VARIAČNÝ POČET V PRÍKLADOCH [1]

$\boxed{1.}$ Úloha s pevným koncom a s pevným časom

Nájdite kandidáta na riešenie nasledujúcej úlohy:

$$\begin{aligned}&\text{extr } V(x(t)) = \int_0^T e^{-rt}(\dot{x}(t))^2 \,\mathrm{d}t\\ &\text{za podmienok } x(0) = 0, x(T) = B.\end{aligned}$$

$\boxed{2.}$ Úloha s pevným koncom a s pevným časom

Daná je nasledujúca úloha variačného počtu:

$$\begin{aligned}&\text{extr } V(x(t)) = \int_0^1 (\dot{x}(t))^2 + 10tx(t) \,\mathrm{d}t\\ &\text{za podmienok } x(0) = 1, x(1) = 2.\end{aligned}$$

a) Nájdite kandidátov na riešenie pre túto úlohu.
b) Dokážte, že nájdený kandidát je globálnym minimom.

$\boxed{3.}$ Úloha s pevným koncom a s pevným časom, f^0 závisí iba od $\dot{x}$

a) Nájdite kandidátov na optimálne riešenie pre úlohu

$$\begin{aligned}&\text{extr } V(x(t)) = \int_0^T \dot{x}(t)\,(\ln \dot{x}(t))^2 \,\mathrm{d}t\\ &\text{za podmienok } x(0) = x_0, x(T) = x_T.\end{aligned}$$

b) Nájdite kandidátov na optimálne riešenie pre úlohu

$$\begin{aligned}&\text{extr } V(x(t)) = \int_0^T f^0(\dot{x}(t)) \,\mathrm{d}t\\ &\text{za podmienok } x(0) = x_0, x(T) = x_T,\end{aligned}$$

kde f^0 je nelineárna funkcia $\dot{x}$, t.j.

$$\frac{\mathrm{d}^2 f^0}{\mathrm{d}\dot{x}^2} \neq 0.$$

[1] Verzia 25.11.2007. Nájdené chyby prosím reklamujte na palo_jurca@orangemail.sk. Literatúra: Morton I. Kamien, Nancy L. Schwartz[ová]: Dynamic Optimization, The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management, 1995.

$\boxed{4.}$ Úloha s pevným koncom a s pevným časom

Nájdite kandidátov na optimálne riešenie pre úlohu

$$\begin{aligned} &\text{extr } V(x(t)) = \int_0^T \dot{x}(t)^2 + t^2 x(t)\,\mathrm{d}t \\ &\text{za podmienok } x(0) = 0, x(1) = 1/12. \end{aligned}$$

Ide o minimum alebo maximum?

$\boxed{5.}$ Degenerovaná úloha

Nájdite kandidátov na optimálne riešenie pre úlohu

$$\begin{aligned} &\text{extr } V(x(t)) = \int_0^T t\dot{x}(t) + x(t)\,\mathrm{d}t \\ &\text{za podmienok } x(0) = 2, x(1) = 1. \end{aligned}$$

$\boxed{6.}$ Fyzikálna aplikácia

Ak dva rovnaké kruhy ponoríte do mydlového roztoku, vytiahnete ich a pomaly ich od seba oddialite, vznikne tzv. catenoid - štruktúra s minimálnym povrchom (z dôvodu minimalizácie celkovej energie).

Obr. 1: Catenoid vytvorený z mydlovej vrstvy

Matematický model: Zo všetkých kriviek spájajúcich body $(0, x_0)$ a (T, x_T) treba vybrať tú, ktorá generuje najmenšiu plochu pri jej rotácii okolo osi t.

$$\begin{aligned} &\min V(x(t)) = \int_0^T 2\pi x\sqrt{1 + \dot{x}^2}\,\mathrm{d}t \\ &\text{za podmienok } x(0) = x_0, x(T) = x_T, \end{aligned}$$

Nájdite matematický popis tejto krivky.

$\boxed{7.}$ Ekonomická aplikácia

Firma má k dispozícii kapitál, z ktorého za časovú jednotku dokáže vyprodukovať k^α výrobkov ($\alpha \in (0, 1)$), ktoré môže na trhu predať za jednotkovú cenu p. Miera amortizácie kapitálu je $\delta > 0$, úroková sadzba je $r > 0$. Jednotkové náklady na investície do zvýšenia kapitálu sú c. Začiatočná výška kapitálu $k(0) = k_0 > 0$ je daná. Výška investícií i je zdola aj zhora obmedzená: $\bar{i}_1 < i < \bar{i}_2$. Cieľom firmy je maximalizovať celkový diskontovaný zisk.

$$\max V(k(t)) = \int_0^T e^{-rt}\Big(pk^\alpha - c(\dot{k} + \delta k)\Big)\,\mathrm{d}t$$
$$\text{za podmienok } k(0) = k_0, \quad \bar{i}_1 < \dot{k} + \delta k < \bar{i}_2.$$

Ukážte, že v rovnovážnom stave sú marginálne príjmy rovné marginálnym nákladom.

$\boxed{8.}$ Úloha s voľným koncom a s pevným časom

Nájdite kandidátov na optimálne riešenie pre úlohu

$$\text{extr } V(x(t)) = \int_0^T \dot{x}(t)^2 + 2\dot{x}(t)x(t) + 2\dot{x}(t) + x(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\text{za podmienok } x(0) = 2, x(1)\text{voľné.}$$

Ide o minimum alebo maximum?

$\boxed{9.}$ Úloha s pevným koncom a s voľným časom (Hotelling, 1931)

Majiteľ uhoľnej bane s celkovými zásobami uhlia B sa rozhoduje, koľko uhlia má v ktorom období vyťažiť tak, aby jeho celkový diskontovaný zisk bol čo najväčší. Nech $x(t)$ označuje celkový objem vyťaženého a predaného uhlia v čase t a $\dot{x}(t)$ označuje tempo ťažby / predaja. Predpokladáme, že čistá jednotková cena (t.j. cena po odpočítaní nákladov na ťažbu) $p(\dot{x})$ je klesajúca funkcia $\dot{x}$.
a) Sformulujte v tvare úlohy variačného počtu s voľným časom a pevným koncom.
b) Napíšte Eulerovu rovnicu a interpretujte ju.
c) Pomocou Eulerovej rovnice, podmienky transverzality a Legendrovej podmienky ukážte, že optimálne riešenie $\hat{x}(t)$ je klesajúca funkcia t a $\dot{\hat{x}}(\hat{T}) = 0$.
d) Nájdite optimálne riešenie, ak

$$p(\dot{x}) = \frac{1 - e^{-\alpha\dot{x}}}{\dot{x}},$$

kde $\alpha > 0$ je daná konštanta. Ako závisí $\hat{T}$ od jednotlivých parametrov modelu? Interpretujte.

$\boxed{10.}$ Úloha s voľným začiatkom a s voľným začiatočným časom

Odvoďte postačujúce podmienky pre nasledujúcu úlohu variačného počtu:

$$\text{extr}_{\{x(t),t_0,x_0\}} V(x(t), t_0, x_0) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t), \dot{x}(t))\,\mathrm{d}t$$
$$\text{za podmienok } x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1,$$

kde t_1 a x_1 sú pevne dané.

$\boxed{11.}$ Úloha s čiastočne voľným koncom a s pevným časom

Nájdite kandidátov na optimálne riešenie pre nasledujúcu úlohu

$$\begin{aligned}&\min V(x(t)) = \int_0^T \frac{\sqrt{1+(\dot{x}(t))^2}}{x(t)}\,\mathrm{d}t\\&\text{za podmienok } x(0) = 0 \text{ a}\end{aligned}$$

a) $x(T) = T - 5$,
b) $(T-9)^2 + (x(T))^2 = 9$.

$\boxed{12.}$ Úloha s čiastočne voľným koncom a s pevným časom

Dokážte, že najkratšia cesta z bodu $(0,0)$ ku krivke $(t, R(t))$ je úsečka z $(0,0)$ do $(T, R(T))$, ktorá je kolmá k dotyčnici ku krivke $(t, R(t))$ v bode $(T, R(T))$.

$\boxed{13.}$ Viacrozmerná úloha

Nájdite extremálu pre funkcionál

$$V(x(t), y(t)) = \int_0^T (\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + 2x(t)y(t)\,\mathrm{d}t$$

za podmienok

$$\begin{aligned}x(0) &= 0, \quad x(\pi/2) = 1,\\ y(0) &= 0, \quad y(\pi/2) = -1.\end{aligned}$$

$\boxed{14.}$ Boľcova úloha

Dokážte, že každé optimálne riešenie úlohy

$$\begin{aligned}&\text{extr } V(x(t), x_T) = \int_0^T f^0(t, x(t), \dot{x}(t))\,\mathrm{d}t + \varphi(x(T))\\&\text{za podmienok } x(0) = x_0, x(T) = x_T,\end{aligned}$$

kde T a x_0 sú pevne dané a x_T je voľné, spĺňa okrem Eulerovej rovnice aj modifikovanú podmienku transverzality v tvare

$$\frac{\partial f^0(T, \hat{x}(T), \dot{\hat{x}}(T))}{\partial \dot{x}} = -\frac{\mathrm{d}\varphi(x(T))}{\mathrm{d}x}.$$

$\boxed{15.}$ Boľcova úloha

Predpokladajte, že pri financovaní projektov výskumu a vývoja platí, že čím rýchlejšie sa míňa suma vyčlenená na projekt, tým menej prispieva k celkovému efektívnemu úsiliu. (Rýchlejšie utrácanie peňazí môže prispievať k menej produktívnym faktorom.) Nech

$x(t)$ označuje rýchlosť utrácania peňazí a $z(t)$ celkové kumulované úsilie venovanému projektu v čase t, nech $\dot{z}(t) = \sqrt{x(t)}$. Úsilie potrebné na dokončenie projektu je A. Po ukončení projektu je výška odmeny R. Úlohou je maximalizovať celkový diskontovaný zisk, t.j.

$$\max V(x(t)) = -\int_0^T e^{-rt} x(t)\,\mathrm{d}t + e^{-rT} R.$$

Úlohu možno preformulovať do nasledovného tvaru úlohy variačného počtu:

$$\begin{gathered}\max V(z(t)) = -\int_0^T e^{-rt} (\dot{z}(t))^2\,\mathrm{d}t + e^{-rT} R. \\ \text{za podmienok } z(0) = 0, z(T) = A, T \text{ voľné.}\end{gathered}$$

Nájdite kandidáta na optimálne riešenie.

16. Úloha s izoperimetrickým ohraničením

Nájdite kandidátov na optimálne riešenie pre nasledujúcu úlohu

$$\begin{aligned}&\min V(x(t)) = \int_0^1 e^{-rt} x(t)\,\mathrm{d}t \\ &\text{za podmienky } \int_0^1 \sqrt{x(t)}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

kde konštanty $A > 0$ a $r > 0$ sú dané.

17. Úloha s izoperimetrickým ohraničením

Spomedzi všetkých útvarov ohraničených osou x a krivkou dĺžky B spájajúcou body $(0, 0)$ a $(T, 0)$ nájdite ten, ktorý má najväčší obsah.