

---

## Cvičenie 7

# Bolzova úloha.

---

**1.** Úloha o optimálnej obnove stroja.

Zmena stavu stroja je popísaná rovnicou  $\dot{x}(t) = -\delta x(t) + u(t)$ , kde  $\delta > 0$  je daná miera opotrebovania stroja a  $u$  vyjadruje mieru údržby stroja. Počiatočný stav stroja je daný. Úlohou je nájsť optimálnu mieru údržby stroja, ktorá maximalizuje celkový zisk: Ten je tvorený ziskom z využívania stroja (ktorý je lineárnou funkciou jeho aktuálneho stavu) zníženého o náklady na údržbu stroja, ktoré sú kvadratickou funkciou miery údržby  $u$ . K tomuto zisku vytvorenému postupne počas doby využívania stroja sa navyše pripočíta zostatková hodnota stroja na konci tohto obdobia, ktorá je priamo úmerná jeho stavu na konci. Úlohu možno sformulovať v Bolzovom tvare nasledovne:

$$\begin{aligned} \max \int_0^T \left( \pi x(t) - \frac{u(t)^2}{2} \right) dt + Sx(T), \quad T \text{ dané} \\ \dot{x}(t) = -\delta x(t) + u(t), \\ x(0) = x_0, \\ x(T) \text{ voľné}, \\ u(t) \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

kde  $\pi, S, \delta, x_0, T$  sú dané kladné konštanty.

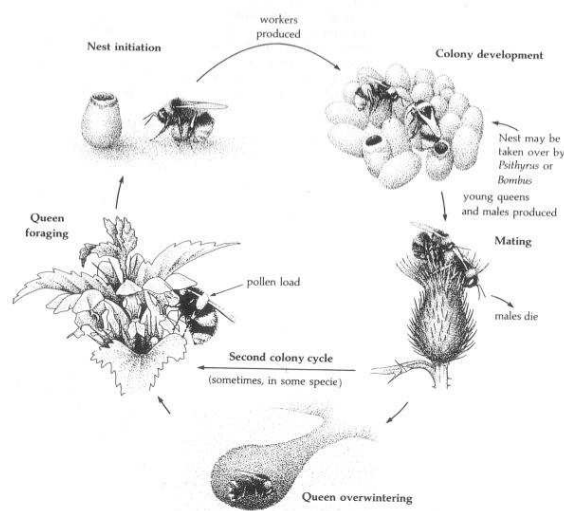
- (i) Sformulujte podmienky PPM pre túto úlohu.
- (ii) Ukážte, že podmienky PPM sú splnené s  $\psi^0 \neq 0$ .
- (iii) Nájdite riešenie podmienok PPM (stačí nájsť riadenie, odozvu netreba).
- (iv) Ukážte, ako sa mení  $u$  v závislosti od výrazu  $S - \frac{\pi}{\delta}$ . Tento výsledok interpretujte.
- (v) Zistite znamienko adjungovanej premennej počas doby využívania stroja a jej hodnotu v čase  $T$ . Interpretujte.

## 2. Životný cyklus čmeliaka.

Predpokladajme, že životný cyklus možno popísať nasledujúcim zjednodušeným modelom:

$$\begin{aligned} \max y(T), \quad T \text{ pevné,} \\ \dot{x} = aux - bx, \quad a > b \\ \dot{y} = (1 - u)x, \\ x(0) = x_0 > 0, \\ x(T) \text{ voľné,} \\ y(0) = y_0 > 0, \\ y(T) \text{ voľné,} \\ u(t) \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Stavová premenná  $x(t)$  označuje počet robotníc, stavová premenná  $y(t)$  počet kráľovien. Robotnice rozkladajú svoje úsilie buď na produkciu ďalších robotníc alebo kráľovien, čo je vyjadrené riadiacou premennou  $u(t)$ . Cieľom kolónie je mať na konci obdobia čo najviac kráľovien. Ukážte, že riešenie spĺňajúce PPM pre túto úlohu zodpovedá skutočnému cyklu kolónie čmeliakov znázornenom na obrázku.<sup>1</sup>



Obr. 1: Životný cyklus kolónie čmeliakov.

<sup>1</sup>Zdroj: <http://www.bumblebee.org/lifecycle.htm>