

Vplyv vybraných faktorov na zisk životnej poisťovne pri doživotných dôchodkoch vyplácaných z úspor v II. dôchodkovom pilieri na Slovensku

The influence of selected factors on the profit of life insurance company in the case of life annuities paid from the second pillar in Slovakia

Igor Melicherčík, Gábor Szűcs

Abstract: In this article we examine selected risk factors that may affect future profit of life insurance companies when paying annuities from the second pillar. The investment strategy of insurer is constructed by applying the asset-liability matching method. The aim of this article is to analyze the longevity risk in the case of different demographic assumptions and to examine the impact of changing market yields on the present value of future profits of the insurance company.

Abstrakt: V rámci tohto článku sa skúmajú vybrané rizikové faktory, ktorým môžu čeliť životné poisťovne pri vyplácaní doživotných dôchodkov z II. dôchodkového piliera. Pri zostrojení investičnej stratégie sa používa tzv. metóda spárovania aktív a pasív životnej poisťovne. Cieľom tohto článku je vykonať analýzu rizika dlhovekosti budúcich dôchodcov pri rôznych demografických predpokladoch a analyzovať vplyv premenlivých trhových výnosov na súčasnú hodnotu zisku poisťovne v prípade vyššie uvedeného doživotného dôchodku.

Key words: asset-liability matching method, second pillar, longevity risk, yield curves.

Kľúčové slová: metóda spárovania aktív a pasív, II. dôchodkový pilier, riziko dlhovekosti, výnosové krivky.

JEL classification: G17, G22.

1. Úvod

Od 1. januára 2015 sa začne vyplácanie prvých starobných dôchodkov zo starobného dôchodkového sporenia (z II. dôchodkového piliera). Je známe, že väčšina sporiteľov, ktorá dosiahla vek 62 rokov a pôjde do dôchodku po spomínanom dátume, si kúpi za svoje nasporené peniaze doživotný dôchodok v životnej poisťovni. Z hľadiska životných poisťovní to znamená uzatvorenie nových kontraktov na doživotnú dôchodkovú ochranu klienta s pevným jednorazovo plateným poistným. Ročnú výšku dôchodkovej dávky poisťovňa počíta pri pevnej technickej úrokovej miere (podľa Zákona č. 8/2008 Z. z. o poisťovníctve¹), ktorá môže mať maximálnu výšku $i = 1,9\%$ p. a. (viď Opatrenie č. 3/2013 Národnej banky Slovenska²). Na jednej strane teda poisťovne kalkulujú výšku dávky na základe danej úrokovej miery, na druhej strane však investujú inkasované poistné **pri premenlivých trhových výnosoch**. Podľa Zákona o poisťovníctve musia dodržiavať zásadu diverzifikácie a určité limity pri umiestnení prostriedkov technických rezerv. V praxi životné poisťovne najväčšiu časť prostriedkov technických rezerv investujú do bezpečných dlhopisov, hypotekárnych záložných listov a bankových vkladov a len niekoľko percent alokujú do rizikovejších aktív. Práve preto sme stanovili v rámci našich modelových výpočtov umelý predpoklad, že poisťovne investujú výlučne len do dlhopisov pri daných (jednotných) úrovniach výnosov. Pri modelovaní výnosov dlhopisov sme používali tri modely výnosových kriviek: výnosovú krivku odvodenú od Coxovho-Ingersollovho-Rossovho modelu pre

¹ Úplné znenie Zákona č. 8/2008 Z. z. o poisťovníctve je dostupné na adrese:

<http://www.nbs.sk/_img/Documents/_Legislativa/_UplneZneniaZakonov/Z0082008.PDF>.

² Opatrenie Národnej banky Slovenska z 25. júna 2013 o maximálnej výške technickej úrokovej miery je dostupné na adrese: <http://www.nbs.sk/_img/Documents/_Legislativa/_Vestnik/OPAT3-2013.pdf>.

krátkodobé úrokové miery (Cox et al., 1985), Nelsonov-Siegelov model (Nelson, Siegel, 1987) a Svenssonov model (Svensson, 1994).

Ďalším rizikovým faktorom, ktorému životné poisťovne budú čeliť pri vyplácaní dôchodkov, je **dlhovekosť dôchodcov**. V klasických poisťovno-matematických výpočtoch sa obvykle používajú úmrtnostné tabuľky opisujúce situáciu k určitému časovému bodu (kalendárnemu roku). Táto skutočnosť môže viesť k nepresnostiam pri takých dlhodobých poisťovních produktoch, akými sú napríklad doživotné dôchodky. Poisťovne totiž „naplánujú“ vyplácanie dôchodkov pri aktuálnych podmienkach, no postupom času sa tieto podmienky môžu zmeniť, napr. môže prísť k zníženiu mier úmrtnosti a skupina poistencov (dôchodcov) sa môže dožiť dlhšieho veku ako sa predpokladalo. Jedným z našich cieľov bolo poukázať na efekty rizika dlhovekosti dôchodcov a v rámci modelových výpočtov ilustrovať zmeny v ziskovosti poisťovní pri zmenených predpokladoch o úmrtnosti.

Ako sme už spomínali, životné poisťovne sú z určitého aspektu súborom aktív a pasív. V tomto kontexte aktíva poisťovne sú napr. dlhopisy, akcie, termínované vklady a pod., teda prostriedky, do ktorých poisťovňa investuje inkasované poistné v mene poistených. Na druhej strane pasíva poisťovne predstavujú jej záväzky voči poistencom vyplývajúce z poisťovních kontraktov (nazývame ich aj technické rezervy). Princíp spárovania aktív a pasív životnej poisťovne spočíva v tom, že poisťovňa ku každému záväzku (budúcemu poistnému plneniu) pripojí vhodné aktívum s rovnakou (budúcou) hodnotou a totožným termínom splatnosti. Pri našich analýzach a modelových výpočtoch sme využívali práve tento princíp na definovanie investičnej stratégie životných poisťovní pri spomínaných doživotných dôchodkoch.

V rámci tohto článku ponúkame statickú analýzu ziskovosti životných poisťovní pri rôznych predpokladoch o trhových výnosoch a demografickom vývoji v prípade anuit vyplácaných z úspor v II. dôchodkovom pilieri. Pod pojmom „statická analýza“ rozumieme jednak to, že poisťovňa hneď po inkasovaní poistného ho rozloží, a potom už nespraví ďalšie investičné rozhodnutia a aj to, že predpokladáme len jednorazový príchod poistencov (namiesto pravidelného prúdenia sporiteľov odchádzajúcich do dôchodku). V druhej kapitole príspevku sú uvedené tri modely výnosov dlhopisov, postupy odhadov ich parametrov a špecifikácia historických dátových súborov úrokových mier a výnosov dlhopisov. Tretia časť obsahuje označenia a vzťahy z oblasti aktuárskej demografie a tri modely úmrtnosti, resp. prežívania poistených osôb. Štvrtá kapitola článku sa zaoberá metódou spárovania aktív a pasív a definovaním pojmov ako čistá akumulovaná hodnota poistenia alebo diskontovaná hodnota budúceho zisku. V poslednej, piatej kapitole sú uvedené výsledky a závery výpočtov ohľadom odhadu zisku poisťovne pri vyplácaní doživotných dôchodkov.

2. Modelovanie trhových výnosov

Ako sme už spomínali v úvodnej časti, pri modelovaní vyplácania dôchodkových dávok a odhadu zisku poisťovne kľúčovú úlohu zohráva adekvátny odhad trhových výnosov, pri ktorých poisťovne investujú inkasované poistné. Pri kalibrácii modelov sme používali okamžité úrokové miery (*short rate*) na Slovensku podľa webovej stránky Organizácie pre hospodársku spoluprácu a rozvoj (*Organisation for Economic Co-operation and Development*, OECD), krátkodobé úrokové miery (trojmesačný, šesťmesačný a dvanásťmesačný EURIBOR) z Európskeho inštitútu peňažného trhu (*European Money Market Institute*, EMMI) a ročné výnosy slovenských vládnych dlhopisov (VSVD) s dvoj-, päť-, resp. desaťročnou splatnosťou podľa záznamov Národnej banky Slovenska (NBS). Všetky historické dáta boli vyjadrené pri ročnej časovej jednotke, t. j. *per annum* (p. a.). Keďže všetky tri modely výnosových kriviek uvedené v úvodnej časti sú definované pre prípad spojitého úročenia, predpokladali sme, že aj historické úrokové miery a výnosy dlhopisov sú vlastne intenzita úrokovania, t. j. ich podkladové aktíva (dlhopisy) prinášajú

spojité príjmy. V Tab. 1 ponúkame prehľad o historických úrokových mierach, resp. výnosoch dlhopisov.

Tab. 1: Prehľad historických dát používaných pri kalibrácii modelov výnosových kriviek

	označenie úrokových mier, resp. výnosov	obdobie (od - do)	počet dátových bodov	frekvencia dát	vyjadrenie	zdroj
okamžitá úroková miera	short rate	jan. 2011 – sept. 2014	45	mesačná	p. a.	OECD ³
úrokové miery	EURIBOR 3M	jan. 2011 – aug. 2014	44	mesačná	p. a.	EMMI ⁴
	EURIBOR 6M		44			
	EURIBOR 12M		44			
výnosy slovenských vládnych dlhopisov	VSVD 2Y	jan. 2011 – aug. 2014	44	mesačná	p. a.	NBS ⁵
	VSVD 5Y		44			
	VSVD 10Y		44			

Naším cieľom pri modelovaní vyplácania dôchodkov z úspor v II. pilieri a odhade zisku poisťovne bolo to, aby sme vytvorili čo najrealistickejší model pre podmienky na Slovensku. Práve preto sme zvolili okamžité úrokové miery pre Slovenskú republiku, krátkodobé úrokové miery EURIBOR viazané na euro a výnosy slovenských dlhopisov.

Pri modelovaní trhových výnosov bezkupónových dlhopisov s nominálnou hodnotou jedna peňažná jednotka (tiež ich nazývame *štandardné dlhopisy*) používame:

- Coxov-Ingersollov-Rossov model kalibrovaný na základe dát z obdobia od januára 2011 do augusta 2014 (viď Tab. 1), označíme ako *CIR2011 model*,
- Coxov-Ingersollov-Rossov model kalibrovaný na základe dát z obdobia od januára 2014 do augusta 2014 (viď Tab. 1), označíme ako *CIR2014 model*,
- Nelsonov-Siegelov model kalibrovaný len na základe dát z augusta 2014 (EURIBOR 3M, EURIBOR 6M, EURIBOR 12M, VSVD 2Y, VSVD 5Y, VSVD 10Y), označíme ako *NS2014 model*,
- Svenssonov model kalibrovaný tiež len na základe posledných dát z augusta 2014 (viď bod c.), označíme ako *SV2014 model*.

V nasledujúcej časti tejto kapitoly sú zavedené označenia, ktoré sú dôležité pri modelovaní výnosov dlhopisov a odhadu budúceho zisku životnej poisťovne. Uvažujme časové body $t \in [0; \infty)$; $T \in [0; \infty)$; $t \leq T$ zadané pri danom časovom kroku. Označme symbolom r_t okamžitú úrokovú mieru v čase t vyjadrenú p. a. Ďalej označme zápisom $R(t, T)$ ročný výnos dlhopisu v čase t , pričom splatnosť dlhopisu (maturita) je v čase T . Platí vzťah: $r_t = R(t, t)$ pre všetky $t \in [0; \infty)$. Symbolom $P(t, T)$ označujeme hodnotu v čase t štandardného dlhopisu s maturitou T , pričom pri spojitom modeli úročenia platí (viď napríklad v knihe Melicherčík et al., 2005):

$$P(t, T) = \exp(-R(t, T) \times (T - t)) \Rightarrow R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T - t} \quad (1)$$

Uvažujme teraz klasický trojparametrový Coxov-Ingersollov-Rossov (CIR) model pre okamžitú úrokovú mieru podľa článku Cox, Ingersoll, Ross (1985) v tvare stochastickej diferenciálnej rovnice:

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t,$$

³ Historické dáta o okamžitej úrokovej miere (short rate) sú dostupné na adrese <<http://stats.oecd.org/index.aspx?querytype=view&queryname=86>>.

⁴ Historické dáta o úrokových mierach EURIBOR (3-mesačné, 6-mesačné, 12-mesačné) sú dostupné na adrese: <<http://www.emmi-benchmarks.eu/euribor-org/euribor-rates.html>>.

⁵ Historické dáta o ročných výnosoch slovenských vládnych dlhopisov sú dostupné na adrese: <http://www.nbs.sk/_img/Documents/STATIST/US/VDSVD_CR.xls>.

kde $\theta > 0, \kappa > 0, \sigma > 0$ sú reálne parametre CIR modelu a W_t je štandardný Brownov pohyb. Od vyššie uvedeného podkladového short rate CIR procesu sa dajú odvodiť hodnoty základných dlhopisov a platí:

$$P(r_0, t, T) \equiv P(t, T) = A(T) \times \exp(-B(T)r_0(t)), \quad (2)$$

kde funkcie $A(T) \equiv A(T, \theta, \kappa, \sigma, \lambda)$ a $B(T) \equiv B(T, \kappa, \sigma, \lambda)$ sú definované napríklad v knihe Kwok (1998), parameter λ vyjadruje tzv. trhovú cenu rizika (*market price of risk*) a $r_0(t)$ je začiatočná okamžitá úroková miera v čase t .

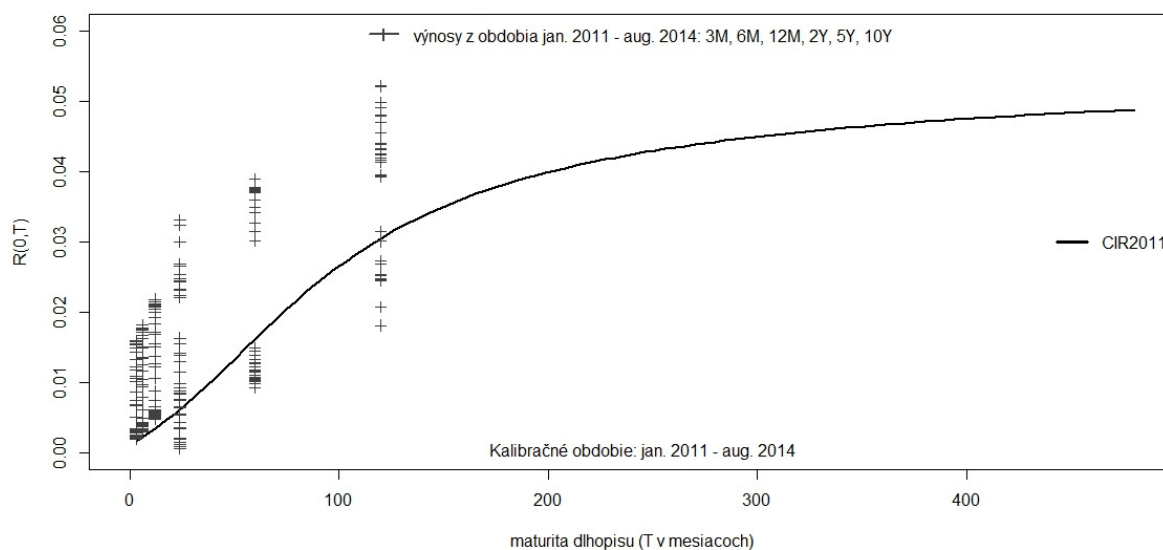
Kľúčovou úlohou bola správne odhadnúť neznáme parametre $\theta, \kappa, \sigma, \lambda$ z príslušných dátových súborov pri modeloch *CIR2011*, resp. *CIR2014*. Pri kalibrácii parametrov podkladových short rate procesov sme postupovali podľa článku Ševčovič, Urbánová Csajková (2005). Zvolili sme mesačný časový krok a dvojfázovú optimalizáciu. Pre *CIR2011 model* sme používali dáta z obdobia od januára 2011 do augusta 2014 a dostali sme nasledovné odhadnuté parametre:

$$\hat{\theta} = 0,00321477; \hat{\kappa} = 0,10401951; \hat{\sigma} = 0,01943799; \hat{\lambda} = -0,12910498.$$

Pomocou vyššie uvedených parametrov a rovnice (2) sme vypočítali hodnoty štandardných dlhopisov v čase 0 (teda v našom prípade v čase podpisu poisťnej zmluvy), pričom pre začiatočnú hodnotu (short rate procesu) sme zvolili okamžitú úrokovú mieru zo septembra 2014 (podľa OECD, vid' Tab. 1): $r_0(0) = 0,001$ p. a. Následne pomocou vzťahu (1) sme vyrátali ročné výnosy dlhopisov s maturitou T (*spot rate* $R(0, T)$) pre $T \in \{3, 4, 5, \dots, 480\}$ uvedený v mesiacoch⁶.

Po kalibrácii parametrov a odhade ročných výnosov nás zaujímala presnosť *CIR2011 modelu* voči originálnym historickým výnosom. Pri posúdení kvality fitu sme postupovali podľa článku Ševčovič, Urbánová Csajková (2005). Pre ukazovateľ *maximum likelihood ratio* (MLR) sme dostali hodnotu $MLR(CIR2011) = 0,94463$. Vidíme, že hodnota ukazovateľa $MLR(CIR2011)$ je blízko k jednej. To znamená, že viazaná maximálna hodnota funkcie vierohodnosti je blízko ku globálnej maximálnej hodnote funkcie vierohodnosti. Inými slovami, podkladový *CIR2011 model* nakalibrovaný dvojfázovou optimalizačnou metódou by mal byť použiteľný pre odhad celej časovej štruktúry výnosov bezkupónových dlhopisov. V prípade ďalšieho indikátora kvality modelu, nelineárneho koeficientu determinácie (*nonlinear R² ratio*), sme dostali: $R^2(CIR2011) = 0,69233$. Môžeme skonštantovať, že hodnota $R^2(CIR2011)$ je bližšie k hodnote 1 ako k hodnote 0. To znamená, že nakalibrovaná *CIR2011* výnosová krivka dostatočne dobre fituje reálne výnosy, teda opäť by sme ju mohli použiť na modelovanie skutočnej výnosovej krivky. Kvalitu fitu nakalibrovaného *CIR2011 modelu* môžeme vizuálne posúdiť aj pomocou Obr. 1.

⁶ Pri výpočte ročných výnosov dlhopisov sme zvolili časovú hranicu 480 mesiacov, teda 40 rokov. Presne takéto obdobie sme používali aj pri plánovanom vyplácaní dôchodkov z II. piliera, vid' kapitoly 4 a 5.



Obr. 1: Grafické posúdenie kvality fitu nakalibrovaného CIR2011 modelu a znázornenie pôvodných úrokových mier (3M, 6M, 12M) a výnosov dlhopisov (2Y, 5Y, 10Y) z obdobia od januára 2011 do augusta 2014

Pri kalibrácii *CIR2014* modelu sme postupovali analogicky ako pri odhade parametrov *CIR2011* modelu, len pri tejto druhej kalibrácii sme používali dáta z iného obdobia: od januára 2014 do augusta 2014. Dostali sme nižšie uvedené odhady parametrov podkladového *CIR2014* modelu:

$$\tilde{\theta} = 0,00071059; \tilde{\kappa} = 0,08483863; \tilde{\sigma} = 0,01003501; \tilde{\lambda} = -0,11825065.$$

V ďalšom kroku sme opäť vypočítali odhady hodnôt štandardných dlhopisov $P(0, T)$, resp. ročné výnosy $R(0, T)$; $T \in \{3, 4, 5, \dots, 480\}$ pri začiatočnej hodnote okamžitej úrokovej miery $r_0(0) = 0,001$ p. a. Pri posudzovaní presnosti odhadnutých výnosov v porovnaní s historickými výnosmi sme dostali hodnoty $MLR(CIR2014) = 0,97401$, resp. $R^2(CIR2014) = 0,67785$, čo znamená, že aj *CIR2014* model by mal byť použiteľný pre odhad celej časovej štruktúry výnosov bezkupónových dlhopisov. Odhadnuté výnosy a kvalitu fitu pri *CIR2014* modeli sme znázornili na Obr. 2.

Uvažujme teraz Nelsonov-Siegelov model (Nelson, Siegel, 1987) pre výnosovú krivku v čase $t = 0$ definovanú predpisom

$$R(t = 0, T) = \beta_0 + \beta_1 \frac{1 - \exp(-\xi T)}{\xi T} + \beta_2 \left(\frac{1 - \exp(-\xi T)}{\xi T} - \exp(-\xi T) \right),$$

kde $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \xi$ sú reálne parametre modelu a premenná T je maturita dlhopisu. Pri odhade parametrov sme využívali poslednú šesticu dát z nášho dátového súboru (t. j. dáta z augusta 2014 pre EURIBOR 3M, EURIBOR 6M, EURIBOR 12M, VSVD 2Y, VSVD 5Y, VSVD 10Y). Samotnú kalibráciu sme spravili v prostredí štatistického softvéru R (R Core Team, 2013) pomocou balíku *YieldCurve* (Guirrieri, 2010; Consiglio, Guirrieri, 2011) a dostali sme odhady

$$\hat{\beta}_0 = 0,0403697; \hat{\beta}_1 = -0,03712724; \hat{\beta}_2 = -0,04663509; \hat{\xi} = 0,0284603.$$

Vizuálny fit nakalibrovaného *NS2014* modelu môžeme posúdiť pomocou Obr. 2.

Poznámka. Nelsonova-Siegelova výnosová krivka je určená štyrmi parametrami. Vyššie uvedené *NS2014* model sme kalibrovali pomocou šiestich reálnych výnosov (použili sme dáta

z augusta 2014), takže sme očakávali dobrú kvalitu fitu, čo sa aj potvrdilo: pre *NS2014 model* sme dostali koeficient determinácie $R^2 = 0,95588$.

Naším posledným modelom, ktorý sme používali na modelovanie výnosov, bol Svenssonov model (Svensson, 1994) definovaný vzťahom

$$R(t=0, T) = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{1 - \exp\left(-\frac{T}{\lambda_1}\right)}{\frac{T}{\lambda_1}} + \alpha_2 \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{T}{\lambda_1}\right)}{\frac{T}{\lambda_1}} - \exp\left(-\frac{T}{\lambda_1}\right) \right) + \alpha_3 \left(\frac{1 - \exp(-T/\lambda_2)}{T/\lambda_2} - \exp(-T/\lambda_2) \right),$$

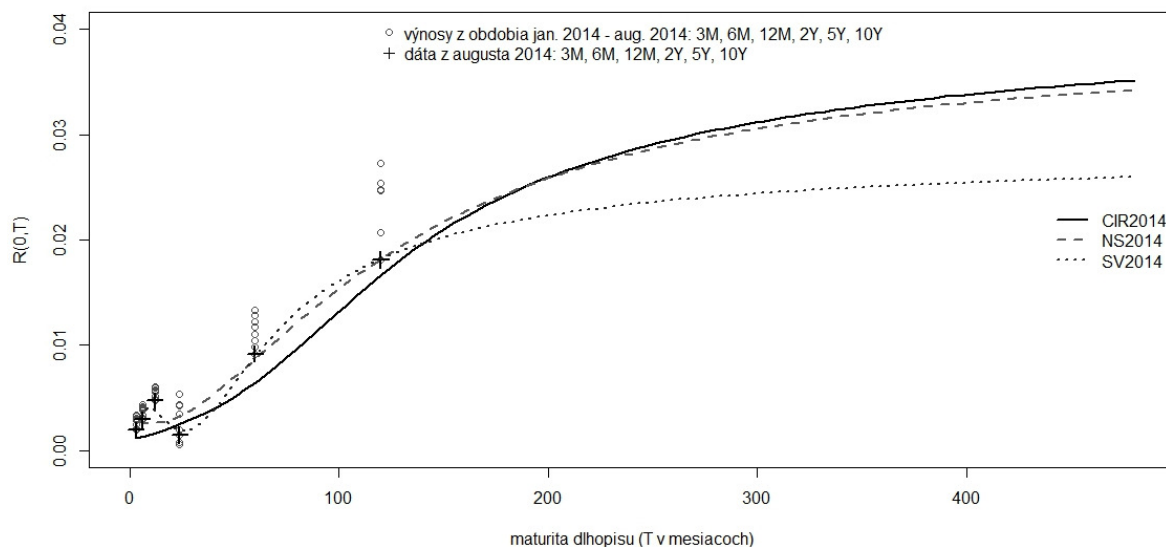
kde $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_1, \lambda_2$ sú reálne parametre modelu a premenná T je maturita dlhopisu. Pri odhade parametrov sme postupovali analogicky ako v prípade *NS2014 modelu*: používali sme dáta z augusta 2014 a aplikovali sme balík štatistického softvéru R s názvom `YieldCurve`. Po vykonaní postupu sme dostali nasledovných šesť parametrov *SV2014 modelu*:

$$\hat{\alpha}_0 = 0,02853997; \hat{\alpha}_1 = -0,03230188; \hat{\alpha}_2 = -27344,19;$$

$$\hat{\alpha}_3 = 27344,15; \hat{\lambda}_1 = 10,03748; \hat{\lambda}_2 = 10,03746.$$

Kvalitu odhadnutého *SV2014 modelu* môžeme vizuálne zhodnotiť pomocou Obr. 2.

Poznámka. Svenssonova výnosová krivka pre spot rate je určená šiestimi parametrami. Naš *SV2014 model* sme kalibrovali pomocou šiestich reálnych výnosov, takže sme očakávali skoro dokonalú kvalitu fitu, čo sa aj potvrdilo: pre *SV2014 model* sme dostali koeficient determinácie $R^2 = 0,99152$.



Obr. 2: Grafické posúdenie kvality fitu nakalibrovaného CIR2014 modelu, NS2014 modelu a SV2014 modelu a znázornenie pôvodných úrokových mier (3M, 6M, 12M) a výnosov dlhopisov (2Y, 5Y, 10Y) z obdobia od januára 2014 do augusta 2014

3. Demografické modely vývoja úmrtnosti a prežívania

V rámci našich výpočtov sme predpokladali, že výška ročnej dôchodkovej dávky sa počíta pri spoločných úmrtnostných tabuľkách pre mužov a ženy Štatistického úradu Slovenskej republiky za rok 2011 (*ÚT ŠÚSR 2011 spolu*) (viď ŠÚSR, online). Označme skratkou **DEM1** základný demografický model založený na *ÚT ŠÚSR 2011 spolu* (podrobnejšie v 5. kapitole).

Poisťovňa pri výpočte svojho budúceho zisku v súvislosti s doživotným dôchodkom by mala brať do úvahy aj efekt dlhovekosti budúcich dôchodcov. Práve preto sme definovali aj ďalšie modely, označené skratkami **DEM2**, resp. **DEM3**, ktoré sú z pohľadu životnej poisťovne pesimistickejšie, pretože berú do úvahy možnosť zníženia úmrtnostných mier, a tak aj možnú dlhovekosť poistených osôb.

Nech q_x značí pravdepodobnosť, že osoba vo veku x rokov zomrie do jedného roka. Symbolom $p_x = 1 - q_x$ označujeme pravdepodobnosť, že x -ročná osoba prežije najbližší rok. Faktory prežitia k rokov označíme ${}_k p_x$ pre $k = 1, 2, \dots$ a definujeme ich vzťahom

$${}_k p_x = \prod_{j=0}^{k-1} p_{x+j}. \quad (3)$$

Nech T_x , resp. K_x označuje budúcu dĺžku života, resp. skrátenú budúcu dĺžku života x -ročnej osoby. Symbolmi $E[T_x]$, resp. $E[K_x]$ značíme očakávanú budúcu dĺžku života, resp. skrátenú očakávanú budúcu dĺžku života osoby vo veku x rokov. Za platnosti určitých predpokladov približne platí: $E[T_x] \approx E[K_x] + \frac{1}{2}$. Skrátenú očakávanú budúcu dĺžku života môžeme počítat podľa formuly

$$E[K_x] = \sum_{k=1}^{100-x} {}_k p_x.$$

Očakávaná dĺžka života novonarodenej osoby v *ÚT ŠÚSR 2011 spolu* je $E[T_0] = 75,85$ rokov. Podľa prognózy Inštitútu informatiky a štatistiky (INFOSTAT, online) očakávaná budúca dĺžka novonarodenej ženy v roku 2050 bude 84,01 rokov (podľa stredného variantu), kým očakávaná budúca dĺžka novonarodeného muža v roku 2050 bude 77,13 rokov (tiež podľa stredného variantu). Ako odhad očakávanej budúcej dĺžky novonarodenej osoby (bez špecifikácie pohlavia) v roku 2050 sme zobrali aritmetický priemer vyššie uvedených hodnôt: $E[T'_0] = 80,57$ rokov a skrátenú očakávanú budúcu dĺžku novonarodenej osoby sme odhadli (podľa vyššie uvedeného približného vzťahu) hodnotou $E[K'_0] = 80,07$ rokov. Pravdepodobnosti úmrtia, resp. pravdepodobnosti prežitia sme upravili podľa postupu uvedeného v článku Pastor, Raučinová (1991): predpokladali sme, že pravdepodobnosti úmrtia sa znížia v každom veku rovnakým koeficientom $u \in (0; 1)$. Nové pravdepodobnosti úmrtia, resp. pravdepodobnosti prežitia sme počítali nasledovne:

$$q'_x = (1 - u)q_x, \quad p'_x = 1 - q'_x = 1 - (1 - u)q_x \quad \text{pre } x = 0, 1, \dots, 100,$$

kde za q_x sme zobrali hodnoty z *ÚT ŠÚSR 2011 spolu* (t. j. zo základného modelu **DEM1**). Nové faktory prežitia pre novonarodenú osobu ${}_k p'_0$ sme počítali dosadením pravdepodobností prežitia p'_x do vzťahu (3). Neznámy parameter u sme nastavili tak, aby platilo

$$E[K'_0] = \sum_{k=1}^{100} {}_k p'_0 = \sum_{k=1}^{100} \prod_{j=0}^{k-1} p'_j = \sum_{k=1}^{100} \prod_{j=0}^{k-1} (1 - (1 - u)q_j) = 80,07.$$

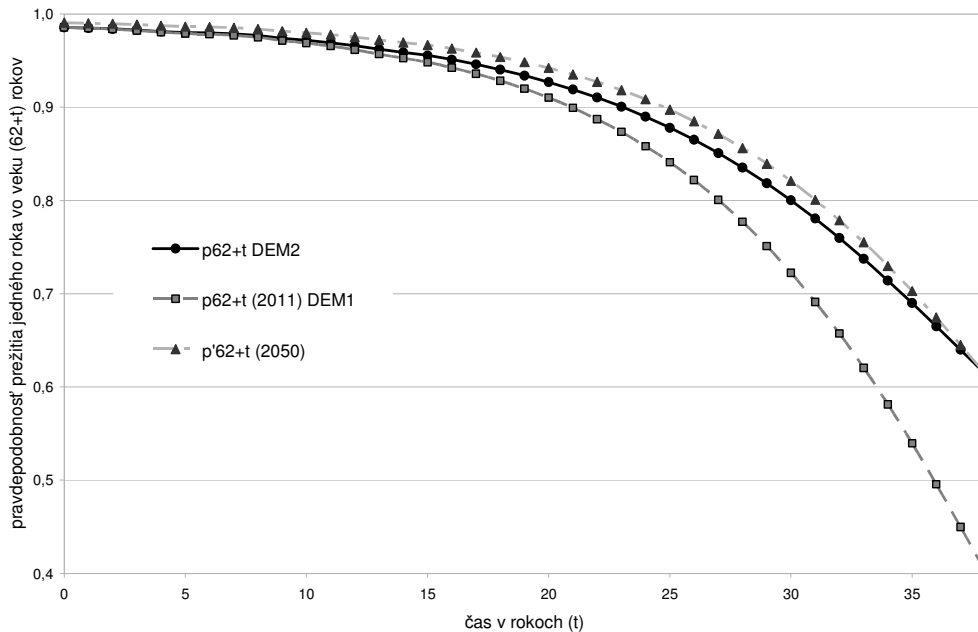
Postupným skúšaním rôznych hodnôt parametra u sme dostali vhodnú hodnotu $u = 35,47\%$. Získali sme tak sady pravdepodobností $p'_0, p'_1, \dots, p'_{100}$, resp. ${}_0 p'_0, {}_2 p'_0, {}_3 p'_0, \dots, {}_{100} p'_0$, ktoré sú z hľadiska poisťovne pesimistickejšie, pretože sú väčšie ako pôvodné pravdepodobnosti zo základného modelu **DEM1**.

V súlade s cieľmi uvedenými v úvodnej časti článku sme v ďalšom postupe uvažovali poistenú osobu, budúceho dôchodcu, vo veku $x = 62$ rokov. V našom modeli **DEM2** sme skonštruovali postupný prechod od pôvodných pravdepodobností $p_{62}, p_{63}, \dots, p_{100}$ k novým pravdepodobnostiam $p'_{62}, p'_{63}, \dots, p'_{100}$ a získali sme tak finálne pravdepodobnosti $\tilde{p}_{62}, \tilde{p}_{63}, \dots, \tilde{p}_{100}$ (viď Obr. 3):

$$\tilde{p}_{62+t} = p_{62+t} + \frac{t}{38} (p'_{62+t} - p_{62+t})$$

$$\tilde{p}_{62+t} = p_{62+t} + \frac{t}{38} (1 - (1 - u)(1 - p_{62+t}) - p_{62+t})$$

$$\tilde{p}_{62+t} = p_{62+t} + \frac{t}{38} u(1 - p_{62+t}) \quad \text{pre } t = 0, 1, \dots, 38.$$



Obr. 3: Znáznornenie pravdepodobností prežitia \tilde{p}_{62+t} v modeli DEM2 (stredná krivka): postupný prechod od pravdepodobností prežitia p_{62+t} k hodnotám p'_{62+t}

V treťom demografickom modeli, ktorý sme označili skratkou **DEM3**, sme používali odporúčanie Európskeho orgánu pre poisťovníctvo a dôchodkové poistenie zamestnancov (*European Insurance and Occupational Pensions Authority*, EIOPA). V odporúčaných stresových testoch organizácie EIOPA pre dlhovekosť poistených osôb sa obvykle používa koeficient zníženia úmrtnosti 10%, resp. 18% s okamžitou platnosťou, takzvaný jednorazový šok poklesu pravdepodobností úmrtia (viď EIOPA, online). V predpokladoch **DEM3** sme zvolili vyššiu zo spomínaných hodnôt, t. j. predpokladali sme, že pravdepodobnosť úmrtia sa zníži v každom veku o 18%. Modifikované pravdepodobnosti úmrtia, resp. pravdepodobnosti prežitia sme počítali nasledovne:

$$\bar{q}_x = (1 - 0,18)q_x, \quad \bar{p}_x = 1 - \bar{q}_x = 1 - (1 - 0,18)q_x \quad \text{pre } x = 0, 1, \dots, 100,$$

kde za q_x sme zobrali hodnoty zo základného demografického modelu **DEM1**.

4. Metóda spárovania aktív a pasív životnej poisťovne

Ako sme už uviedli v úvodnej časti, pri uzatvorení zmluvy o vyplácaní doživotných predlehotných dôchodkov z úspor v II. pilieri poisťovňa inkasuje jednorazové poistné. V našich modelových výpočtoch sme predpokladali, že poisťovňa v čase 0 investuje do τ -ročných dlhopisov presne toľko peňazí, koľko bude potrebovať na vyplatenie očakávanej dôchodkovej dávky⁷ v čase τ , pre $\tau \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, kde n je maximálna doba vyplácania dôchodku. To znamená, že pri tejto zjednodušenej (statickej) investičnej stratégii poisťovňa

⁷ Pre jednoduchosť predpokladáme, že ak poisťovňa nemá k dispozícii peniaze na vyplatenie dôchodku, tak si dokáže požičať na trhu pri rovnakej úrokovej miere, pri ktorej by sama investovala.

počas trvania poistnej doby už nespraví žiadne investičné rozhodnutia (jedine v čase podpisu poistnej zmluvy poisťovňa rozloží celé poistné do dlhopisov s rôznymi maturitami a predpokladá, že jej príjmy z investícií presne pokryjú očakávané dôchodkové dávky), preto nazývame našu analýzu statickou. K tomu je potrebné dodať aj ďalšie modelové predpoklady:

- 1) na trhu existuje plná škála dlhopisov z hľadiska doby splatnosti, t. j. dlhopisy s 1-ročnou, 2-ročnou, 3-ročnou, ..., n -ročnou splatnosťou,⁸
- 2) v poisťovni uzatvorí zmluvu o doživotnom dôchodkovom poistení veľký počet poistencov, a tak poisťovňa môže používať princíp veľkého (fiktívneho) súboru a pracovať na báze očakávaných dávok,
- 3) poisťovňa vypláca predlehotný dôchodok raz ročne, v rovnakej výške.⁹

Z vyššie uvedenej jednoduchej investičnej schémy vyplýva, že v tomto prípade sa dá používať zjednodušená (statická) verzia metódy spárovania aktív a pasív. Poisťovňa k záväzku splatnému v čase τ (očakávanému poistnému plneniu) pripojí aktívum (štandardný dlhopis) s rovnakou budúcou hodnotou a dobou splatnosti. Označme symbolom c_τ ; $\tau \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ relatívnu časť jednorazového poistného P , ktoré sa investuje do τ -ročných štandardných dlhopisov. Nech S označuje ročnú výšku dôchodkovej dávky. Potom platí:

$$c_\tau \times (P - S) = S \times {}_\tau p_x \times \exp(-R(0, \tau) \times \tau),$$

kde ${}_t p_x$ je faktor prežitia τ rokov (vo výpočtoch získaný z modelov **DEM1**, **DEM2**, resp. **DEM3**) a $R(0, \tau)$ je výnos τ -ročného štandardného dlhopisu (odhadovaný modelmi *CIR2011*, *CIR2014*, *NS2014*, resp. *SV2014*). Poznamenáme, že poisťovňa v čase 0 síce inkasuje od poistenca čiastku P , no hneď nato musí vyplatiť poistencovi prvú predlehotnú dôchodkovú dávku S , teda ostane jej suma $P - S$, ktorú následne rozloží do investícií. Po vyjadrení hľadaných investičných percent sme dostali

$$c_\tau = \frac{S \times {}_\tau p_x \times \exp(-R(0, \tau) \times \tau)}{P - S} \quad \text{pre } \tau = 1, 2, \dots, \tau_0,$$

ak platí hraničná podmienka $\sum_{h=1}^{\tau_0} c_h \leq 1$. Ak $\tau_0 = n - 1$, tak to znamená, že pri daných demografických predpokladoch a danom vývoji investičných výnosov inkasované poistné postačí na pokrytie očakávaných dôchodkových dávok a v hraničnom čase n poisťovňa nebude vykazovať stratu. V takomto prípade nadbytok jednorazového poistného investuje poisťovňa v čase 0 do n -ročných dlhopisov, pretože tie majú najvyšší ročný výnos (aspoň podľa našich štyroch modelov, viď v 2. kapitole). Platí teda: $c_n = 1 - \sum_{\tau=1}^{n-1} c_\tau$.

V opačnom prípade, teda ak $\tau_0 < n - 1$, jednorazové poistné P by nestačilo na vyrovnanie záväzkov a v posledných rokoch poistenia by si poisťovňa musela požičať. Predpokladali sme, že v takomto prípade si poisťovňa dokáže požičať na trhu pri rovnakej úrokovej miere, pri ktorej by ona sama investovala. Označme premennou $\tau_1 \in \mathbb{N}$, $\tau_1 < n - 1$ časový bod, pre ktorý platí $\sum_{\tau=1}^{\tau_1} c_\tau < 1$ a zároveň $\sum_{\tau=1}^{\tau_1+1} c_\tau \geq 1$. Následne položíme $c_{\tau_0+1} = 1 - \sum_{\tau=1}^{\tau_0} c_\tau$ a $c_{\tau_0+2} = c_{\tau_0+3} = \dots = c_{n-1} = 0$. Takouto úpravou sme vlastne zabezpečili, aby aj v tomto druhom prípade platilo: $\sum_{\tau=1}^{\tau_0+1} c_\tau = \sum_{\tau=1}^n c_\tau = 1$.

Čistá akumulovaná hodnota poistenia (*net accumulated value*, *NAV*) v čase $t \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ v prípade predlehotného dôchodku s jednorazovo plateným poistným sa definuje vzťahom

$$NAV_t \equiv NAV_t(c_t) = -S \times {}_t p_x + (P - S) \times c_t \times \exp(R(0, t) \times t).$$

⁸ V realite takúto konštrukciu je možné dosiahnuť vhodnou kombináciou kupónových dlhopisov.

⁹ V praxi starobné dôchodky sa vyplácajú mesačnou frekvenciou, v našich modelových výpočtoch sme však predpokladali ročný interval vyplácania dôchodkových dávok.

Hodnota NAV_t neobsahuje všetky peňažné toky súvisiace s predlehotným dôchodkom, len tie, ktoré majú „splatnosť“ práve v čase t . Všimnime si, že ak $\tau_0 = n - 1$, tak $NAV_1 = NAV_2 = \dots = NAV_{n-1} = 0$, pretože v každom celočíselnom časovom bode (vo výročiach uzatvorenia poistnej zmluvy) investičné príjmy poisťovne presne vyrovnajú očakávané výdavky (vyplýva to z investičnej stratégie skonštruovanej pomocou spárovania aktív a pasív) a $NAV_n \geq 0$, t. j. zisk sa koncentruje do maximálneho času ukončenia poistného kontraktu. V druhom prípade, keď $\tau_0 < n - 1$, platí $NAV_1 = NAV_2 = \dots = NAV_{\tau_1} = 0$, a zároveň $NAV_{\tau_1+1} \leq 0$, $NAV_{\tau_1+2} < 0$, ..., $NAV_{n-1} < 0$, teda poisťovňa si bude musieť požičiavať na vyplatenie dôchodkových dávok a utrpí stratu.

Nech $DVFP$ označuje diskontovanú hodnotu budúceho zisku poisťovne (*discounted value of future profits*) a nech platí

$$DVFP = \sum_{t=1}^n NAV_t \times \exp(-R(0, t) \times t), \quad (4)$$

kde $R(0, t)$ znamená aj v tomto prípade (odhadovaný) ročný výnos t -ročného štandardného dlhopisu. V rámci našich štúdií sme práve pomocou veličiny $DVFP$ odhadovali súčasnú hodnotu zisku/straty poisťovne (viď v 5. kapitole).

5. Výsledky výpočtov

Pri našich výpočtoch sme aplikovali vyššie definované modely, predpoklady a označenia. Uvažovali sme teda poistenca (dôchodcu) vo veku $x = 62$ rokov s úsporami v II. pilieri vo výške $P = 15000$ eur. Ako sme to už uviedli vo 4. kapitole, v našich výpočtoch sme predpokladali ročné intervaly vyplácania dôchodkových dávok (namiesto mesačnej frekvencie vyplácania aplikovanej v praxi). Pomocou tohto predpokladu sme zjednotili frekvencie platenia dávok a maturovania dlhopisov.¹⁰ Maximálnu dobu vyplácania dôchodku sme obmedzili na $n = 40$ rokov. Ročnú výšku dôchodkovej dávky sme počítali pomocou klasického netto-princípu životného poistenia (viď napríklad v knihe Potocký, 2012):

$$P = S \times \ddot{a}_{62} = S \times \ddot{a}_{62:\overline{40}|i} = S \times \sum_{t=0}^{39} {}_t p_x \times (1 + i)^{-t}, \quad (5)$$

kde \ddot{a}_{62} označuje súčasnú hodnotu predlehotného dôchodku, $i = 0,019$ p. a. je (maximálna) technická úroková miera a ${}_t p_x$ pre $t = 0, 1, 2, \dots, 39$ sú faktory prežitia počítané podľa *ÚT ŠÚSR 2011 spolu* (t. j. na základe modelu **DEM1**). Po vykonaní výpočtov sme dostali ročnú dávku vo výške $S = 954,22$ eur. V ďalších krokoch sme postupne vypočítali očakávané dávky na začiatku jednotlivých rokov poistenia, aplikovali metódu spárovania aktív a pasív, kalkulovali investičné percentá c_t a počítali čistú akumulovanú hodnotu poistenia. V Tab. 2 sme uviedli výsledky štúdií: odhadnutú diskontovanú hodnotu budúceho zisku poisťovne ($DVFP$) pri rôznych demografických nastaveniach modelu a rôznych predpokladoch ohľadom výnosov dlhopisov.

Tab. 2: Hrubý odhad diskontovanej hodnoty budúceho zisku poisťovne (uvedená v eurách) v prípade doživotného dôchodku pri rôznych modeloch výnosových kriviek, rôznych demografických predpokladoch a jednorazovom poistnom vo výške 15000 eur

	<i>DVFP (CIR2011)</i>	<i>DVFP (CIR2014)</i>	<i>DVFP (NS2014)</i>	<i>DVFP (SV2014)</i>
DEM1	1911,30	360,76	477,48	119,41
DEM2	1523,75	-132,59	-41,93	-416,25
DEM3	1257,96	-402,64	-303,28	-645,14

¹⁰ V prípade sofistikovaného dynamického modelu s pravidelným prúdením sporiteľov by sme mohli aplikovať aj mesačnú frekvenciu vyplácania dôchodkových dávok. V zásade by však aj tento model dával podobné výsledky ako náš jednoduchý statický model.

Z Tab. 2 vidíme, že pri základnom demografickom modeli **DEM1** by poisťovňa skončila so ziskom pri všetkých štyroch modeloch výnosov dlhopisov. Je to hlavne kvôli tomu, že všetky naše modely výnosov dlhopisov predpovedajú vyššie výnosy slovenských dlhopisov ako je technická úroková miera $i = 0,019$ p. a., pri ktorej sa kalkulovala ročná výška dôchodkovej dávky. Najoptimistickejší odhad pre výnosy dlhopisov a veličinu *DVFP* nám dal *CIR2011 model*, pretože kalibračný súbor tohto modelu obsahoval aj výnosy z optimistického obdobia 2011-2012. Pri pesimistickejších demografických predpokladoch z **DEM2** jedine v prípade *CIR2011 modelu* by poisťovňa dosiahla zisk v maximálnom čase ukončenia poistného kontraktu, pri ostatných troch modeloch by skončila v strate. Na základe výsledkov uvedených v Tab. 2. môžeme skonštatovať, že najhorším scenárom z hľadiska poisťovne je **DEM3**, pričom globálne najhoršou kombináciou je **DEM2** + *SV2014 model*, pri ktorej by poisťovňa utrpela stratu vo výške 645,14 peňažných jednotiek. Z toho vyplýva, že poisťovní by nemuselo stačiť jednorazové poistné inkasované z II. dôchodkového piliera na vyplácanie doživotných dôchodkových dávok počítaných pri základných demografických predpokladoch a na základe klasického netto-princípu.

6. Záver

Vyplácanie doživotných dôchodkov z úspor v II. dôchodkovom pilieri môže prinášať pre životné poisťovne viaceré riziká. Okrem demografických, trhových a úrokových rizík, ktoré sme skúmali v rámci tohto príspevku, to môžu byť aj rôzne politické, menové alebo sociálne riziká. V každom prípade, životné poisťovne pri uzatvorení zmlúv o doživotných anuitách by mali brať do úvahy, že sa jedná o dlhodobý poistný kontrakt ovplyvnený viacerými rizikovými faktormi a zodpovedne stanoviť výšku dohodnutých dôchodkových dávok. V našich štúdiách sme analyzovali vplyv premenlivých trhových výnosov a rôznych demografických predpokladov na zisk poisťovne. V úvodnej časti sme ponúkli motiváciu na výskum problematiky a stanovili sme základné predpoklady. V druhej, resp. tretej kapitole sme uviedli kalibráciu štyroch modelov pre výnosy dlhopisov, resp. troch demografických modelov. V predposlednej kapitole sme definovali metódu spárovania aktív a pasív. V záverečnej piatej kapitole sme zhrnuli výsledky našich analýz a výpočtov.

PodĎakovanie

Príprava článku bola podporovaná grantom APVV-0465-12.

Literatúra

- CONSIGLIO, A. - GUIRRERI, S. S. 2011. Simulating the Term Structure of Interest Rates with arbitrary marginals. In: *International Journal of Risk Assessment and Management*, roč. 15, č. 4, September 2011.
- COX, J. - INGERSOLL, J. - ROSS, S. 1985. A theory of the term structure of interest rates. In: *Econometrica*, roč. 53, č. 2, s. 385-407.
- EIOPA [online]. EIOPA Stress Test 2014. [cit. 11.11.2014]. Dostupné na adrese: <https://eiopa.europa.eu/fileadmin/tx_dam/files/activities/financial_stability/insurance_stress_test_2014/eiopa-14-215_stress_test_2014_specifications.pdf>
- GUIRRERI, S. S. 2010. Simulating the Term Structure of Interest Rates with arbitrary marginals. University of Palermo - Department of Statistics and Mathematics "S. Vianelli".
- INFOSTAT [online]. Prognóza vývoja obyvateľstva SR do roku 2050. In: *Edícia: Akty*, Bratislava, november 2002. [cit. 21.10.2014]. Dostupné na adrese: <<http://www.infostat.sk/vdc/pdf/prognoza2050vdc2.pdf>>.
- KWOK, Y. K. 1998. *Mathematical Models of Financial Derivatives*. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag.

- MELICHERČÍK, I. - OLŠÁROVÁ, L. - ÚRADNÍČEK, V. 2005. *Kapitoly z finančnej matematiky*. Epos, Bratislava. ISBN 80-8057-651-3.
- NELSON, C. R. – SIEGEL, A. F. 1987. Parsimonious Modeling of Yield Curve. In: *Journal of Business* 1987, roč. 60, č. 4, s. 473-489.
- PASTOR, K. - RAUČINOVÁ, E. 1991. Parametrizácia úmrtnostných tabuliek a jej použitie v regionálnom plánovaní. In: *Acta Facultatis Rerum Naturalium Universitatis Comenianae*, s.119-124.
- POTOCKÝ, R. 2012. *Modely v životnom a neživotnom poistení*. Vydavateľstvo STATIS Bratislava. ISBN 978-80-85659-71-9.
- R CORE TEAM. 2013. *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <<http://www.R-project.org/>>.
- SVENSSON, L. E. O. 1994 [online]. Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-1994. In: *National Bureau of Economic Research Working Paper*, Cambridge, Massachusetts, september 1994, č. 4871. [cit. 12.11.2014]. Dostupné na adrese: <http://www.nber.org/papers/w4871.pdf?new_window=1>
- ŠEVČOVIČ, D. - URBÁNOVÁ CSAJKOVÁ, A. 2005. On a two-phase minmax method for parameter estimation of the Cox, Ingersoll, and Ross interest rate model. In: *Central European J. of Operation Research*, roč. 13, s. 169-188.
- ŠÚSR [online]. Tabuľky úmrtnosti (roky 1996 - 2013): Slovenská republika. In: *Obyvateľstvo a migrácia: Tabuľky života*. Štatistický úrad Slovenskej republiky. [cit. 21.10.2014]. Dostupné na adrese: <http://slovak.statistics.sk/wps/wcm/connect/221c1ae4-1e73-491a-ba30-744fba17f037/Umrtnostne_tabulky_SR_1996_2013.zip?MOD=AJPERES>.

Adresa autorov:

Igor Melicherčík, doc. Mgr. PhD.
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky,
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava
igor.melichercik@fmph.uniba.sk

Gábor Szűcs, Mgr.
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky,
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava
gabor.szucs@fmph.uniba.sk