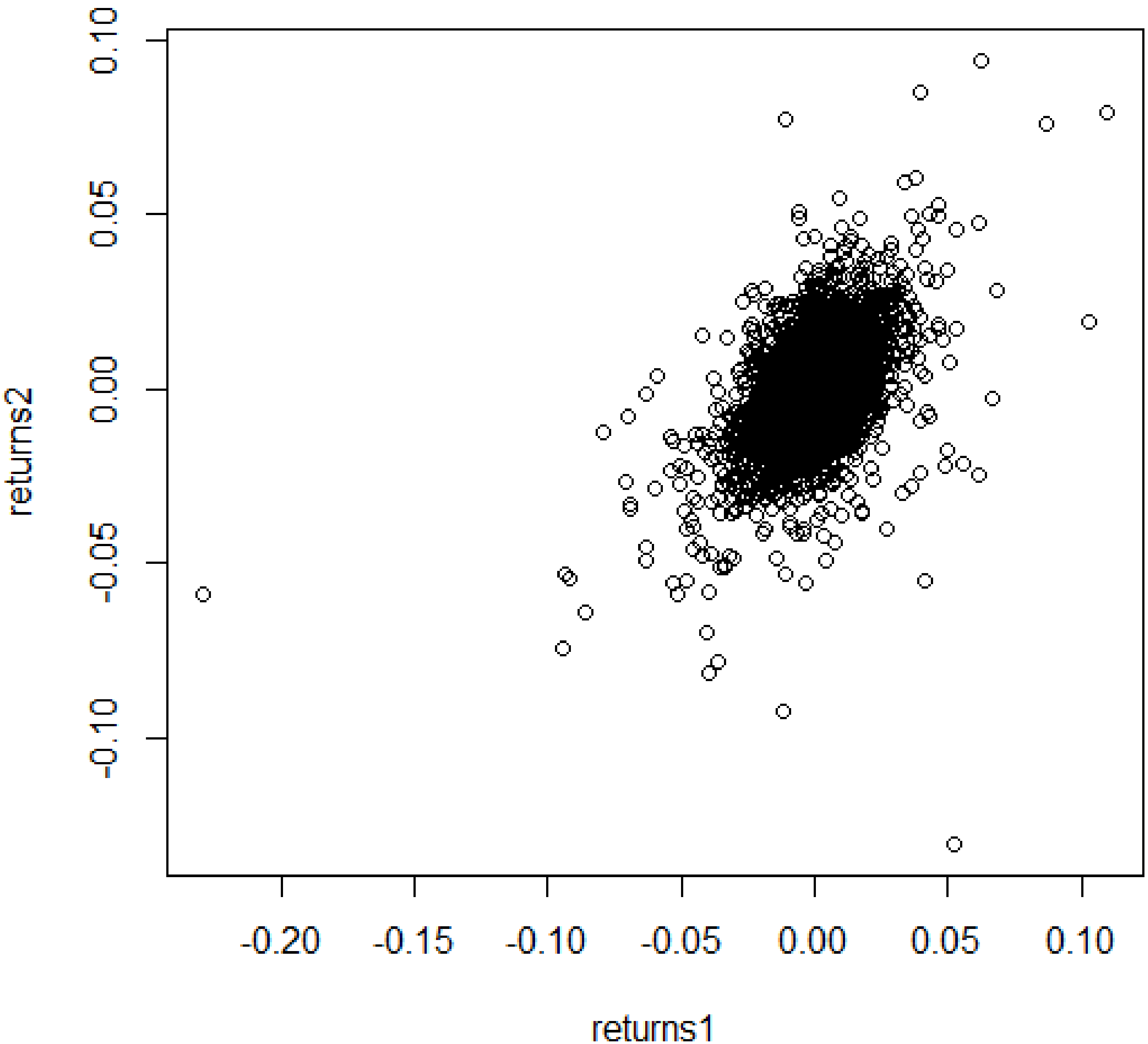
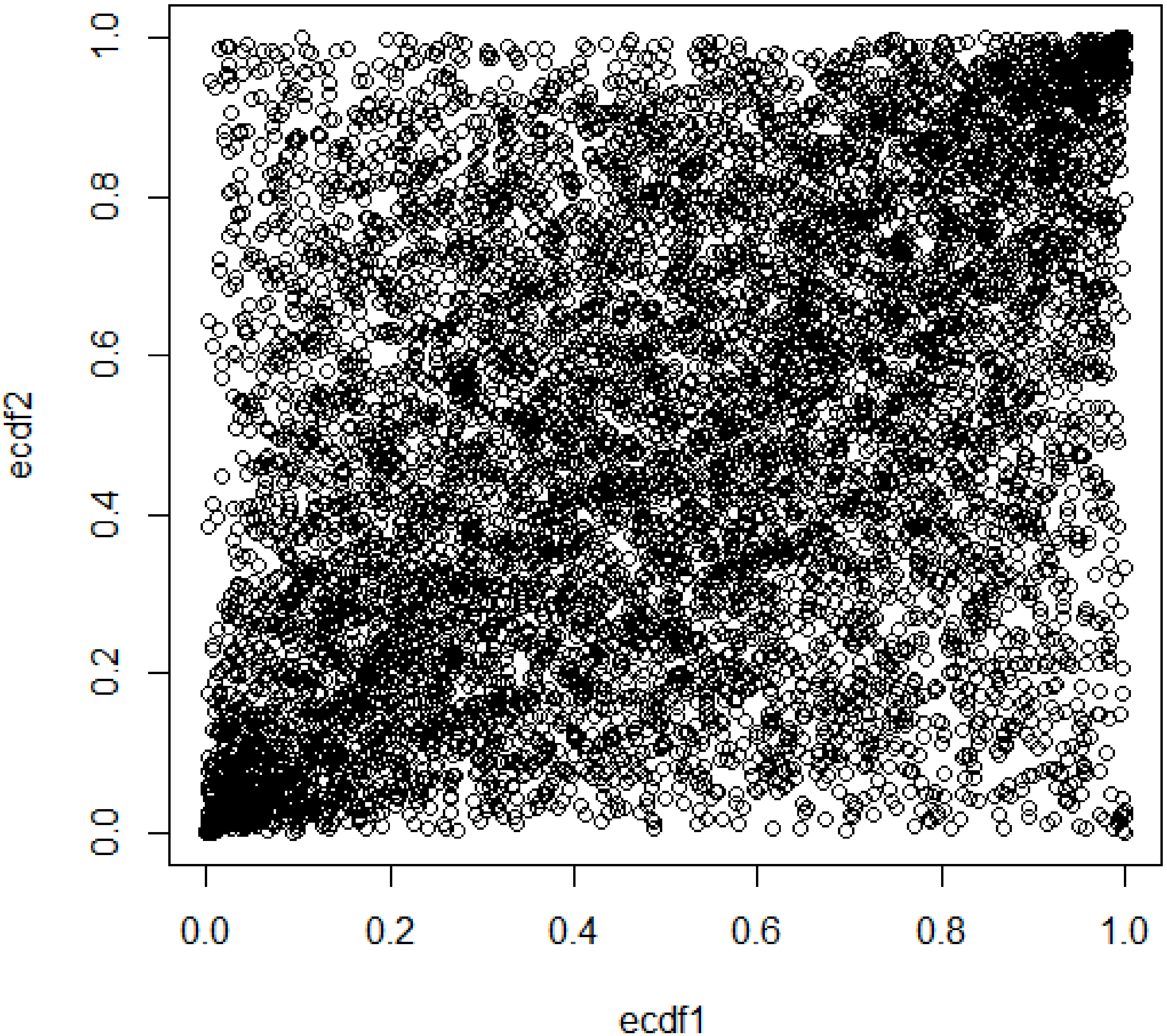
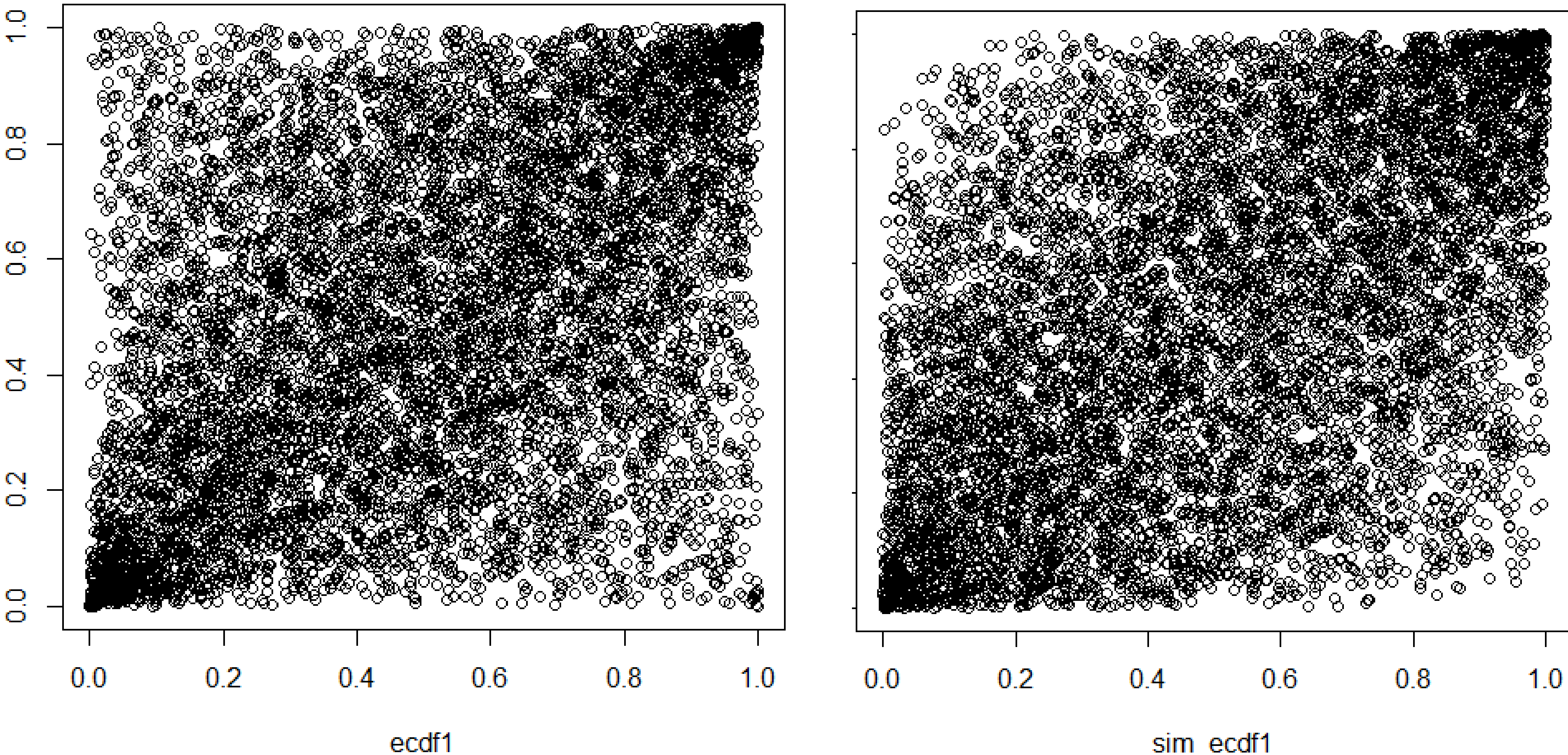
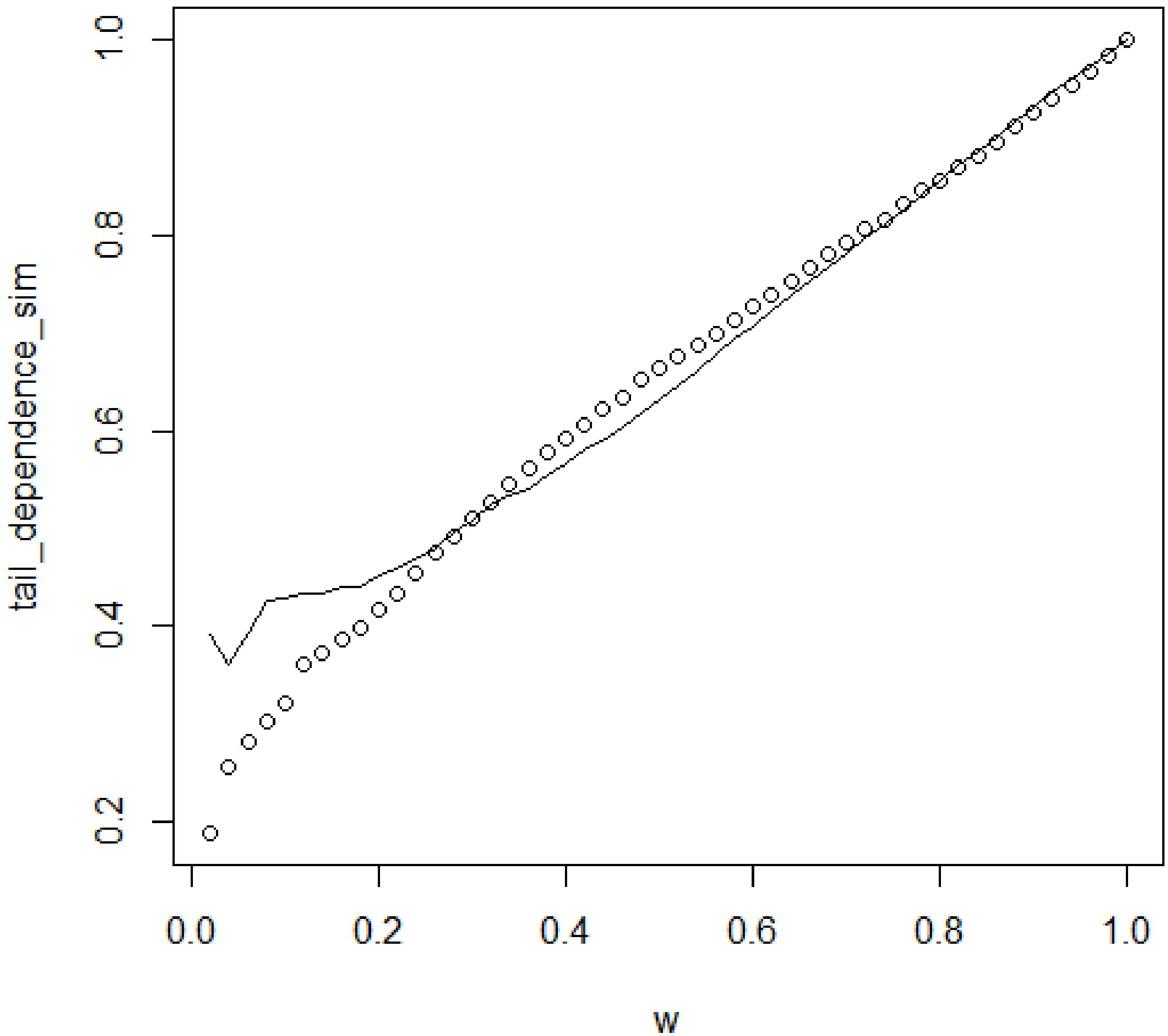
Kopula


returns2
0.10
0.05
0.00
-0.05
-0.10
-0.20
-0.15
-0.10
-0.05
0.00
0.05
0.10
returns1


0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
ecdf1
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
ecdf2


0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
ecdf1
sim_ecdf1



tail_dependence_sim
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
w

Využitie copuly

- Copula umožňuje „rozčlenit“ viacrozmerné rozdelenie na jednorozmerné rozdelenia a „štruktúru závislostí“ medzi nimi:

Ak $F_1(x) := \Pr[X \leq x]$ a $F_1(y) := \Pr[Y \leq y]$) sú jednorozmerné distribučné funkcie, potom výraz v tvare $C(F_1(x), F_2(y))$, kde C je nejaká copula, vyjadruje viacrozmernú distribučnú funkciu $H(x, y) := \Pr[X \leq x, Y \leq y]$.

Definícia

- Copula C je viacrozmerná distribučná funkcia za predpokladu, že jej jednorozmerné zložky u, v (*margins*) majú rovnomerné rozdelenie na [0,1]:

$$C(u, v) = \Pr[U < u, V < v]$$

- Dvojrozmerná copula je funkcia $C : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ s nasledujúcimi vlastnosťami:

1. Pre každé u, v z [0,1] platí:

$$C(u,0) = C(0,v) = 0$$

$$C(u,1) = u \text{ a } C(1,v) = v$$

2. Pre každé u_1, u_2, v_1, v_2 z [0,1] také, že $u_1 \le u_2$ a $v_1 \le v_2$

$$C(u_2,v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \ge 0$$

- Interpretácia: C(u,v) je pravdepodobnosť, že hodnoty náhodných premenných U, V (nemusia byť rovnomerne rozdelené) padnú pod ich (100u)%-ný, resp. (100v)%-ný kvantil.

Pozor na pojmy!

- Copula nie je kupola ani kopulácia!

Sklarova veta

- Nech H je distribučná funkcia viacrozmerného rozdelenia s jednorozmernými rozdeleniami, ktoré majú distribučné funkcie F a G. Potom existuje copula C taká, že pre každé x, y z **R** platí:

$$H(x, y) = C(F(x), G(y))$$

- Ak sú F a G spojité, potom je copula C určená jednoznačne.

- Naopak, ak C je copula a F a G sú distribučné funkcia, potom funkcia H je viacrozmerná distribučná funkcia, ktorej jednorozmerné rozdelenia majú distribučné funkcie F a G.

Tail dependence

- Analógia problému tučných chvostov (*fat tails*) vo viacrozmernom prípade

- Miera súčasného výskytu vysokých strát vo viacerých aktívach

$$\lambda(w) := \Pr[X \leq w \,|\, Y \leq w] = \frac{\Pr[X \leq w \wedge Y \leq w]}{\Pr[Y \leq w]}$$

- S využitím copuly môžeme písať: $\lambda(w) := \dfrac{C(w,w)}{w}$

- Lower tail index: $\lambda_L := \lim\limits_{w \to 0^+} \lambda(w)$

Hustota bivariačného rozdelenia

- Ak distribučné funkcie *F* a *G* sú diferencovateľné a kopula *C* je dvakrát diferencovateľná, potom

$$h(x,y) \equiv \frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial x \partial y}$$

$$h(x,y) \equiv \frac{\partial F(x)}{\partial x} . \frac{\partial G(y)}{\partial y} . \frac{\partial^2 C\left(F(x), G(y)\right)}{\left(\partial F(x) \partial G(y)\right)}$$

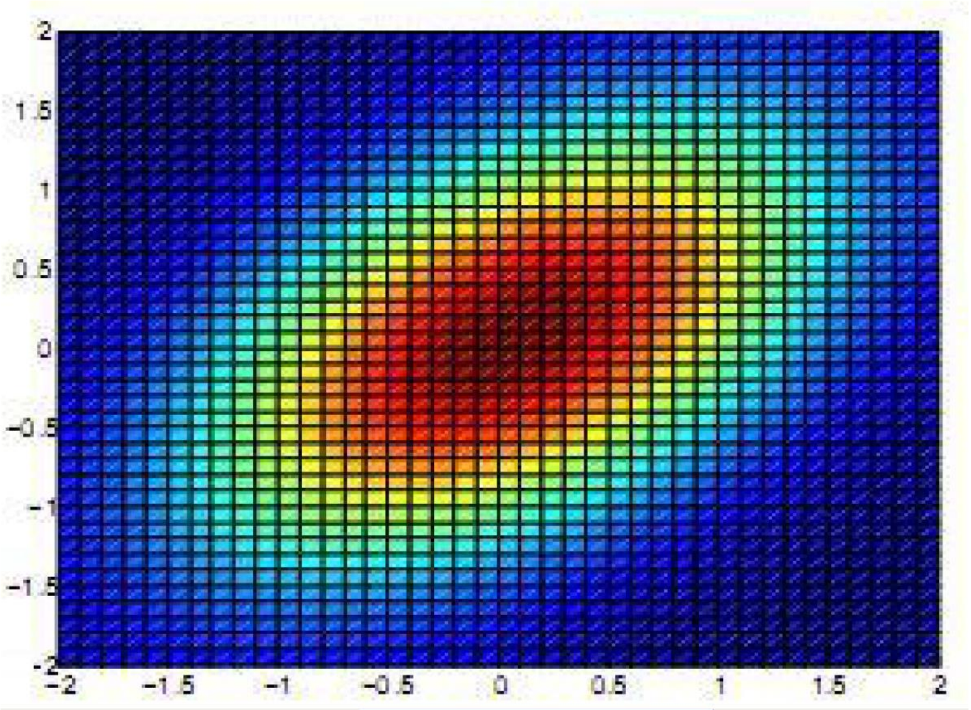
$$h(x,y) \equiv f(x) . g(y) . c\left(F(x), G(y)\right)$$

Príklady kopúl

- **Gaussova kopula**
  $C_N(x,y;\rho) = \Phi_2[\Phi^{-1}(x); \Phi^{-1}(y); \rho]$,

- Ak sú marginálne rozdelenia normálne, Gaussova kopula dáva viacrozmerné normálne rozdelenie

- Nulová chvostová závislosť (pokiaľ $\rho < 1$)



Marginálne rozdelenia: $N(0,1)$, $\rho = 0.5$

- Platí

$$C_N(u_1, u_2, \rho) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{\frac{-(r^2 - 2\rho rs + s^2)}{2(1-\rho^2)}\right\} dr\, ds$$

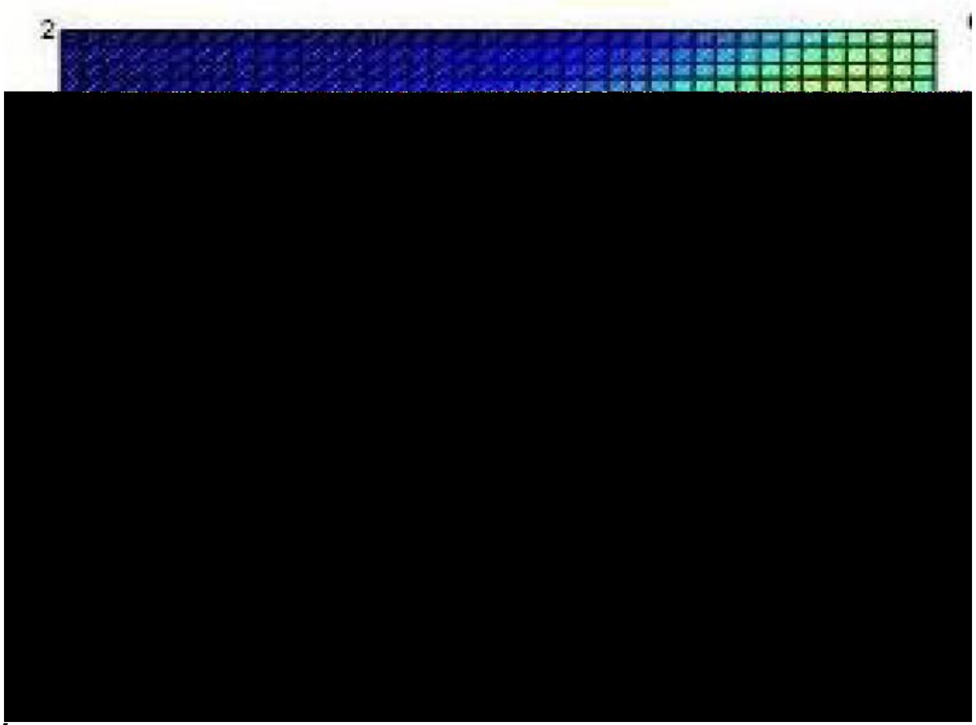
Príklady kopúl

- **Studentova t-kopula**

  $C_t(x,y;\rho,v) = t_2[t^{-1}(x;v);\ t^{-1}(y;v);\ \rho]$,

- Ak sú marginálne rozdelenia Studentove, Studentova t-kopula dáva viacrozmerné Studentovo rozdelenie

- Nenulová chvostová závislosť
  - rastie s klesajúcim počtom stupňov voľnosti



Marginálne rozdelenia: $N(0,1)$, $\rho = 0.5$, v = 3

Príklady kopúl

- **Archimedova trieda kopúl (*class of Archimedean copulas*)**

  – Všeobecný tvar: $C(x,y) = \varphi^{-1}[\varphi(x) + \varphi(y)]$, kde $\varphi : [0,1] \to [0,\infty)$ je spojitá, klesajúca, konvexná funkcia spĺňajúca $\varphi(0) = \infty$ a $\varphi(1) = 0$ [tzv. generátor]

  – Parametrické kopuly:

    1. Gumbelova kopula:

$$\varphi_\alpha(t) = (-\ln t)^\alpha, \quad \text{kde } \alpha \in [1,\infty)$$

    2. Claytonova kopula:

$$\varphi_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha}\left(t^{-\alpha} - 1\right), \quad \text{kde } \alpha \in [-1,\infty) \setminus \{0\}$$

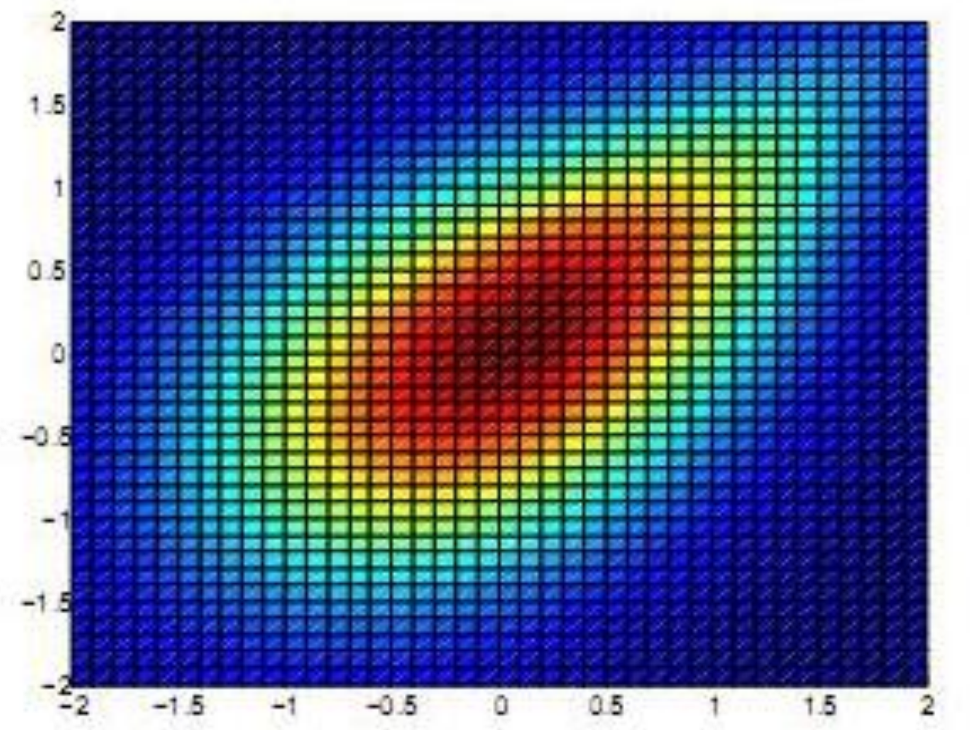
    3. Frankova kopula:

$$\varphi_\alpha(t) = -\ln \frac{e^{-\alpha t} - 1}{e^{-\alpha} - 1}, \quad \text{kde } \alpha \in (-\infty,\infty) \setminus \{0\}$$

Príklady kopúl

- **Gumbelova kopula**
- Dolná chvostová závislosť je nulová
- Horná chvostová závislosť rastie s rastúcim α

$$\lambda_u = 2 - 2^{\frac{1}{\alpha}}$$

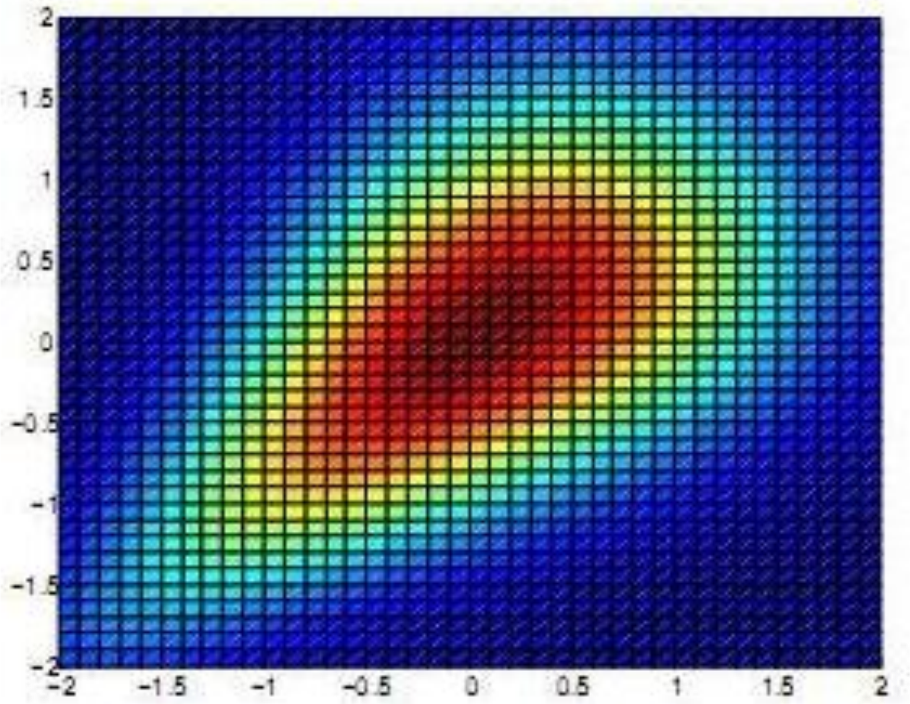


Marginálne rozdelenia: $N(0,1)$, α = 1.5

Príklady kopúl

- **Claytonova kopula**
- Horná chvostová závislosť je nulová
- Dolná chvostová závislosť rastie s rastúcim α

$$\lambda_L = 2^{-\frac{1}{\alpha}}$$



Marginálne rozdelenia: *N*(0,1), α = 1

Odhad parametrov

- Metóda maximálnej vierohodnosti

$$l(\theta_C, \theta_X, \theta_Y) = \sum_{n=1}^{N} \ln c(F(x_n; \theta_X), G(y_n; \theta_Y); \theta_C) + \sum_{n=1}^{N} \ln f(x_n; \theta_X) + \sum_{n=1}^{N} \ln g(y_n; \theta_Y)$$

  – Odhad všetkých parametrov naraz (kopula aj marginálne rozdelenia) môže byť výpočtovo náročný → dvojkrokové metódy
    1. *Interference for margins* (plne parametrická metóda)
    2. *Canonical Maximum Likelihood* (semiparametrická metóda)

- Empirická kopula

- Pomocou mier súhlasnosti

Odhad parametrov

- **Interference for margins**
  - Najprv sa nezávisle odhadnú parametre marginálnych rozdelení θ_X, θ_Y
  - S využitím týchto odhadov sa následne odhadnú parametre kopuly θ_C
  - Odhad je nevychýlený

- **Canonical Maximum Likelihood**
  - Distribučné funkcie marginálnych rozdelení sa odhadnú empiricky
  - Pomocou nich sa odhadnú parametre copuly

$$\hat{\theta}_C = \arg\max_{\theta_C} \sum_{n=1}^{N} \ln c(\hat{F}(x_n), \hat{G}(y_n), \theta_C)$$

Odhad parametrov

- **Empirická kopula**
  - Výpočet

$$C\left(\tfrac{i}{N},\tfrac{j}{N}\right)=\frac{\#\{(x,y)\,|\,x\le x_i \wedge y\le y_j\}}{N},\qquad i,j=1,\dots,N$$

  - Empirická kopula je empirická distribučná funkcia transformovaných dát, kde každému údaju priradíme jeho poradie
  - Empirická kopula rovnomerne konverguje k skutočnej kopule (Deheuvels, 1978, 1981)

Concordance measures

- Miery závislosti / súhlasnosti / zhodnosti
- ***Concordance*** = pravdepodobnosť, že náhodné vektory *X* a *Y* nadobúdajú zároveň veľké alebo zároveň malé hodnoty je vysoká, ale pravdepodobnosť veľkých hodnôt *X* spolu s malými hodnotami *Y* je nízka.

- Condordance measures
  - Kendallovo tau
  - Spearmanov koeficient
  - Korelačný (Pearsonov) koeficient
  - Tail dependence

Concordance measures

- **Kendallovo tau**
  - Definícia

$$\tau = \frac{\#\,\text{concordant pairs - }\#\,\text{discordant pairs}}{\#\,\text{total number of pairs}} \in [-1, 1]$$

  - Alternatívny zápis definície

$$\tau = P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0) - P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0)$$

  - Výpočet pomocou kopule

$$\tau = 4\,\mathrm{E}\left[C(U,V)\right] - 1$$

(U, V sú rovnomerne rozdelené na [0,1])

  - Príklad: Výpočet pre nezávislé náhodné premenné

$$\tau_{C^{\perp}} = 4 \iint_{[0,1]^2} uv\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v - 1 = 4\left(\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\right)^2 - 1 = 0$$

Concordance measures

- **Spearmanovo ρ:**
  - Definícia: Ak máme tri vektory (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3), tak Spearmonovo ρ sa vypočíta ako Kendallovo tau pre (X_1, Y_1) a (X_2, Y_3)

    [prvá dvojica má distribučnú funkciu H, druhá je nezávislá]

$$\rho = P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0) - P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0)$$

  - Alternatívna definícia: *rank correlation*

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(F_1(X), F_2(Y))}{\sqrt{\operatorname{var}(F_1(X))\operatorname{var}(F_2(Y))}}$$

  - Definícia pomocou kopule

$$\rho = 12 \iint_{[0,1]^2} C(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v - 3$$

Concordance measures

- **Korelačný (Pearsonov) koeficient**
  - Definícia

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Y)}}$$

- Korelačný koeficient nie je považovaný za mieru konkordancie!
  - Vyjadruje len lineárnu závislosť
  - Môže vyjsť nulový, aj keď náhodné premenné sú úplne závislé
    - Príklad: Pre dve lognormálne rozdelenia s štandardnými odchýlkami σ_1 = 0.4 a σ_2 = 0.6 nemôže pri žiadnej štruktúre závislostí (danej ľubovoľnou kopulou) byť mimo intervalu [-0.45, 0.57]
  - Nie je definovaný, ak neexistuje druhý moment
  - Nezávisí iba na marginálnych rozdeleniach, ale aj na kopule

Literatúra

- Cherubini, U., Luciano, E., Vecchiao, W. (2004): Copula Methods in Finance, John Wiley & Sons, Ltd