

Modely založené na kombinácii normálnych rozdelení

Motivácia

- Úloha: Navrhnite stresové scenáre pre pohyby výmenných kurzov CZK / EUR a PLN / EUR s využitím historických údajov
- Myšlienka: Zistiť štatistické vlastnosti v turbulentných obdobiach
- Problém: V čase výrazných pohybov rastie nie len volatilita, ale často sa zvyšuje aj korelácia

Základná myšlienka

- Predpoklady:
 - Údaje sú generované z dvoch rozdelení („pokojné“ a „hektické“)
 - Tieto rozdelenia sú normálne
 - Každé rozdelenie má istú pravdepodobnosť
- Vypočítame podmienenú koreláciu časových radov za predpokladu, že jeden z nich bol generovaný z hektického obdobia (resp. z hektického rozdelenia)
 - Využijeme, že pre každý údaj vieme vypočítať pravdepodobnosť, že je z hektického obdobia
 - hektické obdobia nie sú definované apriori na základe nejakých vlastností!

Formulácia modelu

- Predpoklajme, že jeden z výmenných kurzov je „hlavný“
 - Jeho relatívne zmeny (výnosy) označme x_t
- Formulácia modelu pre tento kurz:

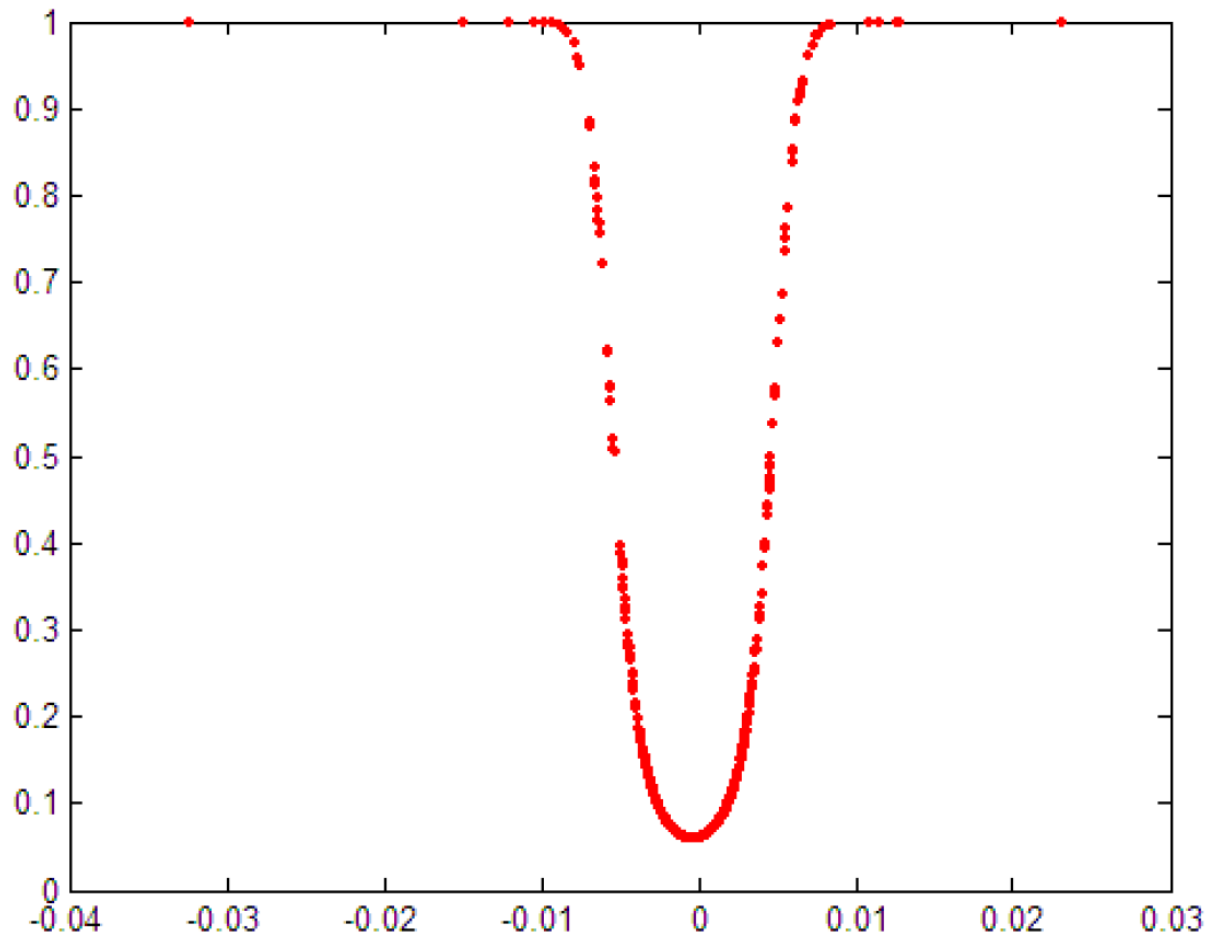
$$\ln \left(\frac{x_t}{x_{t-1}} \right) \sim \begin{cases} \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2) & \text{s pravdepodobnosťou } 1 - \omega \text{ pokojného obdobia} \\ \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2) & \text{s pravdepodobnosťou } \omega \text{ hektického obdobia.} \end{cases}$$

- Pravdepodobnosť, že údaj pochádza z hektického obdobia
 - Podmienená pravdepodobnosť, že údaj je z hektického obdobia za predpokladu, že nastal (Bayesov vzorec)

$$H(x_t) = \frac{\omega f(x_t | \mu_2, \sigma_2^2)}{(1 - \omega) f(x_t | \mu_1, \sigma_1^2) + \omega f(x_t | \mu_2, \sigma_2^2)}$$

Formulácia modelu

- Pravdepodobnosť $H(x_t)$, že údaj pochádza z hektického rozdelenia:



Aplikácia modelu

- Predpokladajme, že určíme scenár pre zmenu hlavného kurzu. Ako vypočítať zmeny v ostatných kurzoch (označme y_t)?

$$\omega = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n H(x_t).$$

$$\mu_{y_2} = \frac{\sum_{t=1}^n H(x_t) y_t}{\sum_{t=1}^n H(x_t)}.$$

$$\sigma_{y_2} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n H(x_t) (y_t - \mu_{y_2})^2}{\sum_{t=1}^n H(x_t)}}.$$

$$\rho_2 = \frac{\sum_{t=1}^n H(x_t) (x_t - \mu_{x_2}) (y_t - \mu_{y_2})}{\sigma_{x_2} \sigma_{y_2} \sum_{t=1}^n H(x_t)}$$

Aplikácia modelu

- Ak poznáme stredné hodnoty a volatility hlavného aj vedľajších kurzov a korelácie medzi nimi, hodnoty pre stresové scenáre vypočítame nasledovne:

$$\left(\frac{y_t - \mu_y}{\sigma_y} \right) = \rho \left(\frac{x_t - \mu_x}{\sigma_x} \right) + \sqrt{(1 - \rho^2)} \varepsilon_t$$

Odhad parametrov modelu

- Metóda maximálnej vierohodnosti (MLE)

Funkcia hustoty nového zloženia dvoch rozdelení s istou pravdepodobnosťou bude vyzeráť nasledovne:

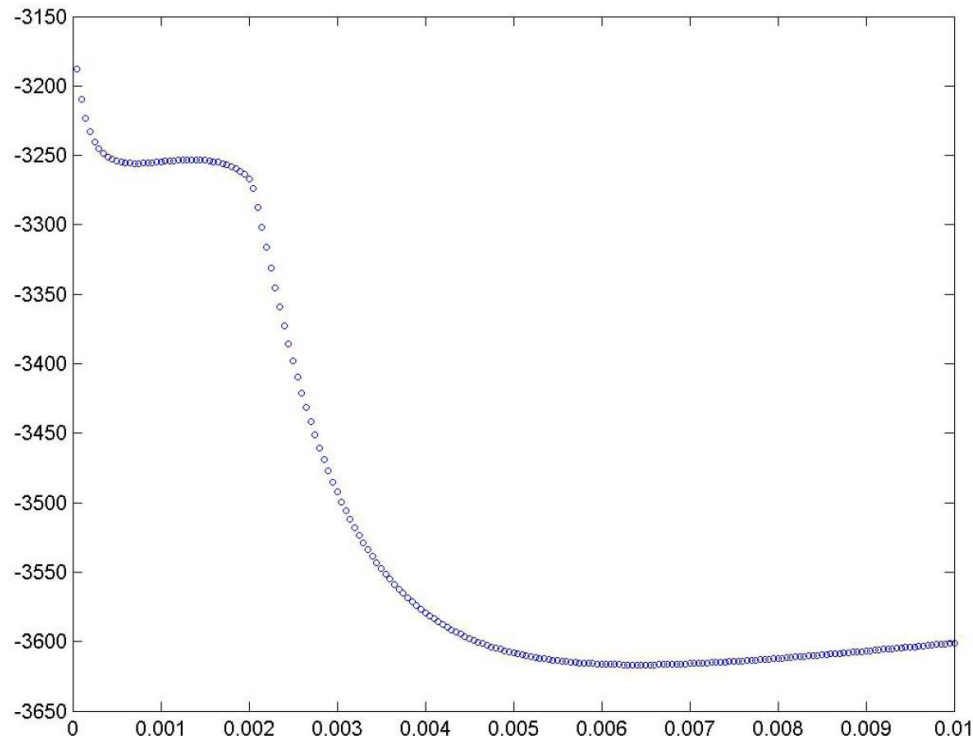
$$f(x_i, (\mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2, \omega)) = (1 - \omega) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{(x_i - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} + \omega \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{(x_i - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}. \quad (4)$$

Logaritmická funkcia vierohodnosti bude teda funkciou piatich parametrov v tvare

$$\ln L(\mathbf{x}, (\mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2, \omega)) = \ln \prod_{i=1}^n f(x_i, (\mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2, \omega)) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i, (\mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2, \omega)). \quad (5)$$

Odhad parametrov modelu

- V práci Potisková (2007) bola využitá metóda simulovaného žihania (stochastická optimalizačná metóda)
- Problém s nekonvexnosťou funkcie vierohodnosti v parametri σ_2



Iný prístup

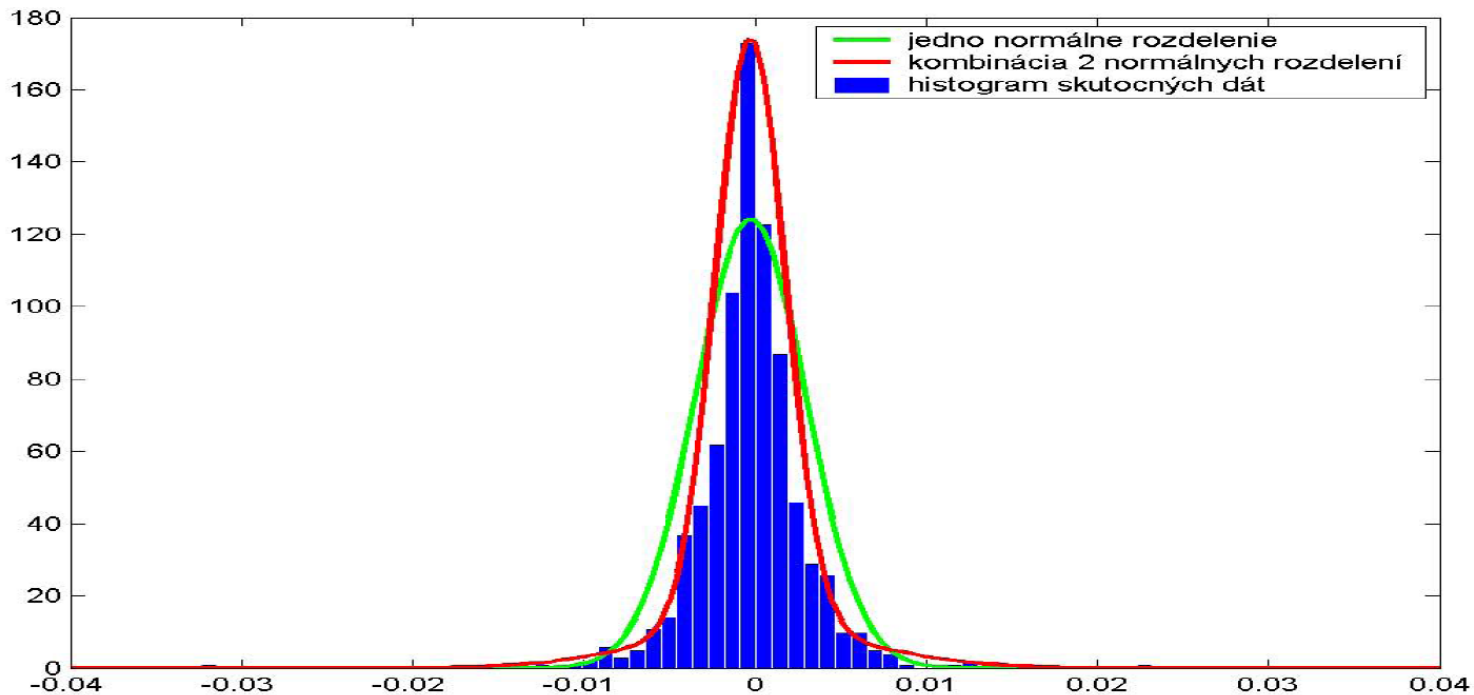
- Model založený na kombinácii dvoch viacrozmerných rozdelení, napr.

$$\left[\ln \left(\frac{x_t}{x_{t-1}} \right), \ln \left(\frac{y_t}{y_{t-1}} \right) \right] \sim \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{N} \left[\begin{pmatrix} \mu_{x_1} \\ \mu_{y_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1} \rho_1 \sigma_{y_1} \\ \sigma_{x_1} \rho_1 \sigma_{y_1} & \sigma_{y_1}^2 \end{pmatrix} \right] \\ \text{s pravdepodobnosťou } 1 - \omega \text{ pokojného obdobia} \\ \\ \mathcal{N} \left[\begin{pmatrix} \mu_{x_2} \\ \mu_{y_2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{x_2}^2 & \sigma_{x_2} \rho_2 \sigma_{y_2} \\ \sigma_{x_2} \rho_2 \sigma_{y_2} & \sigma_{y_2}^2 \end{pmatrix} \right] \\ \text{s pravdepodobnosťou } \omega \text{ hektického obdobia.} \end{array} \right.$$

- Problém: 11 parametrov!

Kvalita modelu

Porovnanie empirickej hustoty a hustoty implikovanej modelom



Zdroj: Potisková, L. (2007)

Štatistický test, či je potrebný model založený na kombinácii dvoch (prípadne viacerých rozdelení): likelihood ratio test

Literatúra

- Kim, J. – Finger, Ch. C. (2000): A Stress Test to Incorporate Correlation Breakdown, RiskMetrics Journal, Volume 1
- Aplikácia pre stresové testovanie devízového rizika v NBS:
Jurča, P. – Rychtárik, Š. (2006): Stresové testovanie slovenského bankového sektora, Bankový časopis BIATEC, Vol. XIV, No. 4, Národná banka Slovenska
- Bakalárska práca Lucie Potiskovej (2007): Stresové testovanie s využitím modelu založenom na kombinácii normálnych rozdelení