
Cvičenie 1

Úlohy variačného počtu I

1. Fyzikálna aplikácia.

Ak dva rovnaké kruhy ponoríte do mydlového roztoku, vytiahnete ich a pomaly ich od seba oddialíte, vznikne tzv. *catenoid* - štruktúra s minimálnym povrchom (z dôvodu minimalizácie celkovej energie).



Obr. 1: Catenoid vytvorený z mydlovej vrstvy

Nájsť matematický popis tohto útvaru možno riešením nasledujúcej úlohy: Zo všetkých kriviek spájajúcich body $(0, x_0)$ a (T, x_T) treba vybrať tú, ktorá generuje najmenšiu plochu pri jej rotácii okolo osi t . Sformulujte túto úlohu ako úlohu variačného počtu.

2.

Odhadnite tvar optimálneho riešenia úlohy

$$\min V(x(t)) = \int_0^T \dot{x}(t)^2 dt$$

za podmienok $x(0) = 0, x(T) = c$.

Túto úlohu možno diskretizovať do tvaru

$$\min \sum_{i=1}^k \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{T/k} \right)^2 (T/k),$$

za podmienok $x_0 = 0, x_k = c$.

Nájdite optimálne riešenie tejto úlohy ako úlohy hľadania minima funkcie viacerých premenných. Napíšte Eulerovu rovnicu pre pôvodnú úlohu, vyriešte ju a riešenia porovnajte.

3.

Nájdite kandidáta na riešenie nasledujúcej úlohy:

$$\text{extr } V(x(t)) = \int_0^T e^{-rt} (\dot{x}(t))^2 dt$$

za podmienok $x(0) = 0, x(T) = c$.

4.

Nájdite kandidátov na optimálne riešenie pre úlohu

$$\text{extr } V(x(t)) = \int_0^1 \dot{x}(t)^2 + t^2 x(t) dt$$

za podmienok $x(0) = 0, x(1) = 1/12$.

Ide o minimum alebo maximum?

5.

Úloha o optimálnej spotrebe

Napíšte a interpretujte Eulerovu rovnicu pre úlohu o optimálnej spotrebe s lineárnou produkčnou funkciou sformulovanú na prednáške

$$\max V(k(t)) = \int_0^T e^{-\delta t} U(\dot{k} - k) dt$$

za podmienok $k(0) = k_0 > 0, k(T) = k_T$.

Nájdite riešenie tejto Eulerovej rovnice pre konkrétny tvar účelovej funkcie $U(c) = \ln c$.