

---

## Cvičenie 9

# Úlohy na nekonečnom časovom horizonte. Rovnica dynamického programovania. Kvalitatívna analýza ekonomických modelov.

---

### 1. Úloha na nekonečnom časovom horizonte.

Nájdite optimálne riešenie (riadenie aj odozvu) pre nasledujúcu úlohu optimálneho riadenia:

$$\begin{aligned} \min \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-rt} u^2 dt, \\ \dot{x} = x + u, \\ x(0) = x_0 > 0 \text{ dané,} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \end{aligned}$$

kde  $r > 0$  je daný parameter.

### 2. Rovnica dynamického programovania

Daná je nasledovná úloha optimálneho riadenia:

$$\begin{aligned} \min \int_0^{\infty} e^{-rt} (ax^2 + bu^2) dt, \\ \dot{x} = u, \\ x(0) = x_0 > 0 \text{ dané,} \end{aligned}$$

kde  $a > 0$  a  $b > 0$  sú dané. Napíšte pre túto úlohu spojitú verziu rovnice dynamického programovania v tvare parciálnej diferenciálnej rovnice, kde neznámou je hodnotová funkcia  $V(x, t)$ . Túto rovnicu vyriešte, pričom riešenia hľadajte v tvare  $V(x, t) = e^{-rt} cx^2$ . Nájdite tvar optimálnej spätnej väzby.

### 3. Optimálna stratégia ťažby monopolistu

Predpokladajme, že majiteľ bane vie, že v jeho bani sa nachádza isté množstvo uhlia  $x_0 > 0$ . Zvolená miera ťažby  $u$  však ovplyvňuje jednotkovú cenu  $p$ , za ktorú môže vyťažené

uhlie predať:  $p(u) = a - bu$ . Okrem toho na jednotku ťažby treba vynaložiť náklady  $c$ , ktoré rastú pri klesajúcom zostatkovom množstve uhlia, pričom  $c(x_0) > 0$  a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} c(x) = \infty$ .

Cieľom je teda stanoviť stratégiu ťažby tak, aby vlastník bane maximalizoval celkový diskontovaný zisk na nekonečnom časovom horizonte.

Túto úlohu môžeme sformulovať ako úlohu optimálneho riadenia nasledovne:

$$\begin{aligned} \max \int_0^{\infty} e^{-rt} ((a - bu)u - f(x)u) dt, \\ \dot{x} = -u, \\ x(0) = x_0 > 0 \text{ dané,} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \geq 0, \\ u \geq 0. \end{aligned}$$

- a) Napíšte nutné podmienky optimality pre vnútorné riešenie (t.j. bez zohľadnenia ohraničenia na riadenia) pre  $\psi^0 = 1$ .
- b) Pomocou fázového portréту v priestore  $(x, u)$  ukážte, že za uvedených predpokladov a pri požiadavke splnenia uvedených ohraňení nedôjde k úplnému vyťaženiu uhlia v bani (t.j. existuje hodnota  $\bar{x} > 0$ , pod ktorú množstvo uhlia neklesne). Tento záver ekonomicky zdôvodnite.