Teória extrémnych hodnôt

Motivácia

- Ako súvisia holandské protipovodňové hrádze s bankovou reguláciou?
- Pri snahe o odhad celého rozdelenia strát sa sústredíme na centrálnu časť rozdelenia, význam chvostov je podhodnotený
- V manažmente rizík nás zaujímajú práve udalosti na chvoste („low probability, large impact“)
  - Ťažké chvosty = Súčet náhodných premenných je na chvostoch úplne determinovaný jediným outlierom:
- Údajov na chvoste je málo, ale je možné využiť asymptotické vlastnosti chvostov (analógia centrálnej limitnej vety)
- Rozdelenie na chvostoch môže nadobúdať iba tri typy:
  - Žiadny chvost (distribučná funkcia je useknutá)
  - Exponenciálna funkcia
  - Mocninová funkcia

Čo hovoria dáta

- Na prvej prednáške sme si ukázali, že výnos akciového indexu je lepšie modelovať Studentovým *t*-rozdelením s 3 stupňami voľnosti ako normálnym rozdelením

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{a\pi}} \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{a}\right)^{\frac{a+1}{2}}} \sim \text{const } x^{-a-1}$$

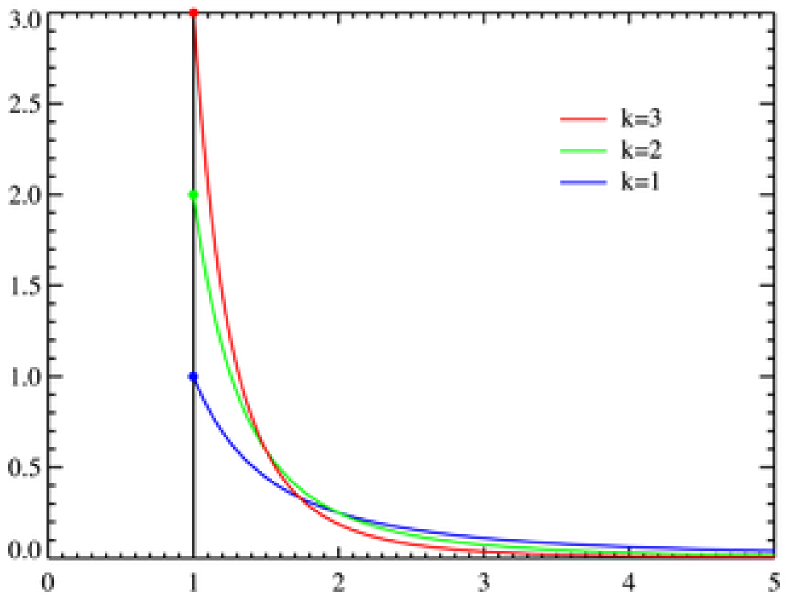
Paretovo rozdelenie

- Taliansky ekonóm Vilfredo Pareto (1964)
- Definícia

$$\Pr(X \leq x) = \begin{cases} 1 - x^{-\alpha} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$$

- Aplikácie
  - Veľkosť sídiel
  - Veľkosť meteoritov
  - Množstvo ropných zásob v ropných poliach
  - Najväčší jednodenný úhrn zrážok v roku
  - Počet postihnutých ha lesa pri požiari
  - ...
  - Jednodenné výnosy akcií
- Ak α = 2, rozdelenie má nekonečnú varianciu. Čo to znamená v praxi?

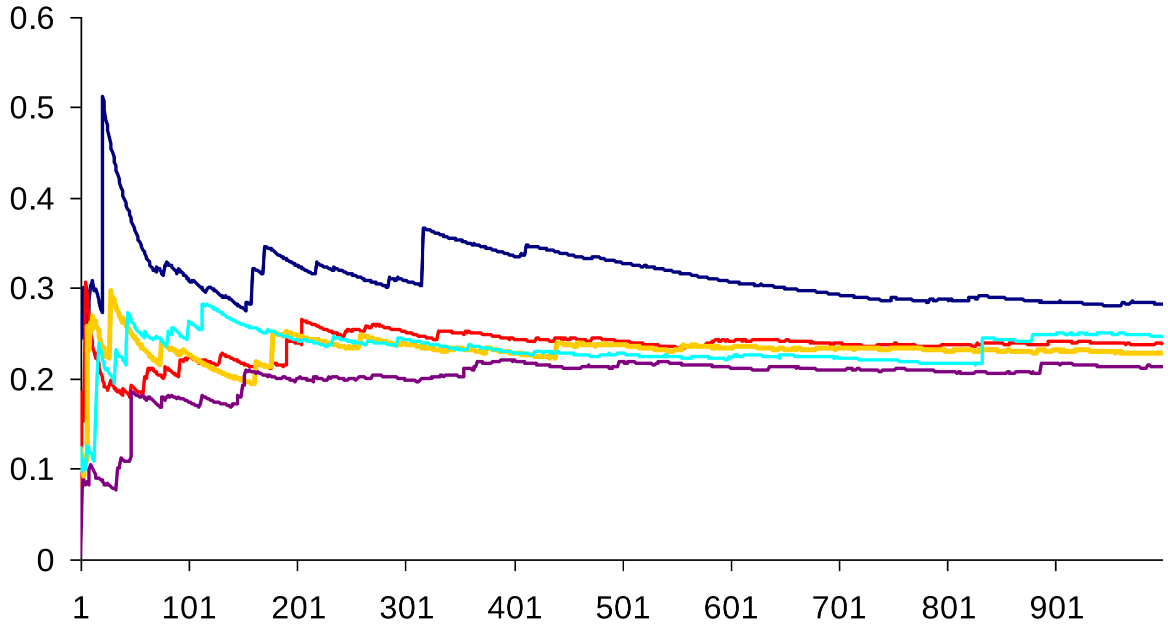
Hustota Paretovho rozdelenia s parametrom k



Paretovo rozdelenie

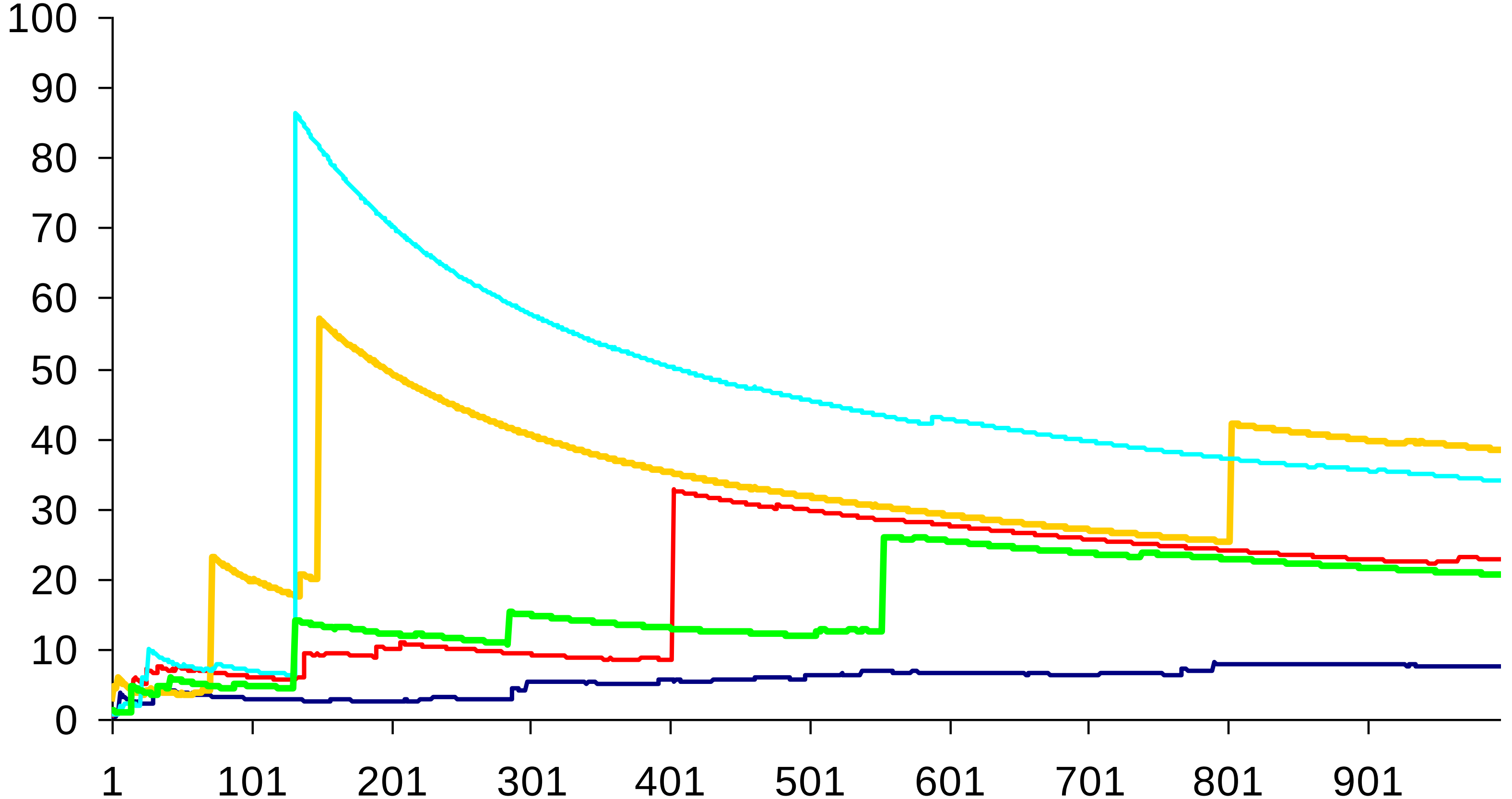
- Vygenerujem dáta z Paretovho rozdelenia
- Vypočítam kumulatívnu volatilitu σ_k z údajov X_1, ..., X_k pre k = 1, ..., n

- Graf σ_k pre k = 1, ..., n s parametrom α = 6 (teoretická hodnota σ = 0.24)



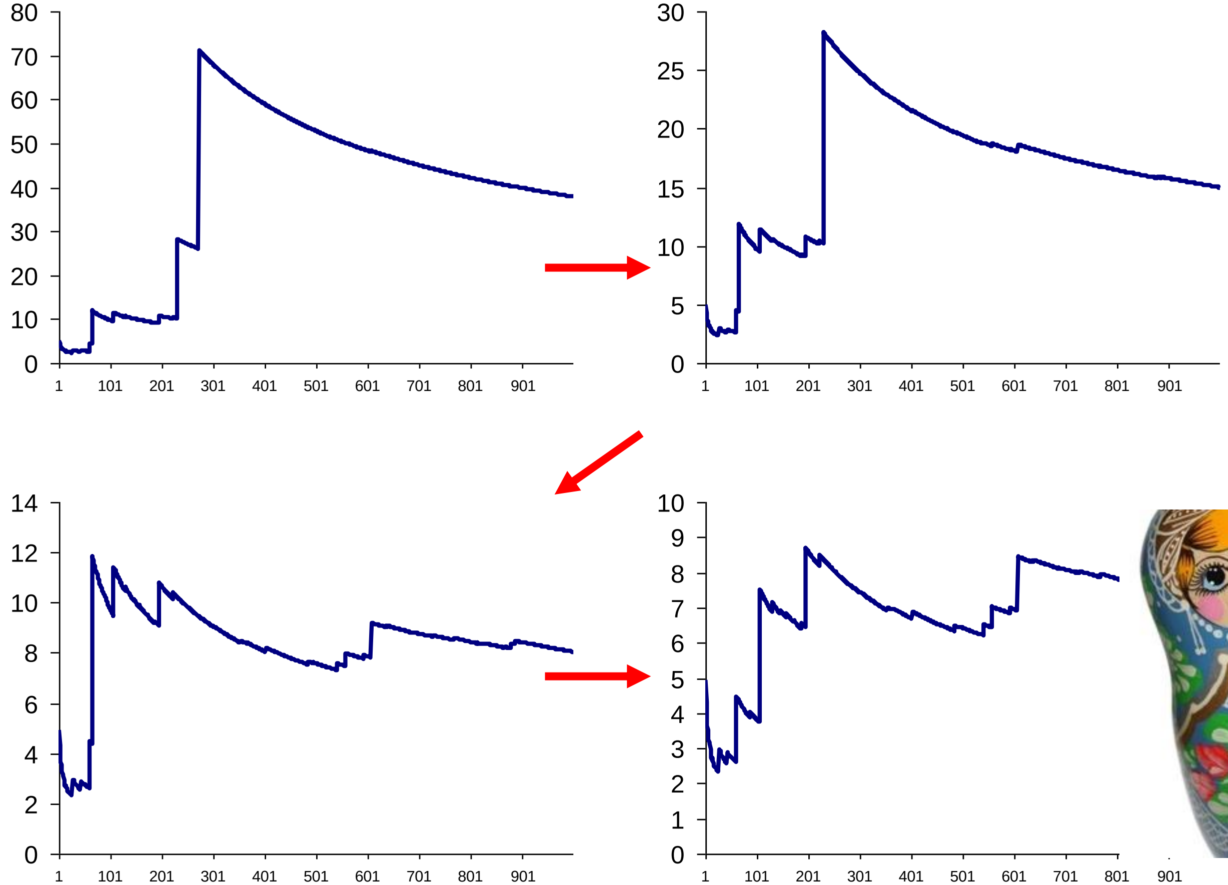
Paretovo rozdelenie

- Rôzne priebehy kumulatívnej volatility pre parameter $\alpha = 1.2$ (teoretická volatilita neexistuje)



Paretovo rozdelenie

- Ak druhý moment neexistuje, kumulatívna volatilita vykazuje fraktálne správanie
  - Ak vynecháme najväčšie pozorovanie, charakter grafu sa nezmení



Zovšeobecnené Paretovo rozdelenie

- Distribučná funkcia Zovšeobecneného Paretovho rozdelenia (*Generalized Pareto Distribution* – GPD)

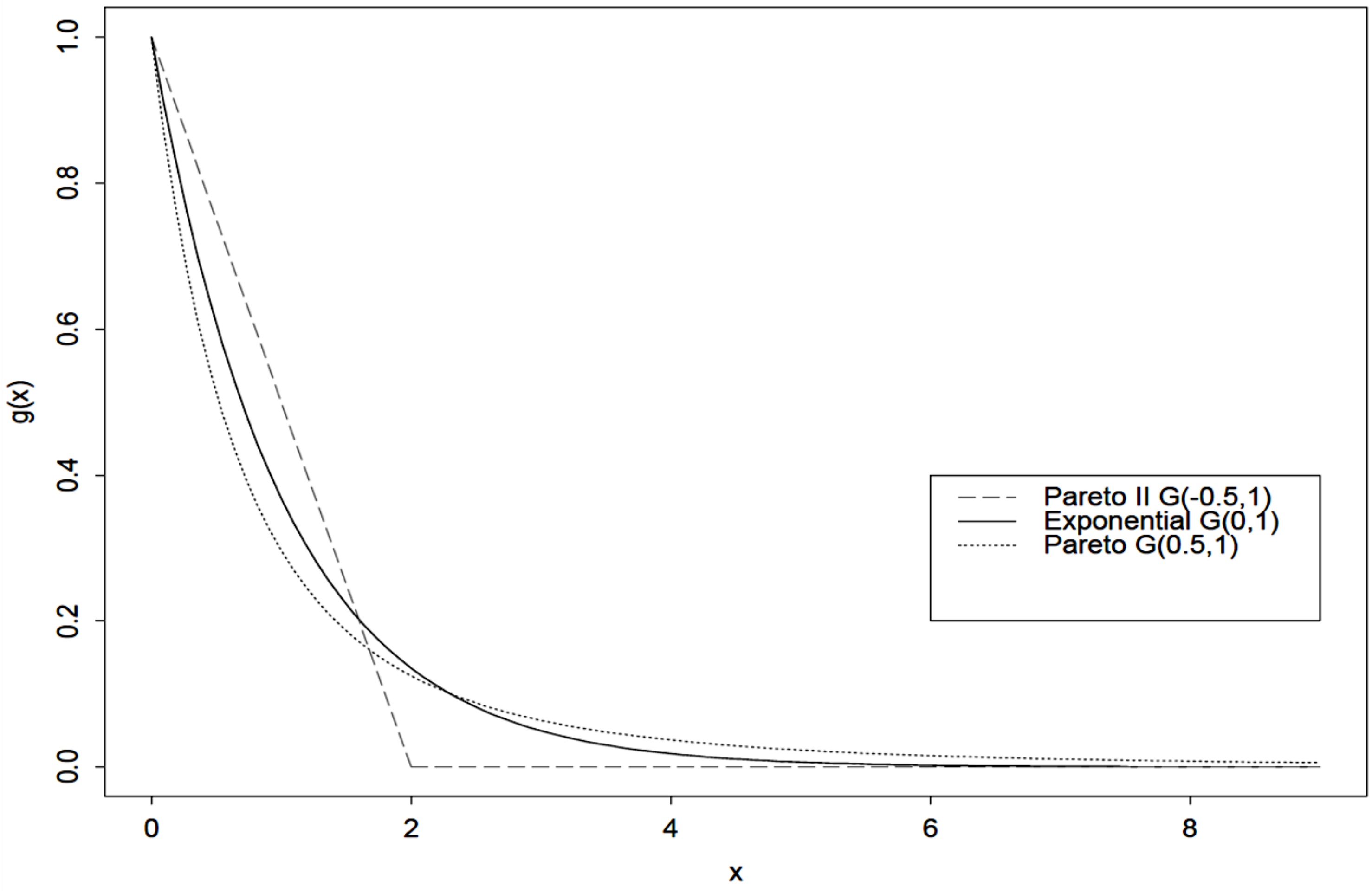
$$G_{\xi,\beta}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x/\beta)^{-1/\xi} & \xi \neq 0\,, \\ 1 - \exp(-x/\beta) & \xi = 0\,, \end{cases}$$

- Parameter ξ = *shape parameter*:
  - Pre $\xi > 0$ je to rozdelenie s ťažkými chvostami (Paretovo s $\alpha = 1/\xi$)
  - k-ty moment neexistuje pre $k \geq 1/\xi$
  - Pre $\xi = 0$ je to exponenciálne rozdelenie
  - Pre $\xi < 0$ ide o rozdelenie na ohraničenom intervale $[0, -\beta/\xi]$
    (tzv. Pareto type II distribution)

- Parameter $\alpha = 1/\xi$ sa nazýva *tail index*

Zovšeobecnené Paretovo rozdelenie

- Hustota GPD



Peaks over threshold

- GPD sa používa na modelovanie chvostov rozdelenia, t.j. pre dáta prekračujúce istú hranicu (*peaks over threshold*), pričom sa modeluje veľkosť tohto prekročenia

- Excess distribution (*u* = threshold):

$$F_u(x) = P(X - u \le x \mid X > u) = \frac{P(X - u \le x \wedge X > u)}{P(X > u)} = \frac{F(x+u) - F(u)}{1 - F(u)}$$

(rozdelenie veľkostí prekročenia nad prahovou hodnotou *u* za predpokladu, že dôjde k jej prekročeniu)

GDP je dobrá aproximácia

Veta [Balkema and de Haan, 1974, Pickands, 1975]:
Pre veľkú triedu rozdelení možno nájsť takú funkciu β(u), že platí

$$\lim_{u \to x_F} \sup_{0 \leqslant x < x_F - u} |F_u(x) - G_{\xi,\beta(u)}(x)| = 0$$

Označenie:

- x_F = pravý krajný bod rozdelenia
- u = threshold
- F_u = excess distribution function

Táto trieda rozdelení zahŕňa všetky štandardné rozdelenia (normálne, lognorm., chí-kvadrát, t, F, beta, gamma, exp., rovnomerné...)

Interpretácia: Podmienené rozdelenie veľkostí prekročenia nad prahovou hodnotou možno „asymptoticky“ modelovať pomocou GPD

Peaks over threshold

- Otázky:
  - Ako tieto výsledky môžem využiť v praxi (napr. pri výpočte VaR)?
  - Ako zistiť, či je takýto model pre moje dáta dobrý?
  - Ako mám odhadnúť parametre (ξ, β)?
  - Ako mám nastaviť threshold (u)?

Výpočet VaR pomocou GPD

- Predpokladajme, že poznáme hodnoty oboch parametrov (*ξ, β*) aj prahovú hodnotu (u)
- Označme x veľkosť prekročenia nad prahovou hodnotou (pokiaľ k takémuto prekročeniu dôjde)
- Potom platí:

$$GPD(x) \approx F_u(x) = \frac{F(x+u) - F(u)}{1 - F(u)}, \quad \text{kde } F(u) = \frac{N - N_u}{N}, N_u = pocet\ prekroceni$$

$$F(x+u) = (1 - F(u))GPD(x) + F(u) = \frac{N_u}{N} GPD(x) + \frac{N - N_u}{N}$$

$$\text{Ak položíme } F(x_\alpha + u) = \alpha \Rightarrow x_\alpha = GDP^{-1}\left((\alpha - 1)\frac{N}{N_u} - 1 \right) = \frac{\beta}{\xi}\left[\left((1-\alpha)\frac{N}{N_u} \right)^{-\xi} - 1 \right]$$

- Preto $\boxed{VaR_\alpha = u + x_\alpha = u + \frac{\beta}{\xi}\left[\left((1-\alpha)\frac{N}{N_u} \right)^{-\xi} - 1 \right]}$

Mean excess function

- Mean excess function vyjadruje priemernú podmienenú veľkosť prekročenia nad prahovou hodnotou (za predpokladu, že k prekročeniu došlo):

$$e_u(x) = E(X - u \mid X > u)$$

- Túto funkciu možno využiť:
  - Na overenie správnosti modelu
  - Na odhad prahovej hodnoty

Mean excess function

- Pre GPD je charakteristické, že $e_u(x)$ je lineárna v u:

$$e_u^{GPD_{\xi,\beta}}(x) = E(X - u \mid X > u) = \frac{\beta + \xi u}{1 - \xi}$$

- Empirický výpočet:

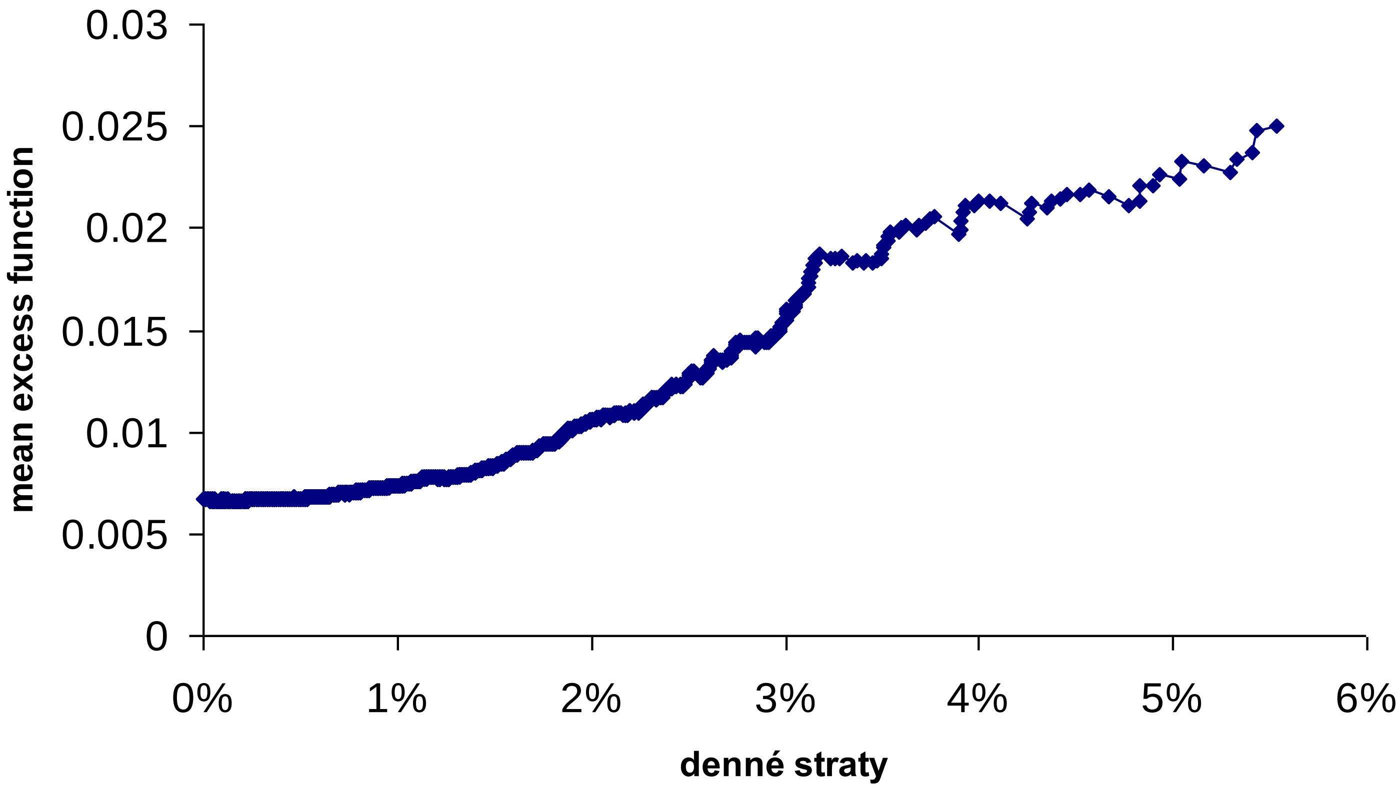
$$e^{EMP}(u) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \max(X_i - u, 0)}{\sum_{i=1}^{n} I_{\{X_i > u\}}}$$

- <u>Overenie modelu:</u> Pre dosť veľké u by mala byť táto funkcia približne lineárna (sklon závisí od shape parametra)

- <u>Určenie prahovej hodnoty:</u> Vykreslíme graf (X_i, $e^{EMP}(X_i)$) a zvolíme $u = X_i$, od ktorého je graf približne lineárny (tzv. sample mean excess plot)

Mean excess function

- Mean excess plot pre denné straty S&P 500, 1950-2011 (posledných 0.25% dát bolo vynechaných kvôli nestabilite odhadov)
- Ukazuje na prahovú hodnotu cca 3.2 % (= 99 %-ný kvantil)



Metódy odhadu

- **<u>Maximum likelihood</u>**
  - Odhad štandardnej odchýlky odhadov (intervaly spoľahlivosti)
  - Možnosť štatistického testovania, či ide o rozdelenie s ťažkými chvostami
  - Jednoduchá implementácia v Matlabe

```
q = quantile(losses,.95); % 95% quantile
y = losses(losses>q) - q; % exceedances

[parameters,confidence_interval]=gpfit(y);
xi=parameters(1)     % shape parameter
alpha=1/xi           % tail index
beta=parameters(2)   % scale parameter
```

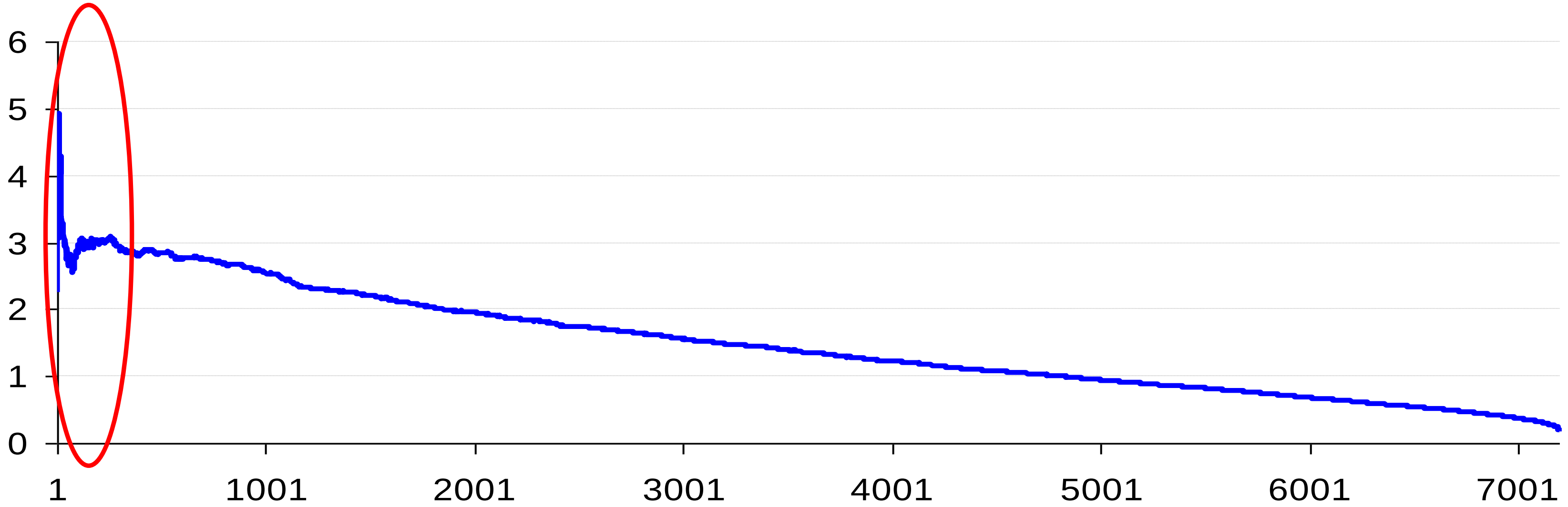
- **<u>Hill estimator</u>**
  - Odhad iba parametra α, nie parametra β
  - Na výpočet VaR to postačuje
  - Výpočet je jednoduchý, implementovateľný v Exceli!

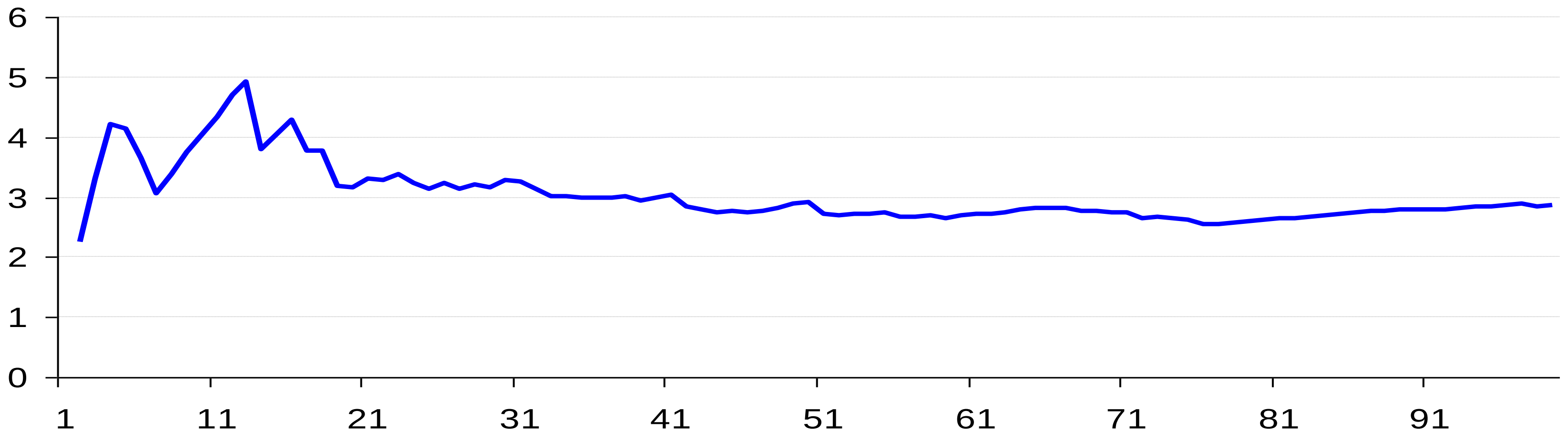
Hill estimator

- Alternatívna metóda odhadu parametra α
- Vychádza z ML odhadu mocninového koeficientu hustoty Paretovho rozdelenia
- Distribučná funkcia Paretovho rozdelenia: $F(x) = 1 – cx^{-\alpha}$
- Podmienená distribučná funkcia: $F(x \mid x>u) = F(x)/(1 – F(u)) = (1 – cx^{-\alpha}) / (cu^{-\alpha})$
- Podmienená hustota: $f(x \mid x>u) = \alpha\, x^{-\alpha-1}\, u^{\alpha} = \alpha\, (x/u)^{-\alpha}\, x^{-1}$
- ML odhad parametra α: $\dfrac{\partial \ln f}{\partial \alpha} = \dfrac{1}{\alpha} - \ln\dfrac{x}{u} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{\hat{\alpha}^{(k)}} = \dfrac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \ln\dfrac{X_{(i)}}{u}$
- ($X_{(1)}$, $X_{(2)}$, ... sú usporiadané hodnoty X_1, X_2, ...)
- Prahovú hodnotu zvolíme tak, aby bol od nej odhad $\alpha(k)$ na nejakom intervale stabilný

Hill estimator

- Odhad parametra α pomocou Hillovho estimátora (S&P 500, 1950-2011)





Pravidlá konvolúcie

- Konvolúcia: P(X + Y > t) = ?
- Feller convolution theorem:
  Ak X a Y majú Paretovo rozdelenie (i.i.d.), tak pre t dostatočné veľké platí

$$P(X+Y>t) \approx 2At^{-\alpha} = 2P(X>t)$$

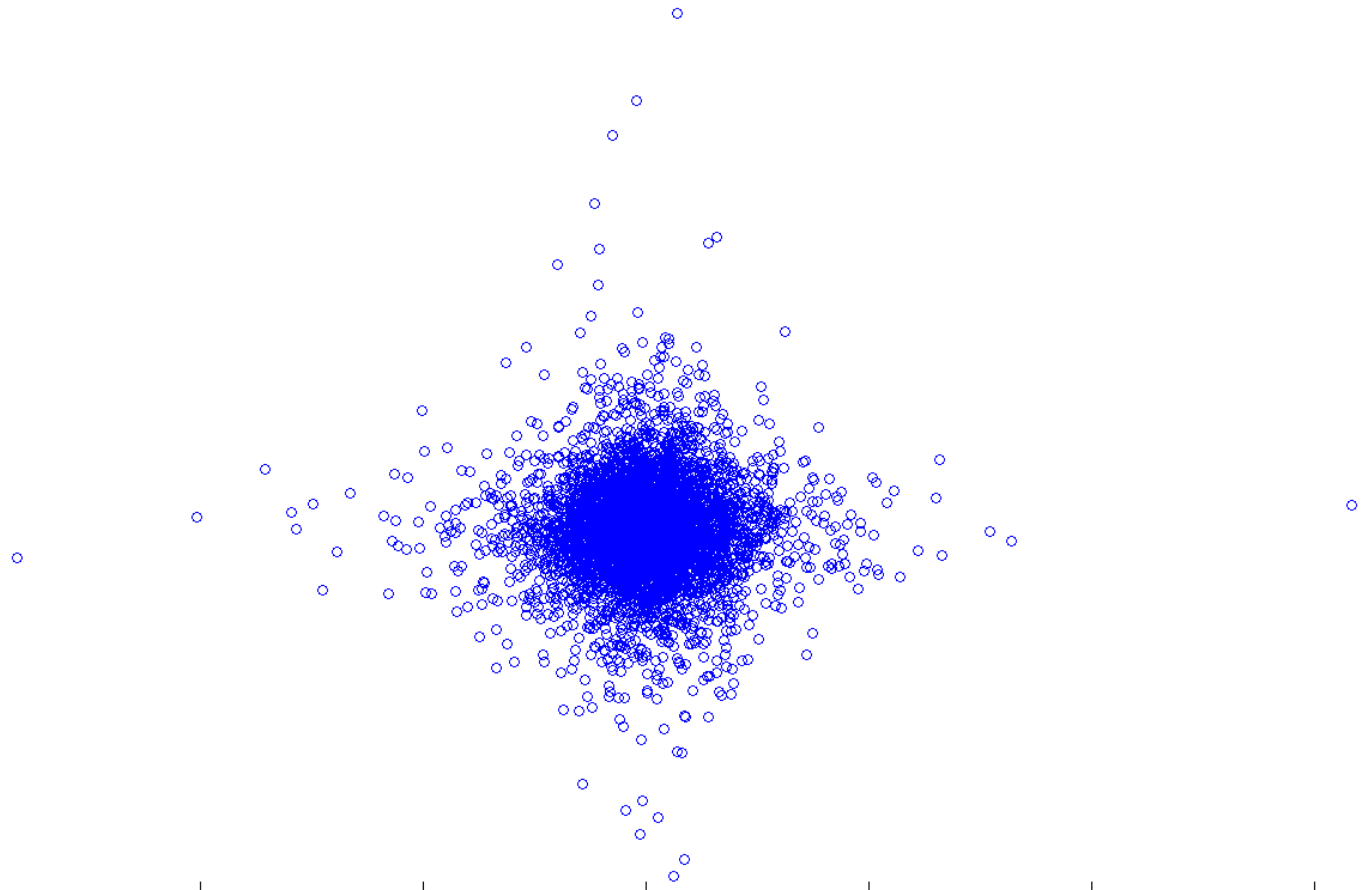
- Náčrt dôkazu:

$$P(X+Y>t) \geq 1-P(X \leq t, Y \leq t) = 1-(1-At^{-\alpha})^2 = 2At^{-\alpha} - A^2 t^{-2\alpha}$$

- Interpretácia: Dôležité sú iba dáta popri osiach, priestor medzi nimi je „málo hustý“

Pravidlá konvolúcie

- Scatter Plot pre realizácie dvoch nezávislých náhodných premenných so Studentovým t-rozdelením so 4 stupňami voľnosti (5000 realizácií)



Pravidlá konvolúcie

- Aplikácia pre risk manažment:

  Ak VaR(*n*) označíme ako VaR s holding period *n* pracovných dní, tak za predpokladu konštantnej úrovne pravdepodobnosti a v čase nezávislých strát platí

$$\boxed{VaR(n) = n^{\frac{1}{\alpha}} VaR(1)}$$

  kde *α* > 2 je tail index.

- Dôkaz:

$$P(X > VaR(1)) = AVaR(1)^{-\alpha} = p$$

$$P(nX > VaR(n)) = nAVaR(n)^{-\alpha} = p$$

$$\Rightarrow AVaR(1)^{-\alpha} = nAVaR(n)^{-\alpha}$$

$$\Rightarrow VaR(n) = n^{\frac{1}{\alpha}} VaR(1)$$

- Dôsledok: Škálovací faktor je menší ako vyplýva z pravidla druhej odmocniny.

Klasická EVT

- Klasická EVT študuje rozdelenie blokových maxím
- Maximum n pozorovaní: $M_n := \max(X_1, ..., X_n)$

- Otázka: Ako vypočítať $P(M_n \leq x)$, ak X_i sú i.i.d.?

- Platí: $P(M_n \leq x) = P(X_1 \leq x, ..., X_n \leq x) = F_n(x)$

- Existuje nejaké štandardné asymptotické rozdelenie pre maximá?
- Motivácia:
  - F často nepoznáme
  - Pre sumu $S_n := X_1 + ... + X_n$ platí centrálna limitná veta:

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{S_n - a_n}{b_n} \leq x \right) = \Phi(x), \quad \text{kde } a_n = nE(X_1) \text{ a } b_n = \sqrt{\text{var}(X_1)}$$

Klasická EVT

VETA (Fischer – Trippet, 1928): Ak vhodne normalizované maximá konvergujú v rozdelení k netriviálnemu limitnému rozdeleniu, potom musí ísť o tzv. generalized extreme value (GEV) distribution v tvare

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp\left(-(1+\xi x)^{-1/\xi}\right) & \xi \neq 0\,, \\ \exp\left(-e^{-x}\right) & \xi = 0, \end{cases}$$

Základné typy GEV rozdelení:

- Fréchetovo ($\xi > 0$) [platí pre rozdelenia s ťažkými chvostami]
- Gumbelovo ($\xi = 0$) [normálne, lognorm., exponenciálne, gamma, F, χ^2]
- Weibullovo ($\xi < 0$) [rovnomerné]

Poznámky:

- Parameter ξ má tú istú hodnotu ako v GPD
- Distribučná funkcia GEV je spojitá v parametri ξ
- V limitnej je vete stačí normované rozdelenie, pri aplikácii na dáta treba odhadnúť aj parameter strednej hodnoty a škálovania