
Cvičenie 3

Štandardné úlohy optimálneho riadenia

1.

Nájdite riadenie a jeho odozvu spĺňajúce podmienky PPM pre nasledovnú úlohu

$$\begin{aligned} \min T, \quad T \text{ voľné,} \\ \dot{x} = u, \\ x(0) = 10, \\ x(T) = 0, \\ u \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

(Najprv prepíšte účelovú funkciu do Lagrangeovho tvaru a pokúste sa uhádnuť riešenie.)

2.

Nájdite riadenie a jeho odozvu spĺňajúce podmienky PPM pre nasledovnú úlohu

$$\begin{aligned} \min \int_0^T u^2 + 1 \, dt, \quad T \text{ voľné,} \\ \dot{x} = x + u, \\ x(0) = 1, \\ x(T) = 0. \end{aligned}$$

Ako by sa zmenilo riešenie, ak by sme účelovú funkciu zmenili na

$$\min \int_0^T u^2 \, dt?$$

3. Viacrozmerná úloha

Sformulujte podmienky PPM pre nasledovnú úlohu a nájdite ich riešenie pre $\psi^0 = 1$:

$$\begin{aligned} \max \int_0^T \frac{1}{2}(ax + by) dt, \quad T \text{ voľné,} \\ \dot{x} = \frac{1}{2}u(ax + by), \\ \dot{y} = \frac{1}{2}(1 - u)(ax + by), \\ x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \\ cx(T) + dy(T) = A, \\ u \in [0, 1], \end{aligned}$$

kde a, b, c, d, A sú kladné konštanty a platí $a > b, c < d$. Predpokladajme navyše, že $cx_0 + dy_0 < A$.

Ekonomická interpretácia: Úlohu možno interpretovať ako model s dvoma typmi kapitálu x a y , ktoré majú rôznu úroveň produktivity (a a b). Riadiaca premenná u vyjadruje podiel úspor alokovaný do prvého kapitálu, pričom miera úspor je $\frac{1}{2}$. Koncová podmienka hovorí, že celková úroveň oboch kapitálov ocenených cenami c a d musí dosiahnuť hodnotu A .