
Domáca úloha 2

Termín: 29.4.2013, 17:20

1. Úloha s pevným časom a s voľným koncom, bez ohraničenia na riadenie (5 bodov)

Nájdite riešenie PPM pre úlohu:

$$\begin{aligned} \min \int_0^1 2x(t)^2 + u(t)^2 dt, \\ \dot{x}(t) = 2u(t) - x(t), \\ x(0) = 0, \\ x(1) = 1. \end{aligned}$$

2. Marketing telekomunikačnej firmy (5 bodov).

Predpokladajme, že zisk telekomunikačnej firmy H_2O , ktorá len nedávno vstúpila na trh, je rastúcou a konkávnou funkciou (P) počtu ľudí, ktorí poznajú jej produkt (tento počet označme x , v mil.). Trhový podiel môže firma ovplyvniť dobre cieľným marketingom, pričom intenzitu marketingovej kampane označme u . Náklady na marketingovú kampaň sú kvadratickou funkciou premennej u . Nech $\delta > 0$ označuje mieru poklesu počtu ľudí oboznámených s produktom. Tento model možno sformulovať nasledovne:

$$\begin{aligned} \max \int_0^T e^{-rt} (P(x(t)) - u(t)^2) dt, \quad T \text{ pevné}, \\ \dot{x}(t) = u(t) - \delta x(t), \\ x(0) = x_0 > 0, \\ x(t) \geq 0, \\ u(t) \geq 0, \end{aligned}$$

kde $r > 0$ a $\delta > 0$ sú dané parametre a funkcia P spĺňa predpoklad $\lim_{x \rightarrow 0} P'(x) = \infty$.

- a) Pomocou tvaru stavovej rovnice a ohraničenia na riadenie ukážte, že ohraničenie na stavovú premennú možno z formulácie úlohy vypustiť a teda ide o úlohu s voľným koncom. (1 bod)

- b) Sformulujte podmienky PPM. Zdôvodnite, že $\psi^0 = 1$. (1 bod)
- c) Nájdite riešenie týchto podmienok v tvare diferenciálnej rovnice pre u (pri jej odvodení neuvažujte ohraňenie na riadenie). Načrtnite fázový portrét systému diferenciálnych rovníc pre x a u v priestore (x, u) a určte charakter stacionárneho bodu. (3 body)

3. Bolzova úloha s ohraňením v tvare nerovnosti na koncový stav (5 bodov)

Nájdite riešenie PPM pre úlohu:

$$\begin{aligned} \min \int_0^2 x(t) dt - 5x(2) \\ \dot{x}(t) &= u(t) \\ x(0) &= 1 \\ x(2) &\geq 0 \\ u(t) &\in [-1, 1] \end{aligned}$$

4. Bonus: Odvodenie „podmienky stacionarity“ pre úlohu s diskontným faktorom. (1 bod)

Ukážte, že za predpokladu diferencovateľnosti optimálneho riadenia pre úlohu s diskontným faktorom v tvare

$$\begin{aligned} \max \int_0^T e^{-rt} f^0(x, u) dt, \quad T \text{ voľné} \\ \dot{x} &= f(x, u), \\ x(0) &= x_0, \\ x(T) &\text{ pevné,} \end{aligned}$$

platí podmienka

$$H(t, x^*(t), u^*(t), \psi^0, \psi(t)) = r\psi^0 \int_t^T e^{-rs} f^0(x^*(s), u^*(s)) ds,$$

kde $(x^*(t), u^*(t))$ je optimálne riešenie tejto úlohy a H je Hamiltonova funkcia v tvare

$$H(t, x^*(t), u^*(t), \psi^0, \psi(t)) = \psi^0 e^{-rt} f^0(x^*(t), u^*(t)) + \psi(t) f(x^*(t), u^*(t)).$$