

**1.** Odvodenie „podmienky stacionarity“ pre úlohu s diskontným faktorom.

Ukážte, že za predpokladu diferencovateľnosti optimálneho riadenia pre úlohu s diskontným faktorom v tvare

$$\begin{aligned} \max \int_0^T e^{-rt} f^0(x, u) dt, \quad T \text{ voľné} \\ \dot{x} = f(x, u), \\ x(0) = x_0, \\ x(T) \text{ pevné,} \end{aligned}$$

platí podmienka

$$H(t, x^*(t), u^*(t), \psi^0, \psi(t)) = r\psi^0 \int_t^T e^{-rs} f^0(x^*(s), u^*(s)) ds,$$

kde  $H$  je Hamiltonova funkcia v tvare

$$H(t, x^*(t), u^*(t), \psi^0, \psi(t)) = \psi^0 e^{-rt} f^0(x^*(t), u^*(t)) + \psi(t) f(x^*(t), u^*(t)).$$

Návod: Počítajte  $\frac{d}{dt} H(t, x^*(t), u^*(t), \psi^0, \psi(t))$ .

**2.** Odvodenie „podmienky stacionarity“ pre autonómne úlohy.

Ukážte, že za predpokladu diferencovateľnosti optimálneho riadenia pre štandardnú autonómnu úlohu optimálneho riadenia v tvare

$$\begin{aligned} \max \int_0^T f^0(x, u) dt, \quad T \text{ pevné} \\ \dot{x} = f(x, u), \\ x(0) = x_0, \\ x(T) \text{ voľné,} \end{aligned}$$

platí podmienka

$$H(t, x^*(t), u^*(t), \psi^0, \psi(t)) = \text{konšt.}$$

kde  $H$  je Hamiltonova funkcia v tvare

$$H(t, x^*(t), u^*(t), \psi^0, \psi(t)) = \psi^0 f^0(x^*(t), u^*(t)) + \psi(t) f(x^*(t), u^*(t)).$$

Návod: Počítajte  $\frac{d}{dt} H(t, x^*(t), u^*(t), \psi^0, \psi(t))$ .

**3. Odvodenie podmienok PPM pre úlohu v Mayerovom tvare.**

Daná je nasledovná úloha optimálneho riadenia:

$$\begin{aligned} \max \Phi(T), \quad T \text{ voľné} \\ \dot{x} = f(x, u), \\ x(0) = 0, \\ x(T) = x_T, \quad x_T \text{ dané,} \\ u(t) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- (i) Úlohu preveďte na úlohu v Lagrangeovom tvare a sformulujte pre ňu PPM (pomocou vety o podmienkach PPM pre štandardnú úlohu optimálneho riadenia).
- (ii) Úlohu nechajte v Mayerovom tvare, ale zaveďte substitúciu, ktorou vyjadríte čas ako novú stavovú premennú. Sformulujte pre túto úlohu podmienky PPM (pomocou vety o podmienkach PPM pre Bolzovu úlohu).
- (iii) Ukážte, že podmienky odvodené v (i) a (ii) sú ekvivalentné.

**4. Úloha s čiastočne voľným koncom.**

Odvoďte podmienky PPM pre nasledujúcu jednorozmernú úlohu optimálneho riadenia:

$$\begin{aligned} \max \int_0^T f^0(x, u) dt, \quad T \text{ voľné} \\ \dot{x} = f(x, u), \\ x(0) = x^0, \\ x(T) = \Phi(T), \\ u(t) \in U. \end{aligned}$$

Všimnite si, že úloha je neautonómna, ale neautonómnosť sa prejavuje iba v podmienke na koncový stav. Pri odvodení podmienok považujte čas za novú stavovú premennú analogicky ako to bolo urobené na prednáške pri odvodení podmienok PPM pre autonómnu úlohu. Na záver urobte „skúšku správnosti“: Ak ste podmienky odvodili správne, mali by sa v prípade  $\Phi(t) = 0$  zhodovať s podmienkami pre štandardnú úlohu optimálneho riadenia s pevným koncom.