Cvičenie 2

Úlohy variačného počtu II

1. **Úloha s voľným koncom a s pevným časom**
Nájdite kandidátov na optimálne riešenie pre úlohu

$$\begin{aligned}&\text{extr } V(x(t)) = \int_0^1 \dot{x}(t)^2 + 2\dot{x}(t)x(t) + 2\dot{x}(t) + x(t)\ \mathrm{d}t\\ &\text{za podmienok } x(0) = 2,\ x(1) \text{ voľné.}\end{aligned}$$

Pomocou Legendrovej podmienky zistite, či ide o kandidátov na minimum alebo maximum. Overte splnenie postačujúcej podmienky druhého rádu.

2. **Parametrická úloha variačného počtu.**
Na nasledujúcom príklade možno ukázať, že

(i) úloha variačného počtu nemusí mať optimálne riešenie,

(ii) riešenie Eulerovej rovnice nemusí byť optimálnym,

(iii) Legendrove podmienky druhého rádu sú tiež len nutnými podmienkami.

Daná je nasledujúca úloha variačného počtu:

$$\begin{aligned}&\text{extr } V(x(t)) = \int_0^T x(t)^2 + ax(t)\dot{x}(t) + b(\dot{x}(t))^2\,\mathrm{d}t\\ &\text{za podmienok } x(0) = x_0, x(T) = x_T,\end{aligned}$$

kde $a \in \mathbb{R}$ a $b \in \mathbb{R}$ sú dané parametre.

a) Ako je výsledok ovplyvnený parametrom a? Prečo? *Hint*: Vypočítajte integrál

$$\int_0^1 ax(t)\dot{x}(t)\ dt.$$

b) Nájdite kandidátov na riešenie pre túto úlohu pre $b = 1$, $b = 0$ a $b = -1$. Pomocou Legendrovej podmienky zistite, či ide o kandidátov na minimum alebo maximum.

c) Ukážte, že pre úlohu s parametrom $b = -1$ nie je splnená postačujúca podmienka optimality druhého rádu. Uvažujte prípad $T = 2\pi$ a $x_0 = x_T = 0$. V tomto prípade možno ukázať, že Eulerova rovnica dáva nekonečne kandidátov na maximum, ale maximum v skutočnosti neexistuje. Konkrétne ukážte, že $x(t) = t - \dfrac{t^2}{2\pi}$ je prípustné riešenie, pričom hodnota uvažovaného funkcionálu je pre toto riešenie vyššia ako pre riešenia Eulerovej rovnice.

$\boxed{3.}$ Ekonomická aplikácia

(Hotelling, 1931) Majiteľ uhoľnej bane s celkovými zásobami uhlia B sa rozhoduje, koľko uhlia má v ktorom období vyťažiť tak, aby jeho celkový diskontovaný zisk bol čo najväčší. Nech $x(t)$ označuje celkový objem vyťaženého a predaného uhlia v case t a $\dot{x}(t)$ označuje tempo ťažby / predaja. Predpokladáme, že čistá jednotková cena (t.j. cena po odpočítaní nákladov na ťažbu) $p(\dot{x})$ je kladná klesajúca funkcia $\dot{x}$.

a) Sformulujte v tvare úlohy variačného počtu s voľným časom a pevným koncom.

b) Napíšte Eulerovu rovnicu a interpretujte ju.

$\boxed{4.}$ Úloha s čiastočne voľným koncom a s voľným časom

Nájdite kandidátov na optimálne riešenie pre úlohu

$$\text{extr } V(x(t)) = \int_0^T \dot{x}(t)^2 \,\mathrm{d}t$$
$$\text{za podmienok } x(0) = 0,\ x(T) = -T - 1,\ T \text{ je voľné.}$$

$\boxed{5.}$ Degenerovaná úloha

Nájdite kandidátov na optimálne riešenie pre úlohu

$$\text{extr } V(x(t)) = \int_0^1 t\dot{x} + x \,\mathrm{d}t$$
$$\text{za podmienok } x(0) = 2,\ x(1) = 1.$$