
Cvičenie 6

Spojitosť riadenia. Prípád $\psi^0 = 0$.

1. Spojitosť riadenia

Na jednom z minulých cvičení sme si ukázali, že riadenie môže byť nespojité, čo môže spôsobiť isté komplikácie pri riešení úlohy. Za istých okolností však možno nespojité riadenia už dopredu vylúčiť. Dokážte, že pre jednorozmernú úlohu optimálneho riadenia v tvare

$$\begin{aligned} \max \int_0^T f^0(t, x, u) dt, \quad T \text{ voľné alebo pevné,} \\ \dot{x} = f(t, x, u), \\ x(0) = x_0, \\ x(T) \in \{x \mid g(x) = 0\}, \\ u \in U \quad (U \text{ je konvexná množina}) \end{aligned}$$

platí nasledujúce tvrdenie: Ak je Hamiltonova funkcia

$$H(t, x, u, 0, \psi) = \psi^0 f^0(t, x, u) + \psi f(t, x, u)$$

rýdzokonkávna v premennej u , potom je optimálne riadenie spojité pre každé $t \in [0, T]$. (Návod: Využite podmienku maxima.)

2. Príklad, že $\psi^0 = 0$ môže nastať.

Daná je nasledujúca úloha optimálneho riadenia:

$$\begin{aligned} \max \int_0^1 u dt, \\ \dot{x} = (u - u^2)^2, \\ x(0) = 1, \\ x(1) = 0, \end{aligned}$$

- Ukážte, že riadenie $\hat{u}(t) \equiv 1$ je optimálne.
- Ukážte, že toto riadenie spĺňa podmienky PPM len spolu s $\psi^0 = 0$.

3. Dvojsektorový model

Predpokladajme, že ekonomika pozostáva z dvoch sektorov. Prvý sektor produkuje investičný kapitál, druhý sektor vyrába spotrebný statok. Produkcie v jednotlivých sektoroch za jednotku času označme $x(t)$, resp. $y(t)$. Produkcia investičného statku sa rozdeľuje na zvyšovanie oboch statkov. Označme $u(t)$ časť produkcie investičného statku alokovanú do prvého sektora. Predpokladajme, že nárast produkcie oboch statkov závisí priamo úmerne od množstva investície do daného sektora. Úlohou je maximalizovať celkovú spotrebu na danom časovom horizonte.

Uvedený model možno sformulovať ako nasledujúcu úlohu optimálneho riadenia:

$$\begin{aligned} \max \int_0^T y \, dt, \\ \dot{x} &= ux, \\ \dot{y} &= (1 - u)x, \\ x(0) &= x_0, \\ y(0) &= y_0, \\ u(t) &\in \langle 0, 1 \rangle, \end{aligned}$$

kde T , x_0 , y_0 sú dané kladné konštanty.

Sformulujte podmienky PPM, nájdite ich riešenie a uveďte podmienky, za ktorých je toto riešenie nespojité.