
Cvičenie 4

Neautonómne úlohy a úlohy s pevným časom

1. Neautonómna úloha

Daná je nasledujúca úloha optimálneho riadenia:

$$\begin{aligned} \min \int_0^T t^2 + u^2 \, dt, \quad T \text{ voľné,} \\ \dot{x} = u, \\ x(0) = 4, \\ x(T) = 5, \\ u \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- a) Sformulujte podmienky PPM.
- b) Vylúčte prípad $\psi^0 = 0$.
- c) Nájdite riešenie podmienok PPM.

2. Úloha s pevným časom a s voľným koncom, bez ohraničenia na riadenie

Daná je nasledujúca úloha optimálneho riadenia:

$$\begin{aligned} \min \int_0^1 \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}u^2 \, dt, \\ \dot{x} = u - x, \\ x(0) = 1, \\ x(1) \text{ voľné.} \end{aligned}$$

- a) Pokúste sa odhadnúť tvar optimálneho riadenia.

- b) Sformulujte podmienky PPM. Ako možno jednoducho vylúčiť prípad $\psi^0 = 0$?
- c) Nájdite riešenie týchto podmienok. Návod: Odvodte systém lineárnych diferenciálnych rovníc pre x a ψ (premennú u vyjadrite z podmienky maxima) a tento systém vyriešte.

3. Úloha s pevným časom a s voľným koncom, s ohraňčením na riadenie

Daná je nasledujúca úloha optimálneho riadenia:

$$\begin{aligned} \max \int_0^2 -x^2 dt, \\ \dot{x} = u, \\ x(0) = 1, \\ u \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

- a) Pokúste sa odhadnúť tvar optimálneho riadenia a jeho odozvy.
- b) Sformulujte podmienky PPM. Zdôvodnite, že $\psi^0 = 1$.
- c) Nájdite riešenie týchto podmienok. Ukážte, že riadenie spĺňajúce PPM je nespojité. Návod: Ukážte, že $x(t) > 0$ ani $x(t) < 0$ na ľavom okolí bodu 2 nespĺňajú PPM.
- d) Uvažujte predchádzajúcu úlohu so všeobecnejšou počiatočnou podmienkou v tvare $x(0) = a$, kde $a \in (0, 2)$. Nájdite optimálne riadenie, jeho odozvu, adjungovanú premennú aj optimálnu hodnotu účelovej funkcie $V(a)$ v závislosti od parametra a . Ukážte, že

$$\psi(0) = \frac{dV(a)}{da}.$$