T)}.$$

Takto vygenerovaný reťazec cien je jeden možný vývoj ceny aktíva za „n“ dní. Metóda Monte Carlo spočíva v tom, že generuje ceny podľa vyššieho vzorca mnohokrát. V ukážkovom prípade vygenerujeme výnosy pre akcie firmy Apple 10 000 krát. Na obrázku vidíme 10 000 možných vývojov ceny na 1 rok (260 dní) pre akcie Apple.



OBR. 11 Možné vývoji ceny akcie Apple

4.4.1 Zostrojenie modelov pre iné rozdelenie

Zostrojenie modelu pomocou iného rozdelenia, je podobné ako model používajúci normálne rozdelenie. Najväčším problémom je odhadnúť parametre rozdelenia, ktoré najlepšie popisujú načítané dáta. Matlab umožní zistiť jednotlivé parametre s používaním funkcií „fitdist“. Odhady parametrov vykonávame na základe denných výnosov.

Parametre pre jednotlivé rozdelenia pre akcie firmy Apple od nastaveného roku 2010:

Rozdelenie	**Odhadnuté parametre**
Normálne	$\mu = 9{,}96 * 10^{-4}\,, \sigma = 1{,}733 * 10^{-2}$
Studentovo	$t = 1104$
Cauchy	$\mu = 1{,}115 * 10^{-3}\,, \sigma = 1{,}279 * 10^{-2}, \theta = 4{,}36774$
Logistické	$\mu = 1{,}091 * 10^{-3}\,, \sigma = 9.051 * 10^{-3}$

Tabuľka 1 Odhatnuté parametre pre jednotlivé rozdelenia

Matlab nám umožní generovať náhodné premenné, z vyššie uvedených rozdelení so zadanými parametrami. Aplikácia aj v tomto prípade používa Monte Carlo metódu.

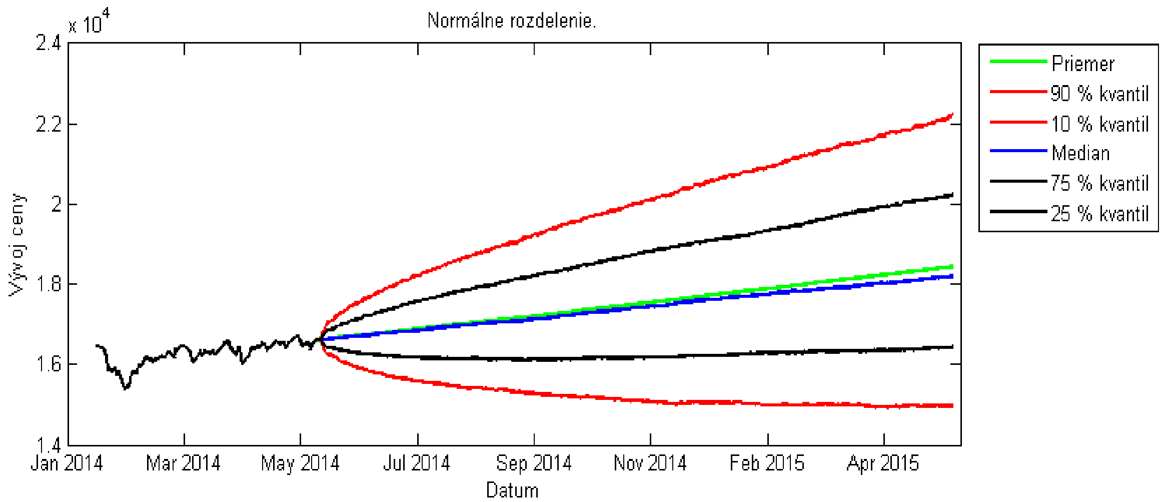
V ukážkovom prípade bolo vykonaných 10000 simulácií pre každé rozdelenie. Grafy o všetkých možných ceny nie sú priložené, veľmi sa podobajú na predchádzajúci graf.

4.5 Vyhodnotenie generovaných dát.

Ďalším krokom je vyhodnotenie generovaných dát. Na každý deň máme 10 000 vygenerovaných cien, ktoré chceme čo najpresnejšie reprezentovať s jednou hodnotou. Simulovanie generuje dáta náhodne, teda môže sa stať, že niektoré získané hodnoty sú veľmi ďaleko od strednej hodnoty, tieto nazývame outliarmi. Rozumným odhadom je buď aritmetický priemer, alebo medián. Aplikácia vypočíta obe odhady a nechá na používateľa, ktorý je pre neho najviac vhodný. Odporúčaný je mediánový odhad, lebo na tento odhad majú outliari menší vplyv.

4.5.1 Normálne rozdelenie

Aplikácia v jednom grafe znázorňuje pre každý deň, mediánovú a priemernú cenu, ako aj 4 druhy kvantilov: 90%-ný,75%-ný, 25%-ný a 10%-ný. Tieto štatistické premenné nám najlepšie popisujú očakávaný vývoj ceny aktíva. V grafy je znázornené aj reálny vývoj ceny indexy Dow Jones do dňa simulácie, čo je pokračované s prognózou vývoju ceny.



OBR. 12 Simulácia s normálnym rozdelením

Výstupom aplikácie sú aj číselné hodnoty jednotlivých štatistických premenných, ale len na posledný deň simulovania. Viac hodnôt číselných premenných nepotrebujeme, lebo môžeme nastaviť ľubovoľný počet dní simulácií.

	Dow Jones
90% kvantil	20736
75% kvantil	19197
Priemer	17804
Medián	17692
25% kvantil	16260
10% kvantil	15057
Výnos za periódu	0,0654

Tabuľka 2 Simulácia s normálnym rozdelením

X%-ný kvantil je hodnota, od ktorej X% simulovaných cien dosiahlo väčšiu cenu než hodnota X.

90%-ný a 10%-ný kvnatily nám neposkytujú dôležitú informáciu, slúžia len na znázornenie veľkosti intervalu, z ktorého náš model generuje očakávané ceny. Vidíme, že medzi 10000-mi možnými „cestami" bolo 10% takých, ktoré dosiahli vyššiu cenu ako 20736 za jeden obchodovaný rok.

75%-ný a 25%-ný kvantily nám udávajú už dôležitejšiu informáciu. Informujú používateľa o tom, že má na to 50%-nú šancu, že ceny na konci periódy budú medzi hodnotami 19197 a 16260. (V našom prípade sme zaviedli 25%-ný a 75%-ný kvantil)

Medián a priemer ceny indexy na konci periódy sú najdôležitejšie premenné v simulovaní. Tieto hodnoty nám najlepšie reprezentujú očakávané ceny s jedným číslom. Pri 10000 simulovaní, tieto hodnoty sú veľmi blízko, lebo sme si generovali z normálneho rozdelenia.

Výnos za periódu nám udáva výnos indexu na konci periódy. V našom prípade index Dow Jones produkoval 6.54% výnos za jeden rok.

4.5.2 Logistické, Studentovo a Cauchyho rozdelenie

V prípade voľby iného rozdelenia aplikácia poskytuje rovnaké výstupy ako v prípade normálneho rozdelenia. Realizované sú logistické rozdelenie, Studentovo a Cauchyho rozdelenie. Výsledné grafy jednotlivých rozdelení na umožnenie porovnania dosiahnutých výsledkov pomocou rôznych rozdelení.

Nasledujúca podkapitola sa zaoberá vyhodnotením simulácií používajúcich rôzne rozdelenia.

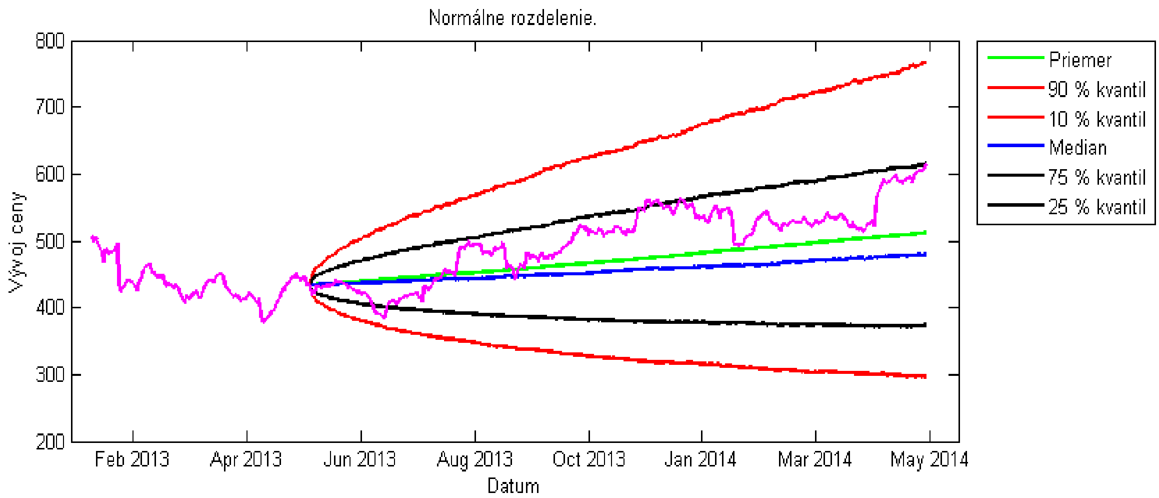
4.5.3 Kontrola a chyba simulovania.

Aplikácia ponúka používateľovi možnosť kontroly. Kontrola v podstate znamená vygenerovanie simulovaných hodnôt pre minulé obdobie, v ktorom už skutočné hodnoty poznáme. Program to realizuje rozdelením získaných historických údajov. Prvú časť načítaných údajov používa ako vstupné údaje a údaje posledného načítaného roka nechá na kontrolu. Očakávané ceny program generuje na jeden rok, tieto vygenerované ceny potom porovná s reálnymi cenami pre toto obdobie. Presnosť generovania vyjadrí aj číselne, podľa vyššie zadefinovaných vzorcov. Vypočítame priemernú chybu, chybu na konci periódy a súčet štvo rcov chýb. Pod chybou chápeme číslo:

$$|X - \bar{X}|.$$

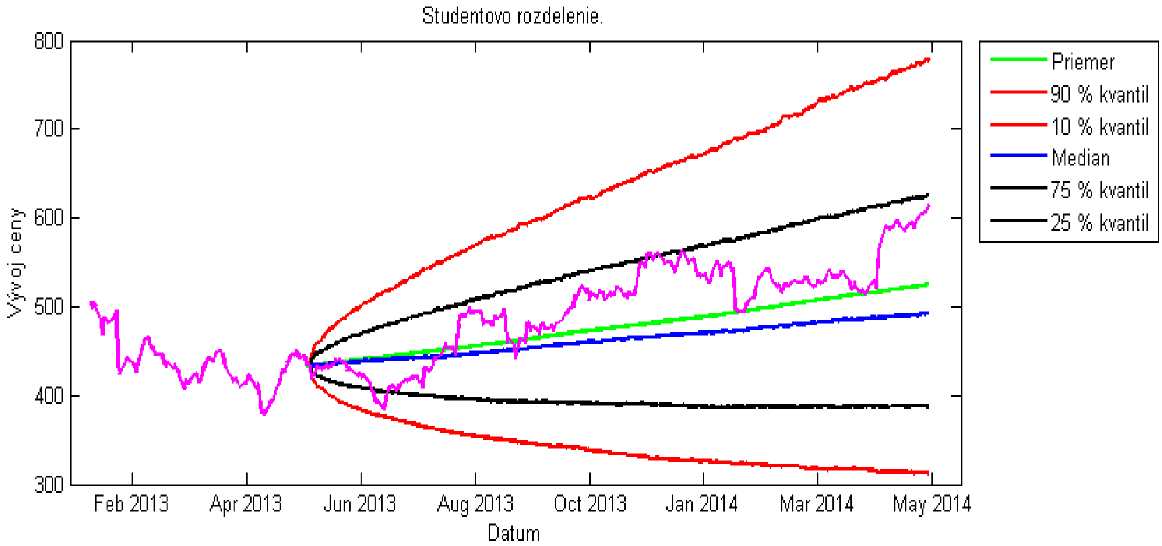
Rozdiel medzi reálnymi a generovanými cenami na posledný rok vykreslíme aj pomocou grafu. V práci ukážeme prípad pre akcie firmy Apple, od roku 2008. Práca pre akciu firmy Apple spraví simuláciu so všetkými rozdeleniami a výsledné grafy aj znázorní.

Normálne rozdelenie:



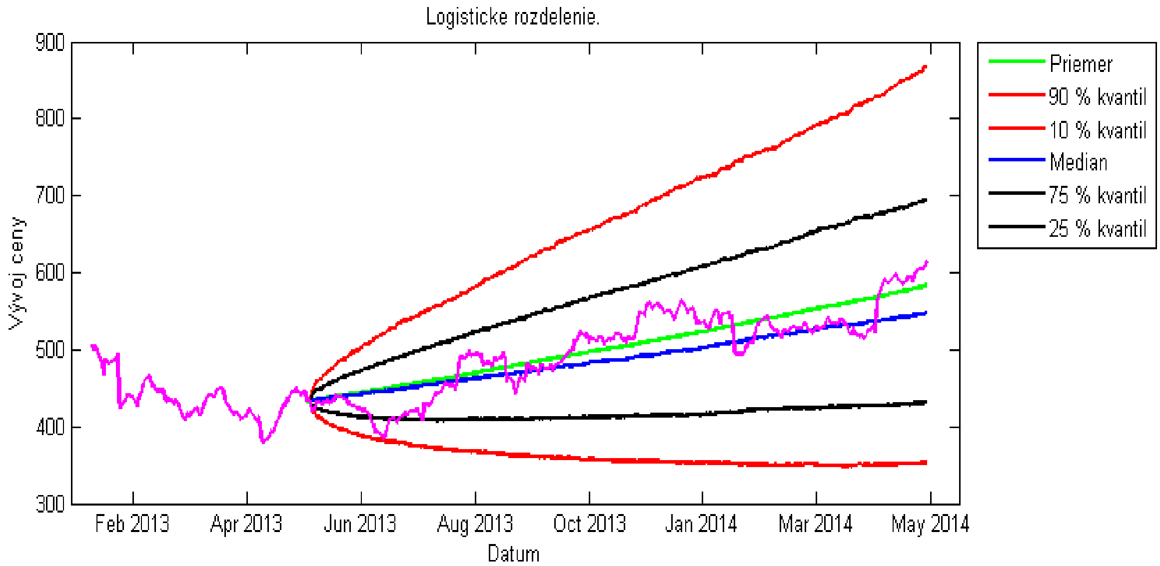
OBR. 13 Kontrola simulácie s normálnym rozdelením

Studentovo rozdelenie:



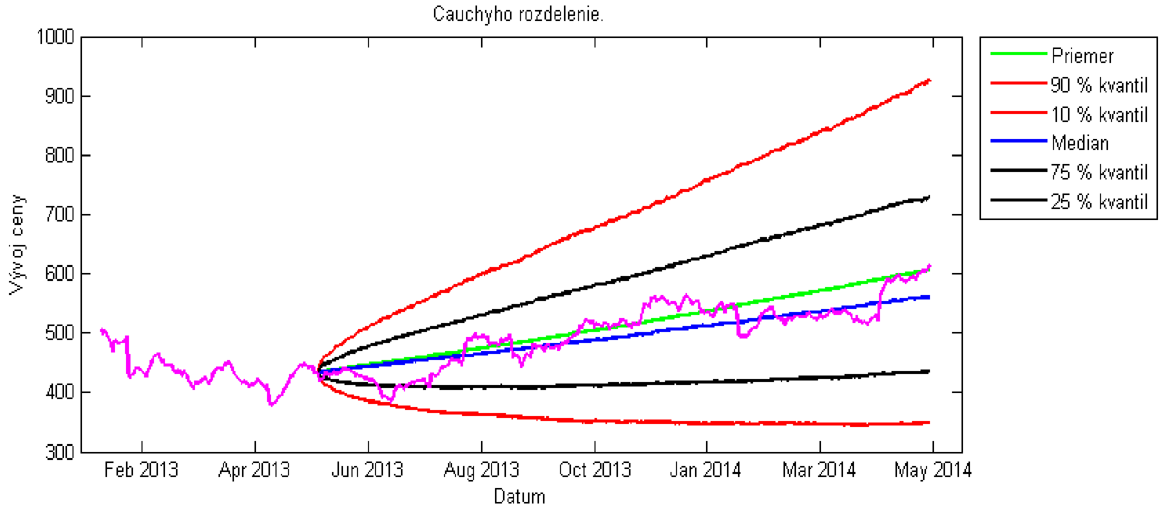
OBR. 14 Kontrola simulácie so studentovom rozdelením

Logistické rozdelenie:



OBR. 15 Kontrola simulácie s lognormálnym rozdelením

Cauchyho rozdelenie:



OBR. 16 Kontrola simulácie s cauchyho rozdelením

S farbou magenta je vyznačený reálny vývoj ceny akcie, modrá a zelená je s aplikáciou generovaný odhad. Pomocou aplikácie som vypočítal chyby pre všetky rozdelenia:

Rozdelenie	Suma štvorcov chýb	Priemerná chyba	Chyba na konci
Normálne	$9{,}9081 * 10^5$	39,3508	21,90%
Studentovo	$7{,}6328 * 10^5$	34,3342	19,87%
Logistické	$2{,}2186 * 10^5$	18,6156	10,80%
Cauchyho	$1{,}9504 * 10^5$	16,8869	8,71%

Tabuľka 3 Presnosť použitých rozdelení

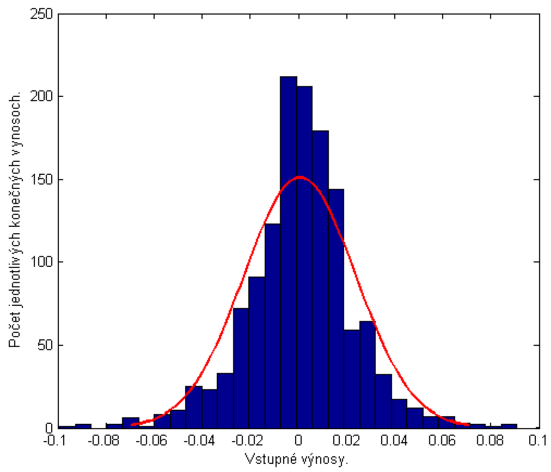
Podľa vypočítaných chýb vývoj ceny akcie firmy Apple najlepšie popisujú Logistické a Cauchyho rozdelenia. Cauchyho rozdelenie vyzerá byť presným odhadom pre akcie, lebo na konci ročného generovania relatívna chyba medzi generovanou a reálnou cenou bola len 8,71%.

Vo všeobecnosti sa nedá povedať, že logistické rozdelenie popisuje najlepšie výnosy akcií a indexov, napríklad pre akcie Yahoo na konci roka má relatívnu chybu okolo 30%. Pre každé aktívum je iné rozdelenie najlepšie, ale vo väčšine prípadov je to Cauchyho, Studentovo alebo Logistické rozdelenia.

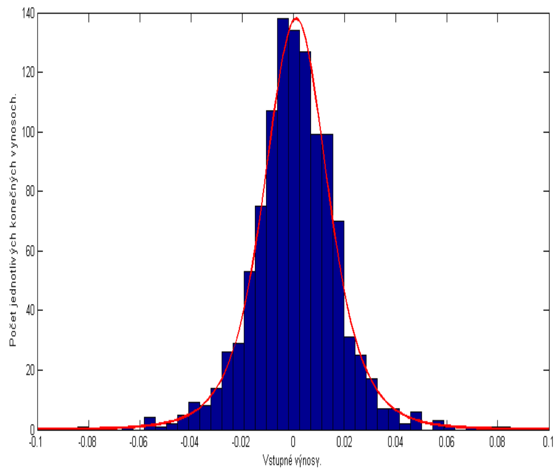
4.6 Testovanie vstupných podmienok

Na začiatku generovania sme predpokladali, že výnosy majú charakter normálneho, alebo iného používaného rozdelenia. Aplikácia vie testovať pravdivosť tejto podmienky. Ak tento predpoklad bol pravdivý, tak vstupné historické výnosy by mali mať charakter normálneho rozdelenia. Nakreslením historických výnosov do histogramu znázorníme hustotu rozdelenia generovaných dát. Testovať budeme vstupné dáta pre akcie firmy Apple, lebo vyššie sme si generovali očakávané ceny pre tú firmu.

Histogram vstupných výnosov s dokreslenou hustotou normálneho rozdelenia s odhadnutými parametrami pre historické dáta:



OBR. 18 Histogram s hustotou normálneho rozdelenia

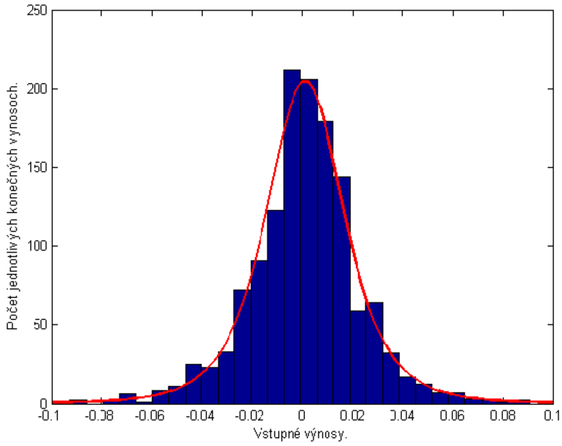


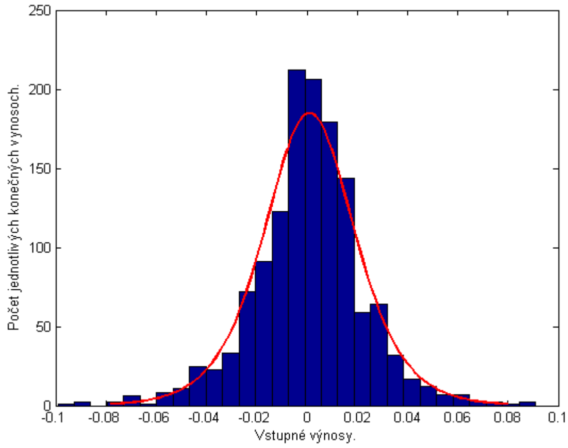
OBR. 19 Histogram s hustotou Cauchyho rozdelenia

Na prvý pohľad vidíme, že zvolený predpoklad normality nebol zlý, hustota normálneho rozdelenia celkom dobre kopíruje generované výnosy. Na zistenie, či dáta majú charakter normálneho rozdelenia aplikácia používa aj Kolmogorov-Smirnov test. Aplikácia odmietla hypotézu H_0, že generované výnosy pochádzajú z normálneho rozdelenia. Generované výnosy na hladine významnosti 95% nepochádzajú z normálneho rozdelenia.

Aplikácia do histogramu nakreslí hustoty používaných rozdelení na znázornenie dodržiavania predpokladu vstupných dát. Kolmogorov-Smirnov test nie je zadefinované na iné rozdelenie ako normálne, teda číselné testovanie aplikácia pre iné rozdelenia nevykoná.

OBR. 20 Histogram s hustotou Studentovo rozdelenia





OBR. 21 Histogram s hustotou Logistického rozdelenia

Z obrázkoch 19 a 20 vidno, že najlepšie Cauchyho a Studentovo rozdelenie spĺňajú predpoklad na vstupných dát. Aplikácia nevie testovať hypotézu, či predpoklad je pravdivý.

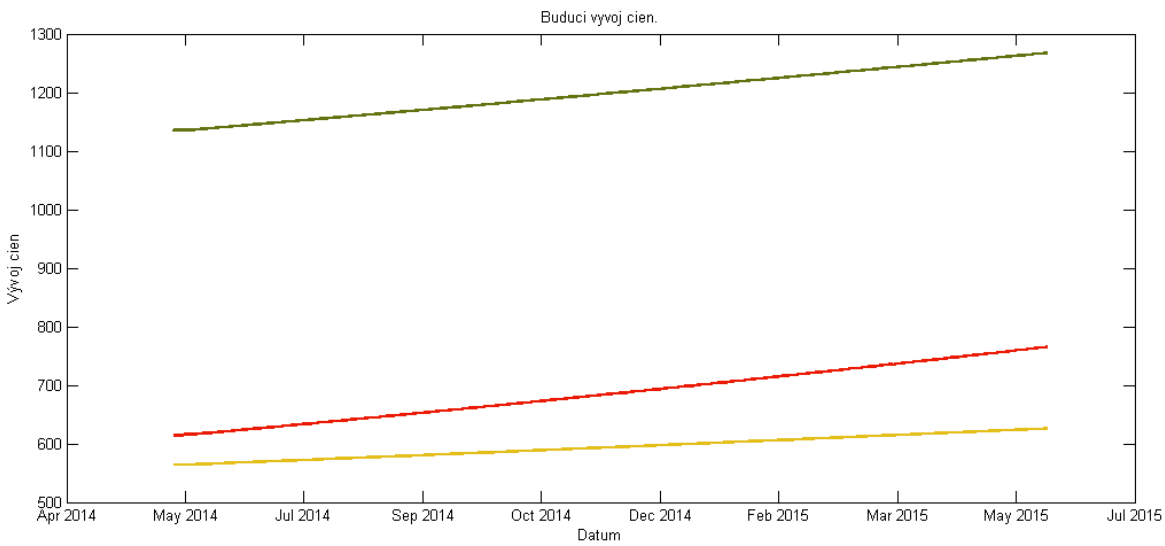
4.7 Korelovaný Brownov pohyb

Videli sme, že korelácie medzi jednotlivými akciami a indexmi nie sú nulové, vyskytujú sa aj hodnoty väčšie ako 0,9. Preto sa nedá predpokladať, že aktíva sú nezávislé. Simulácia vývoja ceny aktív bude preto presnejšia, keď do modelu zabudujeme aj kovarianciu medzi aktívami. Model sme už zadefinovali vyššie. Očakávané ceny generujeme tak isto ako pri Geometrickom Brownovom pohybe, pomocou normálneho rozdelenia. Počas simulácií generované vektory z normálneho rozdelenia vynásobíme zľava s dolnou trojuholníkovou maticou, získanou pomocou choleskyho dekompozície kovariančnej matici. Dokončíme celú simuláciu pre všetky aktíva samostatne a nájdeme mediánový odhad pre ceny. Tieto mediány uložíme do matice a vypočítame výnosy aktív.

Aplikácia vykreslí len mediány z generovaných cien pre všetky akcie a indexy.

Na obrázku sú naznačené vývoje strednej hodnoty cien nalsedovných troch aktív:

1. Zelený je vývoj ceny indexu Russell 3000.
2. Červený je vývoj ceny akcie firmy Apple.
3. Červený je vývoj ceny akcie firmy Google.



OBR. 22 Simulácia s Korelovaným Brownovým pohybom

Po uskutočnení simulácie výstupom aplikácie je aj očakávaný výnos, pre každé simulované aktívum. Tieto očakávané výnosy používame v ďalšom pri vytvorení markowitzovho portfólia.

Názov akcie alebo indexu	**Výnos na konci periódy**
Google	0,0643
Apple	0,2177
Russell 3000	0,1228

Tabuľka 5 Výnosy simulovaných aktív

4.8 Vytvorenia portfólia

Po uskutočnení simulácie aplikácia umožní používateľovi vytvoriť portfólio. Pre vytvorenia portfólia program potrebuje používateľom zadané váhy. Tieto váhy určia aplikácii percentuálnu výšku investovania do predmetného aktíva. Suma váh musí byť 100. Po uskutočnení simulácie želaných aktív aplikácia z vygenerovaných očakávaných výnosov a z rizika nám vypočíta výnos a riziko celého portfólia. To portfólio iste nie je optimálne, lebo váhy boli zadefinované dopredu.

V ukážkovom prípade vytvoríme portfólio z troch aktív. Investujeme 25% do akcií firmy Apple, 35% do akcií firmy Mc Donalds a 40% do indexu Russell 3000. Uskutočníme simuláciu samostatne pre všetky tri aktíva s použitím Cauchyho rozdelenia, ktoré dalo najlepšie výsledky pre akcie Apple. Investovať chceme na jeden rok. Výstup aplikácie je celkový očakávaný výnos a riziko:

Riziko portfólia	0,9320
Výnos portfólia	22,7321

Tabuľka 6 Výnos a riziko neoptimálného portfólia

Vidíme, že výnos celého portfólia je 22,7321% p.a. Štandartná odchýlka, čiže rizikoje 0,9320.

4.8.1 Markowitzovo portfólio

Ďalšou nemenej významnou funkciou aplikácie je možnosť vytvorenia Markovitzovho portfólia pri použití normálneho rozdelenia na simuláciu očakávaných hodnôt. Markovitzovo portfólio je popísané v kapitole 3 odsek 7 teoretickej časti práce. Aplikácia pomocou funkcie „quadprog“, ktorá používa metódy lineárneho, resp. nelineárneho programovania v prostredí Matlab vypočíta optimálne váhy aktív pre daný očakávaný výnos.

Pre vyššie realizovanú simuláciu a geometrickým Brownovho pohybom vypočítame váhy Markowitzovho portfólia, s želaným výnosom 10%.

Názov akcie, alebo indexu	**Váha aktíva v optimálnom portfóliu**
Google	45,68%
Apple	5,07%
Russell 3000	49,26%

Tabuľka 7 Výnos a riziko Markowitzovho portfólia

Záver

V tejto bakalárskej práci sme vytvorili aplikáciu na pomoc prognózovania vývoja výnosov akcií a indexov pomocou štatistických rozdelení.

V prvej časti bakalárskej práce sme zadefinovali základné pojmy z oblasti štatistiky a pravdepodobnosti. Následne sme zadefinovali všetky štatistické rozdelenia používané v ďalších simuláciách.

V ďalšej kapitole sme popísali rôzne stochastické procesy, ktoré sú použité v Monte Carlo simuláciach. Táto kapitola obsahuje aj prispôsobenie predmetných stochastických procesov na umožnenie ich použitia na simuláciu vývoja cien aktív. Popísali sme aj spôsoby využitia vygenerovaných výnosov v procese vytvorenia portfólia.

V poslednej kapitole sme popísali fungovania vytvorenej aplikácie a priložili sme niektoré charakteristické výstupy softvéru. Pomocou týchto výstupov sme analyzovali reálny prípad, pre viaceré aktíva. Aplikácia umožňuje porovnanie úspešnosti jednotlivých štatistických rozdelení. Ukázalo sa, že vývoj cien najlepšie kopíroval model používajúci cauchyho rozdelenie.

Prínosom práce je vytvorenie v praxi použiteľnej aplikácie na určenie očakávaných cien a výnosov aktív na rôzne časové intervaly. Pomocou aplikácie sa dajú vytvoriť prognózne portfólia opierajúce sa o vygenerované očakávané hodnoty.

Autor sa oboznámil s problematikou spracovania dát, rozšíril poznatky o jednotlivých štatistických rozdeleniach a o vytvorení portfólia. Oboznámil sa s konkrétnymi stochastickými procesmi a s metódou Monte Carlo na simuláciu procesov.

Zoznam použitej literatúry

[1] Blahovský, L.: *Geometrický Wienerův proces,* bakalárska práca, Prírodovedecká Fakulta, Masaryková Univerzita, Brno, 2012, dostupné na internete (10.30.2012): http://is.muni.cz/th/357666/prif_b/Geometricky_Wieneruv_proces.pdf

[2] Haugh, M.: *The Monte Carlo Framework, Examples from Finance and Generating Correlated Random Variables*, USA, 2004

[3] Historical Stock prices, dostupné na internete (3.12.2013): http://finance.yahoo.com/q/hp?s=YHOO+Historical+Prices

[4] Jaeckel, P.: *Monte Carlo Methods in Finance,* Wiley; 1St Edition edition, USA, 2002

[5] Janková, K., Pázman, A.: *Pravdepodobnosť a Štatistika*, Vydavateľstvo UK, Bratislava, 2011

[6] Marling, H., Emanuelsson, S.: The Markowitz portfolio theory, dostupné na internete (25.11.2012): http://www.math.chalmers.se/~rootzen/finrisk/gr1_HannesMarling_SaraEmanuelsson_MPT.pdf

[7] Melicherčík, I., Olšarová, L., Úradníček, V., *Kapitoly z finančnej matematiky* Vydavateľstvo EPOS, Bratislava, 2005

[8] Nagy, T., Klafszky, E.: *Operációkutatás, Sztochasztikus jelenségek,* vydavateľstvo Aula, Budapest, 2002, dostupné na internete: http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/344/1/sztochasztikus_jelensegek.pdf

[9] Pojzl, V.: *Rozdelenia s ťažkými chvosťami vo financiách*, bakalárska práca, FMFI UK, Bratislava, 2013

[10] Skřivánkov V.: *Pravdepodobnosť a štatistika*, učebné texty, UPJŠ Košice, Košice, 2003, dostupné na internete (6.12.2013): http://ics.upjs.sk/~novotnyr/home/skola/pravdepodobnost_a_statistika/prasta2.pdf

[11] Sobol, I. M.: *Monte Carlo method* , University of Chicago Press, Chicago, 2nd edition, 1975

[12] Tišliar, R.: *Použitie metódy Monte Carlo vo financiách*, diplomová práca, FMFI UK, Bratislava, 2011, dostupné na internete (12.04.2011): http://www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/diplomovky/2011/tisliar/diplomovka.pdf

[13] Tham, M., T.: Exponentially weighted moving average filter, Newcastle University, Newcastle, 1996, dostupné na internete: http://lorien.ncl.ac.uk/ming/filter/filewma.htm

Prílohy

CD médium – diplomová práca v elektronickej podobe, aplikácia v elektronickej podobe.