
Cvičenie 5

Riešenie úloh s využitím počítača

1. Ako chovať ryby

Majiteľ rybníka sa rozhoduje, koľko rýb má v ktorom období vyloviť tak, aby jeho celkový diskontovaný zisk bol čo najväčší. Nech $x(t)$ označuje množstvo rýb v rybníku, vyjadrené ako časť celkovej kapacity rybníka. Predpokladajme, že množstvo rýb na začiatku a na konci plánovacieho horizontu je dané. Ďalej nech $u(t)$ označuje tempo výlovu / predaja rýb v čase t . Predpokladáme, že čistý zisk z výlovu $p(u)$ je rastúca a rýdzokonkávna funkcia u . Túto úlohu možno sformulovať ako úlohu optimálneho riadenia s pevným časom a pevným koncom nasledovne:

$$\begin{aligned} \max \int_0^T e^{-rt} p(u) dt, \quad T \text{ pevné,} \\ \dot{x} = x(1-x) - u, \\ x(0) = x_0 \text{ dané,} \\ x(T) = x_T \text{ dané,} \\ x(t) \in \langle 0, 1 \rangle, \\ u(t) \geq 0. \end{aligned}$$

- Napište podmienky PPM pre vnútorné riešenie a $\psi^0 = 1$.
- Pomocou týchto podmienok vyjadrite diferenciálnu rovnicu pre $\dot{u}$. (Návod: Z podmienky maxima vyjadrite ψ a dosadte do adjungovanej rovnice.)
- Stavová rovnica a diferenciálna rovnica z časti b) spolu tvoria systém dvoch nelineárnych obyčajných diferenciálnych rovníc. Načrtnite fázový portrét tohto systému a určte charakter stacionárneho bodu.
- Pomocou priloženého matlabovského súboru nájdite a zobrazte riešenie podmienok PPM (fázový portrét aj vývoj stavovej a riadiacej

premennej v závislosti od času) pre konkrétnu voľbu funkcie zisku $p(u) = \ln(1 + u)$. Porovnajte vývoj riešenia pre rôznu počiatočnú a koncovú podmienku a rôzny časový horizont, zmeny popíšte a ekonomicky interpretujte.

- e) Pre voľbu funkcie p uvedenú v časti d) diskretizujte systém diferenciálnych rovníc pre x a u a tento systém riešte ako okrajovú úlohu pomocou nástroja Solver / Goal seeker v programe Excel.