Value at Risk

VaR pre portfólio

N – počet aktív v portfóliu (i = 1,..., N)

T – dnešný deň

P^i_t – cena aktíva i v čase t

$$P_t^i = f^i(t, R_t^{i,1}, \ldots, R_t^{i,M_i})$$

P_T – hodnota portfólia

$$P_T = \sum_{i=1}^{N} w_i P_T^i,$$

Historická simulácia

1. Calculate daily relative changes for each risk factor:

$$r_t^{i,j} = \ln \frac{R_t^{i,j}}{R_{t-1}^{i,j}}.$$

2. Calculate "hypothetical" scenarios for tomorrow values of all risk factors based on the relative changes in the past:

$$\tilde{R}_{T+1,s}^{i,j} := R_T^{i,j}\, r_{T-s}^{i,j}, \qquad s = 0, \ldots, n-2. \tag{2.1}$$

3. For each scenario, calculate "hypothetical" tomorrow prices of each financial instrument

$$\tilde{P}_{T+1,s}^{i} = f^{\,i}\left(T+1, \tilde{R}_{T+1,s}^{i,1}, \ldots, \tilde{R}_{T+1,s}^{i,M_i}\right).$$

4. For each scenario, calculate "hypothetical" tomorrow value of whole portfolio as a weighted average of the prices of individual instruments:

$$P_{T+1,s} = \sum_{i=1}^{N} w_i P_{T+1,s}^{i}$$

Historická simulácia

5. For each scenario, calculate the 1-day change in the price of the portfolio:

$$\frac{P_{T+1,s}}{P_T}.$$

   These values represent the P&L distribution which should be used to calculate the respective quantile.

Variačno-kovariačná metóda

Scenarios are generated from multinomial normal distribution

$$\tilde{R}^{i,j}_{T+1,s} := R^{i,j}_T \, r^{i,j}_s, \qquad s = 0, \ldots, n-2,$$

where the k random vectors $(r^1_s, \ldots, r^M_s)$, $s = 0, \ldots, k-1$ represents independent draws from the multivariate normal distribution $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ and M denotes the total number of risk factors.

Multivariate GARCH:

CCC-GARCH model has the following form:

$$r_t = c + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim N(0, \Sigma_t),$$

$$\Sigma_t = \mathrm{diag}(\sigma_t) R \,\mathrm{diag}(\sigma_t),$$
$$(\sigma_t^i)^2 = \omega_i + \beta_i (\sigma_{t-1}^i)^2 + \alpha_i (\varepsilon_{t-1}^i)^2,$$

where R is the (stationary) correlation matrix. This matrix is computed as the (unconditional) variance-covariance matrix of standardised residuals.

Hence, another form of the model has been proposed. It is so-called BEKK-GARCH(1,1) model:

$$\Sigma_t = C^\top C + A^\top \Sigma_{t-1} A + B^\top \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}^\top B,$$

where A, B and C are $N \times N$ square matrices of parameters and C is an upper triangular matrix. By the construction, the model ensures that the covariance matrix is always positively semi-definite.

VaR -využitie

- Regulatórne účely: Výpočet výšky vlastných zdrojov pre krytie trhových rizík (č. 364 nariadenia EÚ 575/2013)

$$MRC = \max\left\{ \mathrm{VaR}_t^{10}(99\%), \frac{m_c}{60}\sum_{i=1}^{60} \mathrm{VaR}_{t-i}^{10}(99\%) \right\} +$$

$$+ \max\left\{ \mathrm{sVaR}_t^{10}(99\%), \frac{m_s}{60}\sum_{i=1}^{60} \mathrm{sVaR}_{t-i}^{10}(99\%) \right\},$$

- Umožňuje hodnotiť rizikovosť celého portfólia

- Limity pre dealerov, hodnotenie ich úspešnosti

VaR – problémy a kritika

- VaR nedáva informáciu, čo sa deje po prekročení straty zodpovedajúcej VaR
  - Motivuje k štruktúre portfólia, ktorá je vysoko riziková ale toto riziko je veľmi nepravdepodobné
  - Vylepšenie: expected shortfall = podmienená stredná hodnota pri prekročení VaR

$$ES_t^d(1-\alpha) = -E\left[r_t^d \,|\, r_t^d \leq -\mathrm{VaR}_t^d(1-\alpha)\right]$$

- Problém časového škálovania:
  - Násobenie odmocninou je OK, ak výnosy sledujú geometrickú náhodnú prechádzku a očakávaný výnos je 0

VaR (d dní) = $\sqrt{d}$ VaR (1 deň)

VaR – problémy a kritika

- VaR nie je subaditívna miera rizika!!
  - Od „rozumnej“ miery rizika by sme očakávali, že súčet rizika dvoch samostatných portfólií neprekročí riziko spojeného portfólia (efekt diverzifikácie)

- Kontrapríklad:
  - 2 aktíva (X a Y), každé má výnos 0 % s pravdepodobnosťou 99,1 % a výnos – 10 % s pravdepodobnosťou 0,9 %.
  - 99%-né VaR pre každé aktívum samostatne je 0.
  - Ak uvažujeme kombinované portfólio (X + Y), straty sú:
    - 10 % s pravdepodobnosťou 0,0081 %
    - 5 % s pravdepodobnosťou 1,7838 % = 2*0,009*0,991
    - 0 s pravdepodobnosťou 98,2081 %
  - 99 %-né VaR pre kombinované portfólio je 10 %.

Backtesting

- Backtesting (spätné testovanie) = posúdenie kvality VaR modelu na základe údajov o prekročeniach VaR z minulosti

- Aplikácia: Posúdenie žiadosti banky pre využívanie interného modelu pre výpočet objemu interného kapitálu na krytie trhového rizika

- Základné vlastnosti, ktoré by mal mať VaR model:
  - Vlastnosť správneho nepodmieneného pokrytia (Unconditional Coverage Property)
  - Vlastnosť nezávislosti (Independence Property)

- Základné testy:
  - Regulatórny test
  - Kupiecov POF test (POF = Proportion of failures)
  - Christoffersenov test

Backtesting – regulatórny test

- Čl. 366 nariadenia 575 / 2013
- Na základe spätného testovania sa určuje multiplikačný koeficient m_s a m_c pri výpočte kapitálu na trhové riziko (market risk capital, MRC)

$$MRC = \max\left\{\mathrm{VaR}_t^{10}(99\%), \frac{m_c}{60}\sum_{i=1}^{60}\mathrm{VaR}_{t-i}^{10}(99\%)\right\} +$$

$$+ \max\left\{\mathrm{sVaR}_t^{10}(99\%), \frac{m_s}{60}\sum_{i=1}^{60}\mathrm{sVaR}_{t-i}^{10}(99\%)\right\},$$

- m závisí od počtu prekročení *K* za posledný rok (cca 250 pracovných dní): m = 3 + „plus faktor"

Počet prekročení	Plus faktor
menej ako 5	0,00
5	0,40
6	0,50
7	0,65
8	0,75
9	0,85
10 a viac	1,00

Backtesting – Kupiecov POF test

- Nulová hypotéza: Skutočná relatívna početnosť prekročení *q* zodpovedá stanovenej úrovni pravdepodobnosti *p*
- Likelihood ratio test:

$$LR = -2\,(\ln L(K,N,p) - \ln L(K,N,q))$$

kde *K* je počet prekročení za *N* dní

L je funkcia vierohodnosti binomického rozdelenia, t.j.

$$L(K,N,\theta) = \binom{N}{K} \theta^{K} (1-\theta)^{N-K}$$

- Štatistika *LR* má asymptoticky chí-kvadrát rozdelenie s 1 stupňom voľnosti
- Nevýhoda: Test hodnotí iba vlastnosť správneho nepodmieneného pokrytia

- KUPIEC, N. H. : Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models, Journal of Derivatives, Vol. 3, No. 2, 1995

Backtesting – Christoffersenov test (1)

- Testuje obe vlastnosti (správny počet výnimiek aj ich nezávislosť)
- Testovacia štatistika: $LR_{ch} = LR_{pof} + LR_{ind}$
- LR_{pof} - Kupiecov POF test
- LR_{ind} - test H_0: „výnimky sú nezávislé“

$$LR_{ind} = -2\ln\left(\frac{(1-q)^{N_{00}+N_{10}}\, q^{N_{01}+N_{11}}}{(1-q_{01})^{N_{00}}(1-q_{11})^{N_{10}}\left(q_{01}\right)^{N_{01}}\left(q_{11}\right)^{N_{11}}}\right)$$

N_{01} – počet dní s prekročením nasledujúcich po dni bez prekročenia
N_{11} – počet dní s prekročením nasledujúcich po dni s prekročením
N_{00} – počet dní bez prekročenia nasledujúcich po dni bez prekročenia
N_{10} – počet dní bez prekročenia nasledujúcich po dni s prekročením
q_{01} – relatívna početnosť prekročení v prípade, že pred ním nenastalo prekročenie
q_{11} – relatívna početnosť prekročení v prípade, že pred ním nastalo prekročenie

$q_{01} = N_{01} / (N_{00} + N_{01})$ $q_{11} = N_{11} / (N_{10} + N_{11})$ $q = (N_{01} + N_{11}) / (N_{00} + N_{01} + N_{10} + N_{11})$

Backtesting – Christoffersenov test (2)

$$LR_{ind} = -2\ln\left(\frac{(1-q)^{N_{00}+N_{10}}\, q^{N_{01}+N_{11}}}{(1-q_{01})^{N_{00}}(1-q_{11})^{N_{10}}\left(q_{01}\right)^{N_{01}}\left(q_{11}\right)^{N_{11}}}\right)$$

- Za predpokladu H_0 by malo platiť $q_{01} = q_{11}$
- $LR_{ch} = LR_{pof} + LR_{ind}$ má asymptoticky chí-kvadrát rozdelenie s 2 stupňami voľnosti
- CHRISTOFFERSEN, P. F. : Evaluating Interval Forecasts, Internal Economic Review, Vol. 39, No. 4, November 1998