

---

# Domáca úloha 1

## Termín: 1.4.2014, 17:20

---

### 1. Úloha variačného počtu s voľným časom. (2 body)

Nájdite kandidátov na optimálne riešenie pre úlohu

$$\begin{aligned} \text{extr} \quad & \int_0^T \dot{x}(t)^2 + t^2 \, dt \quad T \text{ voľné,} \\ x(0) &= 0, \\ x(T) &= 4. \end{aligned}$$

Pomocou Legendrovej podmienky zistite, či ide o kandidátov na minimum alebo maximum. Overte splnenie postačujúcej podmienky druhého rádu.

### 2. Úloha variačného počtu s voľným koncom. (4 body)

Nájdite kandidátov na optimálne riešenie pre úlohu

$$\begin{aligned} \text{extr} \quad & \int_0^1 x(t)^2 + \dot{x}(t)^2 + 2x(t)e^t \, dt \\ x(0) &= 0, \\ x(1) &\text{ voľné.} \end{aligned}$$

Pomocou Legendrovej podmienky zistite, či ide o kandidátov na minimum alebo maximum. Overte splnenie postačujúcej podmienky druhého rádu.

### 3. Úloha o optimálnej spotrebe. (4 body)

Na cvičeniach sme riešili všeobecne sformulovanú úlohu o optimálnej spotrebe v tvare

$$\begin{aligned} \max \quad & \int_0^T e^{-rt} U(ak(t) - \dot{k}(t)) \, dt, \quad T \text{ je dané,} \\ k(0) &= k_0 > 0 \text{ je dané,} \\ k(T) &= k_T > 0 \text{ je dané.} \end{aligned}$$

Predpokladajme, že  $a \in (0, 1)$  a  $r \in (0, 1)$  sú dané a  $k_0 e^{at} > k_T$ .

a) Napíšte Eulerovu rovnicu pre prípad funkcie užitočnosti v tvare

$$U(c) = \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta},$$

kde  $\theta \in \left(1 - \frac{r}{a}, 1\right) \cap \mathbb{R}^+$  (tzv. funkcia s konštantnou elasticitou substitúcie).

b) V Eulerovej rovnici zaveďte substitúciu  $c(t) := ak(t) - \dot{k}(t)$  (kde  $c(t)$  možno interpretovať ako spotrebu) a nájdite  $c$ , ktoré je riešením tejto rovnice.

c) Rozhodnite, či je splnená postačujúca podmienka na maximum.

**4. Bonus. (1 bod)**

Dokážte, že optimálne riešenie Bolzovej úlohy variačného počtu v tvare

$$\begin{aligned} & \text{extr} \int_0^T f^0(t, x(t), \dot{x}(t)) dt + \varphi(x(T)), \quad T \text{ je dané,} \\ & x(0) = x_0 \text{ je dané,} \\ & x(T) = x_T \text{ je voľné,} \end{aligned}$$

kde  $\varphi \in C^2$ , spĺňa Eulerovu rovnicu a modifikovanú podmienku transversality v tvare

$$f_x^0(T, \hat{x}(T), \dot{\hat{x}}(T)) = -\varphi'(\hat{x}(T)).$$

*Za túto DÚ možno do hodnotenia započítať všetkých 11 bodov, hoci jej váha v hodnotení je iba 10 bodov.*