Dvadsať rokov moderných metód vnútorného bodu

Margaréta Halická, Bratislava *

26. januára 2004

Tento rok uplynulo už dvadsať rokov od publikovania slávneho Karmarkarovho algoritmu na riešenie úloh lineárneho programovania. Tento algoritmus obnovil záujem o metódy vnútorného bodu (MVB), ktoré boli v 60-tych rokoch viac-menej neúspešne aplikované na nelineárne úlohy a vyvolal jav dnes nazývaný ako revolúcia v optimalizácii. Ovplyvnil vývoj nielen v lineárnom programovaní, ale aj v celom matematickom programovaní a v optimalizácii ako celku. Rokom jeho publikovania, t.j. rokom 1984, sa začala éra moderných metód vnútorného bodu v optimalizácii.

1. Základná myšlienka MVB

Formulácia úlohy. Uvažujme nasledovnú konvexnú úlohu matematického programovania

$$(MP) \qquad \min\{\ f(x)\ :\ g_i(x) \geq 0,\ i = 1, \ldots, m\ \}, \tag{1}$$

kde f a $-g_i$, $i = 1, \ldots, m$ sú hladké konvexné funkcie. To znamená, že úlohou je nájsť minimum konvexnej účelovej funkcie $f(x)$ na konvexnej množine prípustných riešení

$$\mathcal{P} = \{\ x :\ g_i(x) \geq 0,\ i = 1, \ldots, m\ \}.$$

Na tejto klasickej úlohe konvexného programovania popíšeme základnú myšlienku metód vnútorného bodu. Za týmto účelom budeme predpokladať, že množina prípustných riešení $\mathcal{P}$ spĺňa tzv. Slaterovu podmienku:

$$\mathcal{P}^0 = \{\ x :\ g_i(x) > 0,\ i = 1, \ldots, m\ \} \neq \emptyset. \tag{2}$$

Body z $\mathcal{P}^0$ nazývame vnútornými bodmi a množinu $\mathcal{P}^0$ vnútrom množiny prípustných riešení. Naozaj, pri tomto predpoklade je $\mathcal{P}^0$ relatívnym vnútrom $\mathcal{P}$ a uzáverom $\mathcal{P}^0$ je $\mathcal{P}$. Hranicu tvoria tie prípustné riešenia $x \in \mathcal{P}$, pre ktoré existuje také i, že $g_i(x) = 0$.

---

*Doc. RNDr. M. Halická, CSc. (1954) Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského v Bratislave, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava
e-mail: halicka fmph.uniba.sk, URL: http://pc2.iam.fmph.uniba.sk/institute/halicka/
Prednesené na 35. konferencii slovenských matematikov v Jasnej pod Chopkom, 27.- 30. november 2003.
Podporované VEGA grantom 1/9154/02 a 1/1000/04.

Je zrejmé, že optimálne riešenie takejto úlohy môže byť na hranici množiny prípustných riešení. Táto skutočnosť nedovoľuje priame použitie štandardných techník voľnej optimalizácie. Východiskom z danej situácie môže byť nasledovná konštrukcia, ktorá je základom MVB. V čom spočíva?

Transformačné bariérové úlohy. Priraďme k úlohe (MP) celú triedu pomocných úloh (MP_r) parametrizovaných parametrom $r > 0$:

$$(MP_r) \qquad \min_{x \in \mathcal{P}^0} \left\{ f(x) + r \sum_{i=1}^{m} \Gamma[g_i(x)] \right\}, \tag{3}$$

kde Γ: $\mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ je tzv. bariérová funkcia s nasledovnými vlastnosťami:

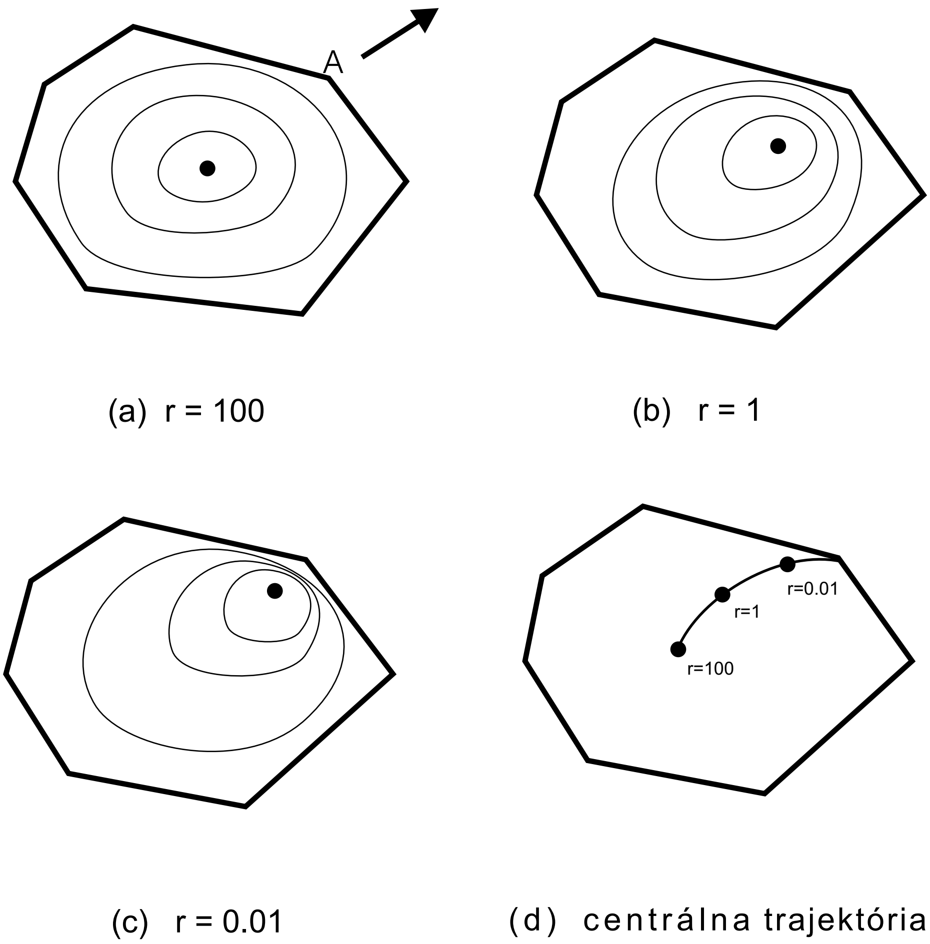
$$\lim_{y \to 0^+} \Gamma(y) = \infty, \quad \Gamma'(y) < 0, \quad \Gamma''(y) > 0. \tag{4}$$

Prvá z vlastností (4) predstavuje tzv. bariérovú vlastnosť, ktorá spôsobuje, že hodnoty Γ neohraničene rastú pre y blížiace sa k nule. Ďalšie dve vlastnosti Γ v (4) zabezpečujú, že účelová funkcia v pomocnej úlohe (MP_r) je konvexnou funkciou. Typickými príkladmi bariérovej funkcie sú napr. $\Gamma(y) = -\ln y$ alebo $\Gamma(y) = -\frac{1}{p}y^p$, pre $p < 0$.

Pomocou bariérovej funkcie sme teda zostrojili novú účelovú funkciu v (MP_r), ktorú nazývame transformačnou bariérovou funkciou. Jej definičným oborom je vnútro množiny prípustných riešení $\mathcal{P}^0$ a jej hodnoty neohraničene rastú, keď sa z vnútra množiny prípustných riešení blížime ku hranici. Teda, ak takáto funkcia má konečné infimum, toto infimum je minimom, ktoré leží vo vnútri množiny prípustných riešení $\mathcal{P}^0$. Na jeho nájdenie teraz už možno použiť metódy voľnej optimalizácie.

Navyše, transformačné funkcie sú parametrizované parametrom $r > 0$, ktorý umožňuje meniť váhu kladenú na bariérový člen. Preto sa dá očakávať, že keď r pôjde do nuly, príslušné minimá transformačných funkcií sa budú blížiť k minimu pôvodnej úlohy.

Ilustrácia metódy. Robert J. Vanderbei vo svojej knihe Lineárne programovanie [14] ilustruje danú situáciu na príklade lineárnej dvojrozmernej úlohy (obr.1). Množinou prípustných riešení je mnohouholník, šípka vyznačuje smer optimalizácie (záporne zobratý gradiend účelovej funkcie), optimálnym riešením je bod A. Na obrázkoch (a)-(c) sú vrstevnice transformovanej účelovej funkcie pomocou logaritmickej bariéry pre tri rozličné hodnoty parametra r. Vidíme, že pre veľké r, sú vrstevnice transformačnej bariérovej funkcie rozložené rovnomerne. To znamená, že takýto problém sa iteračne rieši pomerne ľahko aj zo vzdialeného štartovacieho bodu. Ako sa r zmenšuje, úloha sa stáva ťažšie riešiteľná a na jej efektívne vyriešenie potrebujeme vhodné štartovacie body.



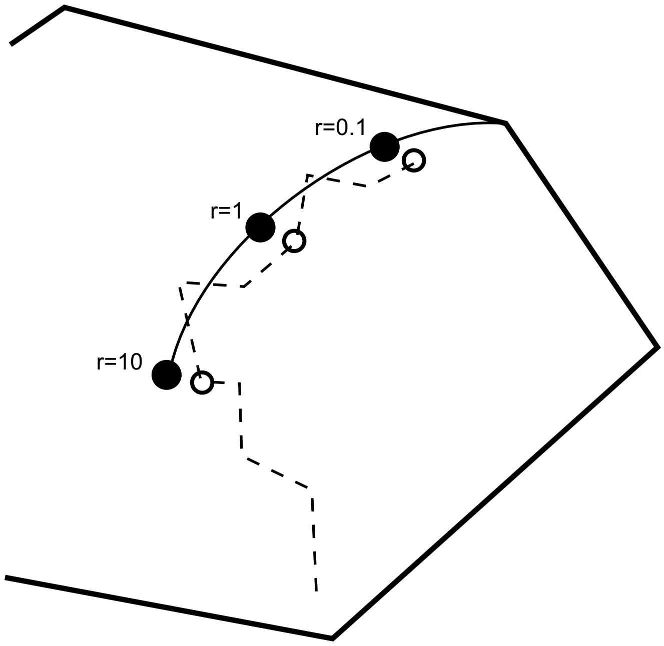
Obr.1. (a)-(c) Vrstevnice logaritmickej transformačnej funkcie pre tri rozličné hodnoty parametra r v úlohe LP; (d) centrálna trajektória - krivka optimálnych riešení.

Na obrázkoch (a)-(c) vidíme minimá transformačných problémov pre tri hodnoty parametra r, na obrázku (d) minimá transformačných bariérových funkcií tvoria krivku, ktorá prechádza vnútrom množiny prípustných riešení a končí v optimálnom riešení pôvodnej úlohy. Takáto krivka sa nazýva centrálna trajektória a je základným objektom metód vnútorného bodu.

Algoritmus metódy. Uvedená idea metód vnútorného bodu je základom algoritmov, ktoré sa často označujú ako algoritmy sledovania centrálnej trajektórie. Tieto algoritmy vychádzajú z nasledovnej schémy:

1. pre dané r nájsť približné riešenie úlohy (MP_r) pomocou nejakej metódy voľnej optimalizácie zo zadaného štartovacieho bodu;

2. zmenšiť hodnotu parametra r a postup opakovať; štartovacím bodom pre túto minimalizáciu je vypočítané približné riešenie predchádzajúcej úlohy.



Obr.2. Algoritmus metódy vnútorného bodu.

Na obr. 2 plné krúžky predstavujú presné riešenia pomocných úloh pre tri hodnoty parametra r. Prázdne krúžky predstavujú vypočítané približné riešenia pomocných úloh, t.j. približné minimá transformačných funkcií. Body, ktoré sú vrcholmi čiarkovanej lomenej čiary, zobrazujú iteračné body riešenia pomocných úloh. Najčastejšie používanou metódou voľnej optimalizácie najmä v moderných metódach vnútorného bodu je Newtonova metóda.

2. Vývoj pred Karmarkarom

Nelineárne programovanie. MVB boli široko pestované a analyzované najmä v 60-tych rokoch v rámci nelineárneho programovania. Najucelenejšiu podobu nadobudla táto teória v knihe Fiacca a McCornica Nelineárne programovanie [2] z r. 1968. Teória zdôvodňovala existenciu, jednoznačnosť a konvergenciu miním transformovaných úloh pre veľmi všeobecné úlohy konvexného programovania pri všeobecných bariérových funkciách.

Poznamenajme, že v uvedenom období bola dokázaná iba konvergencia presných riešení, pričom metódou voľnej optimalizácie sa získalo zakaždým iba približné riešenie. Preto bola snaha riešiť každú transformačnú úlohu (MP_r) čo možno najpresnejšie. Navyše MVB sa aplikovali na príliš všeobecné a neštruktúrované úlohy, ktorých duálne vlastnosti neboli analyzované, a o ktorých sa často ani nevedelo, či ide o konvexné úlohy. Toto všetko spôsobovalo značné numerické problémy pri implementácii algoritmov, v dôsledku ktorých záujem o MVB koncom 70-tych rokov utíchol. Zdalo sa, že MVB sú uzavretou kapitolou v matematickom programovaní. Aký bol medzitým vývoj v lineárnom programovaní?

Lineárne programovanie (LP). Lineárne programovanie je síce špeciálnym prípadom konvexného matematického programovania, ale od svojho vzniku v r. 1947 sa vyvíjalo úplne samostatne a izolovanie od ostatných odvetví matematického programovania. Simplexová metóda, pôvodne navrhnutá George B. Dantzigom, bola pokladaná za univerzálnu, spoľahlivú a výkonnú metódu, umožňujúcu rutinne riešiť úlohy lineárneho programovania. Zrejme aj táto skutočnosť spôsobovala, že sa hľadelo s určitou nedôverou na akékoľvek iné pokusy riešiť úlohy LP nesimplexovými prístupmi. Napr. práca Frisha [3] z r. 1955, ktorá navrhovala určité nelineárne postupy na riešenie úloh LP, ostala nepovšimnutá.

Výpočtová zložitosť a polynomiálnosť LP. Situácia sa začala meniť v 60-tych a 70-tych rokoch, keď vznikol nový odbor zaoberajúci sa výpočtovou zložitosťou. V očiach odborníkov tohoto odboru, každý rýchly program by mal byť časovo-polynomiálny, čo znamená, že počet aritmetických operácií, potrebných na vyriešenie úlohy rozmeru m, sa dá odhadnúť zhora polynómom v premennej m. V roku 1972 Klee a Minty [9] ukázali, že simplexová metóda nie je polynomiálna, pretože v najhorších prípadoch potrebuje na nájdenie optimálneho riešenia exponenciálne veľa iterácií. Táto skutočnosť vyvolala určité znepokojenie v komunite LP a pripravila pôdu na to, aby pokusy o alternatívne prístupy k riešeniu úloh LP začali byť braté vážnejšie.

Prvým polynomiálnym[1] algoritmom na riešenie úloh lineárneho programovania bol algoritmus navrhnutý v roku 1979 Leonidom Khachianom [8]. Jeho elipsoidná metóda využívala niektoré postupy nelineárnej optimalizácie a tým sa podstatne líšila od všetkých dovtedy vyvinutých algoritmov simplexového typu. Tento algoritmus získal značnú popularitu dokonca aj v laickej verejnosti. [2] Časom sa však ukázalo, že pre bežné úlohy LP je Khachianov algoritmus beznádejne pomalý a tak simplexová metóda kráľovala v lineárnom programovaní ďalších pár rokov.

Začiatok novej epochy v optimalizácii. V polovici 80-tych rokov sa však situácia dramaticky zmenila. V roku 1984 Narendra Karmarkar publikoval tzv. projektívny algoritmus pre lineárne programovanie [7], ktorý bol nielen polynomiálny, ale, ako tvrdil Karmarkar, bol aj veľmi rýchly. Prekvapujúce bolo zistenie Gilla a kol. [4] z roku 1986, že Karmarkarov algoritmus úzko súvisí s logaritmickou bariérovou MVB, ktorá bola v šesťdesiatych rokoch neúspešne aplikovaná na úlohy nelineárneho programovania. Táto skutočnosť pritiahla záujem veľkého počtu matematikov a matematické programovanie sa začalo veľmi prudko vyvíjať. Karmarkarov algoritmus si vyslúžil prívlastok "revolučný" a rok 1984 je dnes označovaný za začiatok novej epochy v optimalizácii. Margaret Whrite vo svojom prehľadovom článku [15] z r. 1998 nazvala toto obdobie revolúciou v matematickom programovaní, keď došlo k prudkým zmenám, ktoré ovplyvnili všetky oblasti optimalizácie, keď staré myšlienky boli spracovávané novými prístupmi, aby sa získali kvalitatívne nové výsledky. Analyzujme v ďalšom charakteristické znaky starých a nových prístupov k použitiu metód vnútorného bodu.

3. Staré a nové prístupy: klasické a moderné MVB

Štruktúrovanosť úloh. Zatiaľ čo staré prístupy aplikovali MVB na veľmi všeobecné úlohy nelineárneho programovania, charakteristickým znakom nových prístupov je, že boli najprv ana-

[1] Poznamenajme, že tento algoritmus, ako aj následné algoritmy metód vnútorného bodu, sú polynomiálne v premennej L, kde L je dĺžka binárneho zápisu dát danej úlohy.

[2] Aj v Pokrokoch vyšiel v roku 1981 článok [11] popisujúci túto metódu a o rok na to článok L. Lovásza [11] vysvetľujúci fenomém popularity tohoto algoritmu.

lyzované na lineárnych úlohách napr. typu

$$(LP) \qquad \min_x \left\{ \, c^T x \; : \; Ax = b, \; x \geq 0 \right\}, \tag{5}$$

kde $c, x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ a $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Tu sa využila lineárnosť úlohy ako aj veľmi jednoduché a symetrické duálne vzťahy lineárneho programovania. Neskôr, po odhalení základných zákonitostí v lineárnych úlohách, boli MVB aplikované aj na niektoré nelineárne konvexné úlohy s určitou štruktúrou a s dobre popísateľnými duálnymi vzťahmi.

Logaritmická transformačná funkcia. V klasických metódach vnútorného bodu sa analyzovali rozličné typy bariérových funkcií typu (3), (4) a často sa experimentovalo s výberom bariérovej funkcie Γ v snahe dosiahnuť čo najlepšie správanie sa algoritmov. V moderných metódach sa využíva logaritmická bariérová funkcia, kde úloha (5) je transformovaná do úlohy

$$(LP_r) \qquad \min_{x>0} \left\{ \, c^T x - r \sum_{i=1}^{n} \ln x_i \quad : \; Ax = b \, \right\}. \tag{6}$$

S veľkou výhodou sa využívajú vynikajúce analytické vlastnosti logaritmickej bariéry. Hádam najvýznamnejšou vlastnosťou logaritmickej bariéry je, že k nej konjugovanou funkciou je opäť logaritmická bariéra. Z toho vyplýva, že ju možno súčasne aplikovať na primárnu aj duálnu úlohu pri zachovaní symetrických primárno-duálnych vzťahov.

Newtonova metóda. Tretím znakom je použitie metódy voľnej optimalizácie na približné riešenie pomocných transformačných problémov. Zatiaľ čo v prvom období sa používali rozličné metódy voľnej optimalizácie, v nových prístupoch sa používa modifikovaná Newtonova metóda, t.j. Newtonova metóda so skrátenou dĺžkou kroku. Tu sa podarilo vymedziť určité okolie centrálnej trajektórie, v ktorom bola zaručená kvadratická konvergencia Newtonovej metódy. K tomu bolo potrebné merať vzdialenosť daného bodu od centrálnej trajektórie, čo je charakteristickým znakom nových prístupov.

Voľné sledovanie centrálnej trajektórie. Štvrtým charakteristickým znakom, ktorý je aj určitým dôsledkom predchádzajúcich znakov, je samotná filozofia algoritmov. V starých prístupoch bola dokázaná iba konvergencia presných miním transformovaných úloh. Preto bola snaha, čo možno najpresnejšie sledovať centrálnu trajektóriu, čo bolo jedným z možných zdrojov numerickej nestability implementácií.

Naproti tomu nové prístupy možno interpretovať ako veľmi voľné sledovanie centrálnej trajektórie, kde centrálna trajektória slúži len ako nejaký kompas, určujúci smer pohybu z vnútra množiny prípustných riešení až po optimálne riešenie na hranici. Charakteristickým znakom je dôkaz konvergencie bodov generovaných algoritmom a odhad počtu iterácií potrebných na získanie ϵ-presného riešenia.

4. Vývoj po Karmarkarovi.

Vývoj v lineárnom programovaní. Vývoj po Karmarkarovi nebol priamočiary. Vznikalo veľa prác, ktoré navrhovali rozličné typy algoritmov. Mnohé z týchto algoritmov sa inšpirovali predtým nepovšimnutými prácami Frischa [3], ale aj Huarda [5] a Dikina [1]. Z dnešného pohľadu, keď sa už vývoj predsa len trochu utíšil a utriedil, existuje určitá kategorizácia algoritmov a prístupov. Najrozšírenejšie, najspoľahlivejšie a pritom najjednoduchšie a metodicky najvďačnejšie sa ukázali byť primárno-duálne algoritmy sledovania centrálnej trajektórie.

V prvých rokoch po Karmarkarovi sa výskum orientoval hlavne na tvorbu nových algoritmov a na získanie čo možno najlepších odhadov ich polynomiálnej zložitosti. Neskôr sa začali skúmať aj otázky rýchlosti konvergencie, efektívneho štartu a ukončovania výpočtov. Boli vyvinuté algoritmy, ktoré umožňovali riešiť nielen tie úlohy, ktoré spĺňali predpoklady existencie vnútorného bodu, ale aj úplne všeobecné úlohy lineárneho programovania. Značná pozornosť bola venovaná implementačným otázkam a príslušné programy sa stali súčasťou komerčnej ponuky.

Popri čisto algoritmických otázkach sa skúmali aj mnohé teoretické otázky, napr. vlastnosti centrálnej trajektórie. Ukázalo sa, že centrálna trajektória konverguje k tzv. analytickému stredu množiny optimálnych riešení. To znamená, že algoritmy MVB dávajú v limite vždy ostro komplementárne riešenie, kým simplexová metóda dáva bázické riešenie. Tento poznatok možno zohľadniť pri výbere metódy na riešenie úlohy. [3]

Vývoj v konvexnom programovaní. Krátko po vyjdení Karmarkarovho článku sa začali matematici zaoberať možnosťami aplikácie nových prístupov metód vnútorného bodu aj na niektoré úlohy konvexného programovania. Prvými úlohami boli kvadratické konvexné úlohy, neskôr tzv. úlohy lineárnej komplementarity. Veľkou výzvou zostávali všeobecné úlohy konvexného programovania hlavne z dvoch dôvodov. Jednak nelineárna konvexnosť je obsiahnutá už v samotnej povahe metód vnútorného bodu, jednak takéto úlohy boli už metódami vnútorného bodu nie veľmi úspešne riešené v 60-tych rokoch. Pri aplikácii nových postupov metód vnútorného bodu na konvexné úlohy však vznikali problémy súvisiace s analýzou správania sa Newtonovej metódy.

Tieto problémy sa podarilo vyriešiť Nesterovovi a Nemirovskému v roku 1994 v rozsiahlej knižnej publikácii [12], ktorej význam pre ďalší rozvoj MVB možno prirovnať k významu Karmarkarovho článku. V tejto práci autori zavádzajú určitú podmienku "self-concordantnosti", ktorú musia splňať transformované úlohy a pri ktorej je Newtonova metóda kvadraticky konvergentná. Použitím tejto vlastnosti je možné analyzovať niektoré typy algoritmov sledujúcich centrálnu trajektóriu aj v prípade všeobecných problémov konvexného programovania a dokázať ich polynomialitu. Teória prezentovaná v tejto práci je pri tom dostatočne všeobecná a má široké aplikácie. Takéto aplikácie zahŕňajú úlohy lineárneho a kvadratického programovania, geometrické programovanie, l_p aproximáciu, ale aj novú oblasť matematického programovania - semidefinitné programovanie (SDP).

5. Semidefinitné programovanie.

Formulácia úlohy SDP a formálna podobnosť s LP. Aby sme lepšie videli podobnosť semidefinitného s lineárnym programovaním, prepíšme lineárnu úlohu (5) do tvaru

$$(LP) \qquad \min_{x \in R^n} \{ \langle c, x \rangle \ : \quad \langle a_i, x \rangle = b_i, \ i = 1, ..., m, \ x \geq 0 \},$$

kde a_i je i-tý riadok matice A a $\langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i$ je skalárny súčin vektorov. Sformulujme teraz k tejto úlohe príbuznú úlohu (SDP), v ktorej n rozmerný vektor $x \in \mathbb{R}^n$ je nahradený maticovou

[3] S výhodou by sa táto vlastnosť dala použiť napr. pri DEA modelovaní.

premennou $X \in \mathbb{S}^n$ ($\mathbb{S}^n$ je priestor symetrických $n \times n$ matíc) a podmienka nezápornosti $x \geq 0$ je nahradená podmienkou kladnej semidefinitnosti $X \succeq 0$. Dostaneme tak nasledovnú úlohu semidefinitného programovania

$$(SDP) \qquad \min_{X \in S^n} \{ \ \langle C, X \rangle \ : \ \langle A_i, X \rangle = b_i, \ i = 1, ..., m, \ X \succeq 0 \ \},$$

kde $C, A_i \in \mathbb{S}^n$, $i = 1, ..., m$, $b \in \mathbb{R}^m$ a $\langle X, Y \rangle = \sum_{i,j} X_{ij} Y_{ij}$.

Napriek podobnosti s lineárnym programovaním, ide o nelineárnu úlohu, kde nelineárnosť spôsobuje ohraničenie $X \succeq 0$. Zároveň však ide o konvexnú úlohu, kde sa hľadá minimum lineárnej funkcie na konvexnej množine. Konvexná množina je daná ako prienik afinnej roviny a konvexného kužela všetkých symetrických kladne semidefinitných matíc. Vidíme, že táto konvexná úloha nie je v klasickom tvare, pretože konvexná množina prípustných riešení nie je popísaná pomocou konvexných nerovností. Táto skutočnosť však nie je na prekážku, pretože transformovaný barierový problém pre takúto úlohu možno definovať nasledovne:

$$\min_{X \succ 0} \{ \ \langle C, X \rangle - r \ \ln \det X : \langle A_i, X \rangle = b_i, \ i = 1, ..., m \}. \tag{7}$$

Aj tu vidíme analógiu s lineárnym programovaním, pretože pre úlohy LP možno sumu logaritmov v (6) zapísať ako logaritmus zo súčinu jednotlivých zložiek vektora x, pričom v semidefinitnom programovaní je determinant v (7) súčinom vlastných čísel matice X. Podstané v tomto prípade je, že jednak polyedrálny kužeľ všetkých nezáporných vektorov, rovnako ako konvexný kužeľ všetkých semidefinitných matíc sú samoduálne kužele, ktoré zaručujú podobné symetrické duálne vlastnosti oboch úloh. Práve skutočnosť, že semidefinitné programovanie má pomerne jednoduché a ľahko popísateľné duálne vlastnosti, je kľúčovou vlastnosťou, ktorá umožňuje implementovať osvedčené postupy MVB na túto triedu úloh.

Aplikácie SDP. Semidefinitné programovanie sa stalo hitom posledných rokov v matematickom programovaní. Mimoriadny záujem o semidefinitné programovanie vyplýva zo skutočnosti, že SDP má aplikácie nielen v klasickom konvexnom či v kvázikonvexnom programovaní, ale aj v takých oblastiach ako je teória riadenia, spektrálna analýza, štatistika, či kombinatorická optimalizácia. Pritom mnohé optimalizačné problémy z týchto oblastí sa dajú priamo naformulovať ako úlohy SDP a potom efektívne riešiť MVB, alebo sa dajú relaxovať pomocou SDP pričom sa získajú lepšie odhady optimálneho riešenia ako pri použití doterajších relaxácií pomocou LP.

6. Význam MVB.

Význam MVB pre LP. V lineárnom programovaní už vývoj trochu utícha a teda tu sa najskôr dá urobiť určitá rekapitulácia. Dnes je už zrejmé, že simplexová metóda stratila svoje výnimočné postavenie. Ukázalo sa, že metódy vnútorného bodu pre veľmi veľké úlohy LP s riedkymi maticami sú významne rýchlejšie ako simplexová metóda. Pre úlohy malého a stredného rozsahu máme možnosť voľby. Táto voľba môže závisieť od úloh, ktoré ideme riešiť a od požadovaných vlastností optimálnych riešení, ktoré daná metóda môže poskytnúť. Zatiaľ čo simplexová metóda poskytuje bázické riešenie, metódou vnútorného bodu dostaneme ostro komplementárne riešenie, čo môže byť v niektorých prípadoch výhodou. Voľba metódy pri riešení úloh stredného až veľkého rozmeru (niekoľko tisíc premenných) môže závisieť aj od dostupnosti softvéru. Kým pre úlohy takýchto rozmerov je dostupný už len špeciálny komerčný softvér, pre MVB je na internete ešte stále množstvo voľne prístupného softvéru, umožňujúceho spoľahlivo riešiť úlohy LP. Podotýkame však, že jeho použitie, na rozdiel od komerčných softvérov MVB, vyžaduje aspoň základné vedomosti o algoritmoch MVB a elementárnu programátorskú zručnosť.

Ďalšou významnou črtou moderných metód vnútorného bodu je, že umožnili chápať lineárne programovanie ako integrálnu súčasť konvexného programovania. Pred Karmarkarom bolo lineárne programovanie doménou predovšetkým odborníkov z ekonomického operačného výskumu. Po Karmarkarovi lineárne programovanie významnou mierou rozvíjajú špecialisti na matematické programovanie a numerickú analýzu; LP sa stáva súčasťou kontinuálnej optimalizácie. V súvislosti s týmto vzniká aj celý rad pedadogicko-metodických problémov o tom, ako učiť lineárne programovanie a ako učiť MVB. Zatiaľ čo donedávna stačili na zvládnutie lineárneho programovania základné vedomosti z lineárnej algebry, dnes sú potrebné na zvládnutie základov MVB v LP aj vedomosti z analýzy funkcií viacerých premenných, konvexnej analýzy, či numeriky.

Význam MVB pre matematické programovanie. Napriek tomu, že od publikovania Karmarkarovho algoritmu už uplynulo 20 rokov, vývoj MVB, ako aj vývoj v konvexnom programovaní, je stále veľmi prudký. Semidefinitné programovanie, ale aj príbuzné tzv. second-order cone programovanie a jeho zovšeobecnenie, kónické programovanie, sa stále rozvíjajú po stránke teoretickej, algoritmickej i implementačnej. Všetky tieto programovania skúmajú tzv. štruktúrované úlohy konvexného programovania, ktoré možno riešiť štandardnými postupmi MVB v polynomiálnom čase. Možno očakávať, že tieto oblasti konvexného programovania sa budú ďalej zovšeobecňovať a príslušné úlohy budú stále viac vypĺňať priestor všeobecných konvexných úloh. Teoretický výsledok práce Nerestova a Nemirovského dáva k tomu dobrý dôvod.

V tejto súvislosti hádam najväčší význam MVB je v tom, že posunuli hranicu medzi úlohami, ktoré sa vedia rutinne riešiť a tými, na riešenie ktorých treba použiť nejaký dôvtip a treba metódu riešenia navrhovať veľmi individuálne. V minulosti táto hranica viedla medzi lineárnym a nelineárnym programovaním. Úlohy lineárneho programovania sa riešili spoľahlivo simplexovou metódou, ktorá je štandardnou súčasťou programových balíkov a lepších kalkulačiek. Ostatné úlohy bolo potrebné riešiť prísne individuálne, navrhovali sa algoritmy šité na mieru jednotlivých problémov a každý postup potom vyžadoval individuálnu analýzu a zdôvodnenie opodstatnenosti. Pritom sa často ani neskúmalo, či úloha je konvexná alebo nie; táto skutočnosť nebola považovaná za dôležitú. Dnes sa hranica pod vplyvom MVB posúva medzi konvexné a nekonvexné úlohy a dôvtip sa uplatňuje pri zisťovaní, či daná úloha je konvexná (s vhodnou štruktúrou) a či nie.

Význam MVB pre optimalizáciu. MVB nielen umožnili spoľahlivé riešenie mnohých úloh z tých najrozličnejších oblastí matematiky, operačného výskumu, financií, či inžinierskej matematiky, ale zároveň poskytli aj ďalšie impulzy pre rozvoj týchto oblastí. Veľmi výrazne to vidieť napr. v inžinierskej teórii riadenia, kde už v 40-tých rokoch boli mnohé problémy súvisiace so stabilizáciou riadených systémov formulované pomocou tzv. LMI (linear matrix inequalities), to znamená lineárnych rovníc v priestore symetrických matíc, zahŕňajúce aj podmienky kladnej semidefintnosti. Vzhľadom na to, že takéto problémy sa v uvedenom období nevedeli rutinne riešiť, táto oblasť sa vyvíjala iba pozvoľna. Odhalenie súvislosti LMI s úlohami SDP dalo silné impulzy pre rozvoj, kde sa okrem algoritmov využívala aj teória a dualita SDP. Podobne je to aj v ďalších oblastiach aplikácií semidefinitného a kónického programovania a potenciál pre odhaľovanie ďalších možných aplikácií je stále veľmi veľký.

Základný zdroj informácií o MVB. Rýchly vývoj MVB a široký záber aplikácií SDP si vyžiadali intenzívnejšie využívanie internetu na šírenie informácií, ako je to snáď bežné v iných oboroch. Vzhľadom na množstvo napísaných prác a dlhé doby od podania článku po jeho uverejnenie, stalo sa bežným publikovanie článkov na osobných stránkach ako aj na internetovej stránke Interior-Point Archive [6] ešte pred odovzdaním autorských práv časopisom. Na tejto stránke ešte aj dnes možno nájsť množstvo užitočných informácií o starších článkoch, knihách, softvéri, ďalších stránkach a odborníkoch na MVB. Úlohu tejto stránky nedávno prebrala na seba nová, širšie zameraná Optimization Online [13], ktorá spája širokú komunitu odborníkov na optimalizáciu. Stránka umožňuje elektronické publikovanie článkov a pravidelne rozposiela informácie o najnovších prácach, softvéri a konferenciách.

Literatúra

[1] Dikin, I.: An iterative solution of problems of linear and quadratic programming. Doklady AN SSSR 174 (1967), 747–751.

[2] Fiacco, A., Mc-Cormick, G.: Nonlinear Programming: Sequential unconstrained minimization techniques, John Wiley and Sons, Inc., New York 1968.

[3] Frisch, K.R.: The logarithmic potential method of convex programming, University Institute of Economics, Memorandum, Oslo, Norway 1955.

[4] Gill, P., Murray, W., Saunders, M., Tomlin, J. and Wright, M.: On projected Newton barrier methods for linear programming and an equivalence to Karmarkar's projective method, Math. Programming 36 (1986), 183–209.

[5] Huard, P.: Resolution of mathematical programming with nonlinear constraints by the method of centers, in Nonlinear Programming, J.Abadie, ed., North-Holland, Amsterdam 1967.

[6] Interior-Point Archive, URL: http://www.mcs.anl.gov/otc/InteriorPoint

[7] Karmarkar, N.: A new polynomialtime algorithm for linear programming, Combinatorika 4 (1984), 373–395.

[8] Khachian, L. G.: A polynomial algorithm in linear programming, Doklady AN SSSR 244 (1979), 1093–1096.

[9] Klee, V., Minty, G.: How good is the simplex algorithm? In: O. Shisha, ed.,"Inequalities-III" Academic Press, New York 1972.

[10] Lawler, E. L.: Velký matematický sputnik roku 1979, Pokroky MFA 27 (1982), 39–47.

[11] Lovász, L.: Je nový algoritmus lineárního programování lepší nebo horší než simplexová metóda? Pokroky MFA 26 (1981), 193–202.

[12] Nesterov, Y. E., Nemirovsky, A. S.: Interior Point Polynomial Algorithms in Convex Programming, SIAM Publications, Philadelphia, USA, 1994

[13] Optimization Online, URL: http://www.optimization-online.org

[14] Vanderbei, R. J.: Linear Programming. Foundations and Extensions, Kluwer Academic Publishers, Boston/London/Dortrecht 1997, elektronicky prístupné na http://www.princeton.edu/ rvdb/LPbook/index.html

[15] Wright, M. H.: The interior-point revolution in constrained optimization, In: R. DeLeone and A. Murli and P. M. Pardalos and G. Toraldo: High-Performance Algorithms and Software in Nonlinear Optimization, 359–381, Kluwer Academic Publishers, 1998.