

9. MODELOVÁNÍ PENZIJNÍCH SYSTÉMŮ

9.1. Modelování penzijních plánů typu DB a DC

Rozdíl mezi dávkově definovanými (DB) a příspěvkově definovanými (DC) penzijními plány byl již diskutován v odstavci 3.1.7. Pro připomenutí a s trochou nadsázky tento rozdíl spočívá v tom, zda od daného penzijního plánu např. chceme penzi na úrovni 40 % našeho posledního platu před odchodem do důchodu, nebo zda v rámci penzijního plánu chceme rozhodovat o našich naspořených penzijních aktivech a např. je při odchodu do důchodu svěřit profesionálnímu poskytovateli penzí (často životní pojišťovně úplně mimo náš původní penzijní plán). V této kapitole představíme modely penzijních plánů DB a DC ve spojitém čase navazující na modely z odstavce 8.4.2 a uvedeme některé výsledky, které lze na základě takového modelování získat (viz také Milevsky (2006)).

Model příspěvkově definovaného penzijního plánu

Příspěvkově definovaný penzijní plán (DC) předem definuje výši příspěvku (danou absolutní hodnotou, daným procentem z platu), který má účastník a/nebo sponzor odvádět (viz odstavce 3.1.7). Investiční riziko je v příspěvkově definovaném penzijním plánu na straně účastníka a nikoli na straně správce plánu (zaměstnavatele). To je také důvod proč od devadesátých let minulého století vidíme obecně masivní přechod od dávkově k příspěvkově definovaným penzijním plánům (a to i ve státní správě, např. u všech zaměstnanců některých států v USA apod.).

Poměrně univerzální model pro příspěvkově definovaný penzijní plán lze představit na základě vzorce pro výpočet roční anuitní platby pro účastníka, který po N letech aktivní účasti v takovém plánu uplatní v (důchodovém) věku x svůj nárok na penzi:

$$DC - \text{dávka} = \frac{\int_0^N c(t) \cdot e^{g(t)(N-t)} \cdot w(t) dt}{\bar{a}_x}, \quad (9.1.1)$$

kde čítec zlomku (9.1.1) představuje kapitál naspořený na účastníkově účtu během akumulací fáze. Tento kapitál je v důchodovém věku x anuitizován pomocí okamžitého anuitního faktoru \bar{a}_x (viz např. (8.4.20)) na doživotní anuitu. Přitom zde $c(t)$ označuje příspěvkovou sazbu (*contribution rate*) v čase t vyjádřenou procentem z platu, $g(t)$ je roční procento investičního růstu (*investment growth*) v čase t a $w(t)$ je výše platu (*wage*) vyjádřená jako platová intenzita v čase t (platové příspěvky během kumulací fáze jsou tedy úročeny podle investiční výkonnosti penzijního plánu a pomocí příslušného integrálu kumulovány k důchodovému věku x).

Tab. 9.1.1a. Roční anuitní platby v příspěvkově definovaném penzijním plánu při třicetileté účasti ($N=30$) do důchodového věku $x=65$ s počátečním ročním platem $w=240\,000$ Kč, ročním konstantním růstem $k=1\%$ a okamžitými penzijními faktory \bar{a}_{65} pro muže a ženy z tab. 8.4.1a pro úrokovou míru $r=2,5\%$ (tj. odhadnuté podle úmrtnostních tabulek mužů a žen v České republice v roce 2010 s využitím Gompertzova zákona úmrtnosti)

Roční anuitní platby (v Kč) v penzijním plánu DC (ČR 2010)										
	g=0,5%		g=1%		g=1,5%		g=2%		g=2,5%	
c	muži	ženy	muži	ženy	muži	ženy	muži	ženy	muži	ženy
2%	15 319	12 889	16 496	13 880	17 798	14 975	19 238	16 187	20 833	17 529
3%	22 978	19 334	24 744	20 820	26 696	22 463	28 857	24 280	31 250	26 294
4%	30 637	25 778	32 992	27 760	35 595	29 950	38 476	32 374	41 667	35 058
5%	38 296	32 223	41 240	34 700	44 494	37 438	48 094	40 467	52 083	43 823
6%	45 956	38 667	49 489	41 640	53 393	44 925	57 713	48 560	62 500	52 588
8%	61 274	51 557	65 985	55 520	71 191	59 900	76 951	64 747	83 333	70 117
10%	76 593	64 446	82 481	69 400	88 988	74 875	96 189	80 934	104 166	87 646
12%	91 911	77 335	98 977	83 280	106 786	89 850	115 427	97 121	125 000	105 175

Roční anuitní platby (v Kč) v penzijním plánu DC (ČR 2010) (pokrač.)										
	g=3%		g=4%		g=5%		g=6%		g=7%	
c	muži	ženy	muži	ženy	muži	ženy	muži	ženy	muži	ženy
2%	22 603	19 018	26 753	22 510	31 894	26 836	38 290	32 217	46 278	38 938
3%	33 905	28 527	40 130	33 765	47 841	40 254	57 435	48 326	69 417	58 407
4%	45 206	38 037	53 506	45 021	63 788	53 672	76 579	64 434	92 555	77 877
5%	56 508	47 546	66 883	56 276	79 736	67 090	95 724	80 543	115 694	97 346
6%	67 809	57 055	80 260	67 531	95 683	80 508	114 869	96 651	138 833	116 815
8%	90 412	76 073	107 013	90 041	127 577	107 344	153 159	128 869	185 111	155 753
10%	113 015	95 092	133 766	112 551	159 471	134 180	191 449	161 086	231 389	194 692
12%	135 618	114 110	160 519	135 062	191 365	161 016	229 738	193 303	277 666	233 630

Tab. 9.1.1b. Náhradové poměry v příspěvkově definovaném penzijním plánu při třicetileté účasti ($N = 30$) do důchodového věku $x = 65$ s počátečním ročním platem $w = 240\,000$ Kč, ročním konstantním růstem $k = 1\%$ a okamžitými penzijními faktory \bar{a}_{65} pro muže a ženy z tab. 8.4.1a pro úrokovou míru $r = 2,5\%$ (tj. odhadnuté podle úmrtnostních tabulek mužů a žen v České republice v roce 2010 s využitím Gompertzova zákona úmrtnosti)

Náhradové poměry v penzijním plánu DC (ČR 2010)										
c	$g=0,5\%$		$g=1\%$		$g=1,5\%$		$g=2\%$		$g=2,5\%$	
	muži	ženy	muži	ženy	muži	ženy	muži	ženy	muži	ženy
2%	4,7%	4,0%	5,1%	4,3%	5,5%	4,6%	5,9%	5,0%	6,4%	5,4%
3%	7,1%	6,0%	7,6%	6,4%	8,2%	6,9%	8,9%	7,5%	9,6%	8,1%
4%	9,5%	8,0%	10,2%	8,6%	11,0%	9,2%	11,9%	10,0%	12,9%	10,8%
5%	11,8%	9,9%	12,7%	10,7%	13,7%	11,6%	14,8%	12,5%	16,1%	13,5%
6%	14,2%	11,9%	15,3%	12,9%	16,5%	13,9%	17,8%	15,0%	19,3%	16,2%
8%	18,9%	15,9%	20,4%	17,1%	22,0%	18,5%	23,8%	20,0%	25,7%	21,6%
10%	23,6%	19,9%	25,5%	21,4%	27,5%	23,1%	29,7%	25,0%	32,2%	27,1%
12%	28,4%	23,9%	30,6%	25,7%	33,0%	27,7%	35,6%	30,0%	38,6%	32,5%

Náhradové poměry v penzijním plánu DC (ČR 2010) (pokrač.)										
c	$g=3\%$		$g=4\%$		$g=5\%$		$g=6\%$		$g=7\%$	
	muži	ženy	muži	ženy	muži	ženy	muži	ženy	muži	ženy
2%	7,0%	5,9%	8,3%	6,9%	9,8%	8,3%	11,8%	9,9%	14,3%	12,0%
3%	10,5%	8,8%	12,4%	10,4%	14,8%	12,4%	17,7%	14,9%	21,4%	18,0%
4%	14,0%	11,7%	16,5%	13,9%	19,7%	16,6%	23,6%	19,9%	28,6%	24,0%
5%	17,4%	14,7%	20,6%	17,4%	24,6%	20,7%	29,5%	24,9%	35,7%	30,0%
6%	20,9%	17,6%	24,8%	20,8%	29,5%	24,9%	35,5%	29,8%	42,9%	36,1%
8%	27,9%	23,5%	33,0%	27,8%	39,4%	33,1%	47,3%	39,8%	57,1%	48,1%
10%	34,9%	29,4%	41,3%	34,7%	49,2%	41,4%	59,1%	49,7%	71,4%	60,1%
12%	41,9%	35,2%	49,5%	41,7%	59,1%	49,7%	70,9%	59,7%	85,7%	72,1%

Ve vzorci (9.1.1) je navíc možné zohlednit platový růst, např. jako

$$w(t) = w \cdot e^{k \cdot t} \quad (9.1.2)$$

při pravidelném platovém růstu k procent ročně výchozího platu $w(0) = w$. Při konstantní příspěvkové sazbě $c(t) = c$ a konstantním investičním růstu $g(t) = g$ pak vzorec (9.1.1) přechází do tvaru

$$DC - \text{dávka} = \frac{\int_0^N c \cdot e^{g(N-t)} \cdot w \cdot e^{kt} \, ds}{\bar{a}_x} = \frac{c \cdot w \cdot e^{g \cdot N}}{k - g} \cdot (e^{(k-g) \cdot N} - 1) / \bar{a}_x \quad (9.1.3)$$

V tab. 9.1.1a jsou podle (9.1.3) vypočteny roční DC-dávky (anuitní platby) při třicetileté účasti ($N = 30$) do důchodového věku $x = 65$ s počátečním ročním platem $w = 240\,000$ Kč a ročním platovým růstem $k = 1\%$ pro vybrané hodnoty příspěvkové sazby c a investičního růstu g ; přitom potřebné penzijní faktory \bar{a}_{65} pro muže a ženy jsou převzaty z tab. 8.4.1a pro úrokovou míru $r = 2,5\%$ (tj. jsou vypočteny podle úmrtnostních tabulek mužů a žen v České republice v roce 2010 s využitím odhadnutého Gompertzova zákona úmrtnosti a r odpovídá horní hranici pro tzv. technickou úrokovou míru, která byla podle legislativní vyhlášky platná pro dlouhodobé produkty komerčního životního pojištění v České republice v roce 2012). Např. při příspěvkové sazbě $c = 5\%$ a investiční výkonnosti $g = 2\%$ činí anuitní platba pro muže 48 094 Kč a pro ženy 40 467 Kč ročně (tj. zhruba 4 010 Kč a 3 370 Kč měsíčně). Speciálně výše posledního ročního platu před odchodem do důchodu je $w(30) = 240\,000 \cdot \exp(0,01 \cdot 30) = 323\,966$ Kč, takže např. náhradový poměr opět při příspěvkové sazbě $c = 5\%$ a investiční výkonnosti $g = 2\%$ činí pro muže 14,8% a pro ženy 12,5% (viz tab. 9.1.1b). Zřejmě vyšší příspěvková sazba či vyšší investiční výkonnost znamená vyšší penzi a naopak. V praxi je samozřejmě předpoklad o konstantní výši parametrů c , g a k během delšího časového horizontu nerealistický (např. příspěvková sazba $c(t)$ vzhledem ke kariéernímu růstu bývá na počátku akumulací fáze nižší než v pozdějších letech atd.); nestabilita či náhodnost některých parametrů v (9.1.3) je diskutována mimo jiné v dalším textu.

Je užitečné ještě jednou zdůraznit, že aktivita některých příspěvkově definovaných penzijních plánů se týká jen kumulace účastnického kapitálu v čitateli (9.1.1) a ten je k důchodovému věku x předán (plně nebo zčásti) účastníkovi jako jednorázové vyrovnání (*lump sum*) nebo komerčnímu poskytovateli anuit jako jednorázové pojistné pro zakoupení příslušné penze. Např. v předchozím příkladě činí tento nakumulovaný kapitál (jak pro muže, tak pro ženu) celkem 566 712 Kč. Na druhé straně bývá použití takových penzijních úspor obvykle velmi přísně regulováno (zvláště když zde funguje státní podpora ve formě státního příspěvku nebo daňového zvýhodnění): např. je předepsáno, kolik může účastník v jednotlivých letech anuitní (dekumulační) fáze z těchto peněz maximálně „utrátit“.

Dalším důležitým faktorem je v tomto kontextu inflace. Málokterý příspěvkově definovaný penzijní plán vyplácí anuitní platby v takové nominální výši, že jejich aktuálně přepočítávaná reálná hodnota by se udržovala na předepsané fixní úrovni. V nejlepším případě poskytovatel penze nabízí nominální platby pravidelně (většinou ročně) navyšované o konstantní růstový faktor g , jako je tomu v diskrétním modelu (8.4.5)

$$E(PV_x) = IPAF = \frac{{}_1P_x}{(1+r)/(1+g)} + \frac{{}_2P_x}{(1+r)^2/(1+g)^2} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{{}_iP_x}{(1+r)^i/(1+g)^i}, \quad (9.1.4)$$

nebo inflačně indexované protiinflačním indexem π_i , jako je tomu v diskrétním modelu (8.4.6)

$$E(PV_x) = IPAF = \frac{1P_x}{1+r_1} + \frac{2P_x}{1+r_1 \cdot 1+r_2} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{iP_x}{\prod_{j=1}^i (1+r_j)} \cdot \quad (9.1.5)$$

Přítom např. na použitý přepis (9.1.5) lze pohlížet tak, že diskontujeme nikoli podle nominální, ale podle reálné úrokové míry (viz tzv. Fisherův vzorec (8.3.10) pro očištění od inflace). Střední počáteční hodnota (či ekvivalentně okamžitý penzijní faktor $IPAF$) vyjde v obou případech stejně, neboť se vždy jedná o hodnotu v běžných cenách na počátku výplaty penze.

Vedle inflace je další velkou nejistotou pro účastníka příspěvkově definovaného penzijního plánu volatilita investičního výnosu $g(t)$. Proto korektnější přístup spočívá v rozšíření modelu (9.1.1) o modelové prostředky typu geometrického Brownova pohybu (viz např. (5.2.10))

$$DC - dávká = \frac{\int_0^N c(t) \cdot e^{\mu \cdot (N-t) + \sigma \cdot B_{N-t}} \cdot w(t) dt}{\bar{a}_x} \quad (9.1.6)$$

V tom případě je samozřejmě námitka, že i okamžitý penzijní faktor ve jmenovateli (9.1.6) má stochastický charakter, neboť diskontní úroková míra a parametry úmrtnostního chování populace se mohou měnit náhodným způsobem.

Model dávkově definovaného penzijního plánu

Dávkově definovaný penzijní plán (DB) předem definuje výši dávek (tzv. vyměřovacím vzorcem pro výši dávky většinou v závislosti na počtu odpracovaných let) a odtud se stanoví potřebná výše finančních nákladů, tedy i výše vyžadovaných příspěvků. Investiční riziko a riziko dlouhověkosti je v dávkově definovaném penzijním plánu na straně poskytovatele penzí a nikoli na straně účastníka penzijního plánu. Jak už bylo uvedeno v odstavci 3.1.7, podle způsobu, jakým je vyměřena výše dávek, se v praxi rozlišuje (i) *plošná penze*, kdy každému účastníkovi penzijního plánu bez rozdílu se vyplácí stejná penze; (ii) *penze vyměřovaná plošně*, kdy výše penze se stanoví vynásobením počtu odpracovaných let (či obecněji počtu let účasti v penzijním plánu) a konstantní částky; (iii) *penze vyměřovaná vzhledem k platu v posledním pracovním roce*, kdy výše penze se stanoví vynásobením počtu odpracovaných let, zásluhového penzijního faktoru α (*accrual rate*) a platu v posledním pracovním roce; (iv) *penze vyměřovaná vzhledem k průměrnému platu během pracovního života*, kdy výše penze se stanoví vynásobením počtu odpracovaných let, zásluhového penzijního faktoru a *váženého mzdového základu* (tj. vhodně indexovaného celoživotního platového průměru) během pracovního života (tento poslední způsob bývá v praxi nejčastější).

Obecný model pro dávkově definovaný penzijní plán lze představit opět formou vzorce pro výpočet roční anuitní platby pro účastníka, který po N letech aktivní účasti v takovém plánu uplatní v (důchodovém) věku x svůj nárok na penzi (viz Milevsky (2006)):

$$DB - \text{dávka} = \alpha \cdot N \cdot \beta \int_0^N e^{-\beta(N-t)} \cdot w(t) dt = \alpha \cdot N \cdot \omega(N), \quad (9.1.7)$$

kde α je *zásluhový penzijní faktor* představující procento (z průměrného celoživotního nebo finálního) platu za jeden rok aktivní služby, $w(t)$ je výše platu vyjádřená jako platová intenzita v čase t a

$$\omega(N) = \beta \int_0^N e^{-\beta(N-t)} \cdot w(t) dt \quad (9.1.8)$$

je vhodným způsobem zprůměrovaný plat za dobu N aktivní účasti v penzijním plánu s využitím *váhového koeficientu* $\beta > 0$. Princip takového „exponenciálního“ průměrování je podobný principu tzv. exponenciálního vyrovnávání pro vyhlazování časových řad $\{y_t\}$ formou eliminace trendu (viz např. Cipra (2008)):

$$\hat{y}_t = \beta \sum_{i=0}^{\infty} (1 - \beta)^i y_{t-i} \quad (9.1.9)$$

(váhový koeficient β musí tentokrát splňovat dokonce $0 < \beta < 1$), takže hodnoty časové řady vlastně průměrujeme pomocí vah exponenciálně klesajících od aktuálního času t do minulosti (pro $0 < \beta < 1$ je $\sum_{i=0}^{\infty} \beta(1 - \beta)^i = 1$) a do váženého průměru (9.1.9) tedy vstupují s největšími váhami především hodnoty z blízké minulosti.

Pokud se vrátíme k modelovému vzorci (9.1.7), pak např. při zásluhovém penzijním faktoru ve výši 1,5 % má účastník po 30 letech aktivní účasti nárok na doživotní penzi, jejíž roční výše odpovídá 45 % z váženého mzdového základu $\alpha(30)$. Uvažujme dva speciální případy platového vývoje:

- Jestliže platová intenzita $w(t)$ zůstane po celou dobu N konstantní ve výši w , pak (9.1.8) má explicitní tvar

$$\omega(N) = w \cdot (1 - e^{-\beta \cdot N}), \quad (9.1.10)$$

takže pro vysoké hodnoty β ($\beta \rightarrow \infty$) nebo dlouhé časové horizonty N je celoživotní platový průměr blízko hodnotě w . Je-li tedy v předchozím příkladě platová intenzita na úrovni 300 000 Kč ročně, pak odpovídající roční doživotní penze činí 135 000 Kč, tj. 11 250 Kč měsíčně.

– Jestliže platová intenzita $w(t)$ roste po celou dobu N exponenciálně jako v (9.1.2)

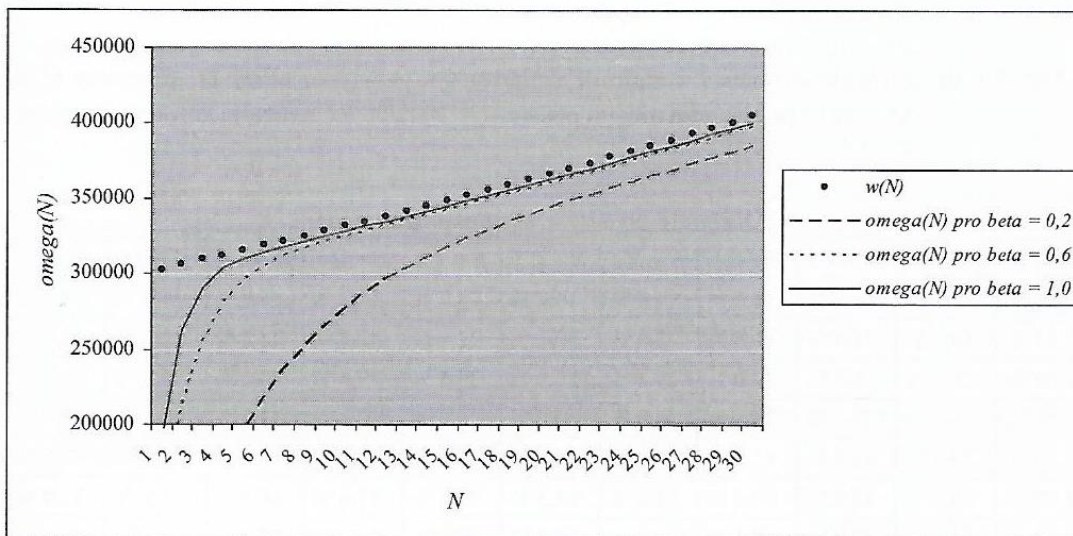
$$w(t) = w \cdot e^{k \cdot t}, \tag{9.1.11}$$

pak (9.1.8) má explicitní tvar

$$\omega(N) = \frac{\beta \cdot w}{\beta + k} \cdot (e^{k \cdot N} - e^{-\beta \cdot N}), \tag{9.1.12}$$

takže pro vysoké hodnoty β ($\beta \rightarrow \infty$) je vážený mzdový základ blízko hodnotě $w(N) = w \cdot \exp(k \cdot N)$ finálního platu před penzí (jestliže speciálně $k=0$, pak (9.1.12) zřejmě přejde do tvaru (9.1.10) s konstantní platovou intenzitou w). Je-li tedy v předchozím příkladě počáteční platová intenzita na úrovni 300 000 Kč ročně, roční platový růst je $k=1\%$ a váhový koeficient je $\beta=1$, pak vážený mzdový základ (9.1.12) je 400 948 Kč a odpovídající roční doživotní penze činí 180 427 Kč, tj. 15 036 Kč měsíčně (viz také tab. 9.1.2a). Na obr. 9.1.1 jsou pro tento platový růst uvedeny podle (9.1.12) průběhy vážených mzdových základů $\omega(N)$ v závislosti na době aktivní účasti N , a to pro různé hodnoty váhového koeficientu β . Z obrázku je vidět, že již při hodnotě $\beta=1$ a větších hodnotách N jsou vážené mzdové základy $\omega(N)$ blízké platovým hodnotám $w(N)$.

Obr. 9.1.1. Vývoj ročního platu podle (9.1.11) ($w = 300\,000$ Kč, $k = 1\%$) a odpovídající vážený mzdový základ $\omega(N)$ v závislosti na době aktivní účasti N a pro různé hodnoty váhového koeficientu β



Tab. 9.1.2a. Roční a měsíční anuitní platby v dávkově definovaném penzijním plánu při třicetileté účasti ($N = 30$) s počátečním ročním platem $w = 300\,000$ Kč a ročním konstantním růstem $k = 1\%$

<i>Roční anuitní platby (v Kč) v penzijním plánu DB</i>										
α	$\beta = 0,1$	$\beta = 0,2$	$\beta = 0,3$	$\beta = 0,4$	$\beta = 0,5$	$\beta = 0,6$	$\beta = 0,7$	$\beta = 0,8$	$\beta = 0,9$	$\beta = 1,0$
0,50 %	53 185	57 745	58 779	59 262	59 553	59 748	59 888	59 994	60 076	60 142
0,75 %	79 777	86 617	88 168	88 893	89 329	89 622	89 832	89 991	90 114	90 213
1,00 %	106 370	115 490	117 558	118 524	119 105	119 496	119 776	119 987	120 152	120 284
1,25 %	132 962	144 362	146 947	148 155	148 881	149 370	149 720	149 984	150 190	150 356
1,50 %	159 554	173 235	176 336	177 785	178 658	179 244	179 664	179 981	180 228	180 427
1,75 %	186 147	202 107	205 726	207 416	208 434	209 117	209 608	209 978	210 266	210 498
2,00 %	212 739	230 979	235 115	237 047	238 210	238 991	239 552	239 975	240 305	240 569
2,50 %	265 924	288 724	293 894	296 309	297 763	298 739	299 441	299 969	300 381	300 711

<i>Měsíční anuitní platby (v Kč) v penzijním plánu DB</i>										
α	$\beta = 0,1$	$\beta = 0,2$	$\beta = 0,3$	$\beta = 0,4$	$\beta = 0,5$	$\beta = 0,6$	$\beta = 0,7$	$\beta = 0,8$	$\beta = 0,9$	$\beta = 1,0$
0,50 %	4 432	4 812	4 898	4 938	4 963	4 979	4 991	4 999	5 006	5 012
0,75 %	6 648	7 218	7 347	7 408	7 444	7 468	7 486	7 499	7 510	7 518
1,00 %	8 864	9 624	9 796	9 877	9 925	9 958	9 981	9 999	10 013	10 024
1,25 %	11 080	12 030	12 246	12 346	12 407	12 447	12 477	12 499	12 516	12 530
1,50 %	13 296	14 436	14 695	14 815	14 888	14 937	14 972	14 998	15 019	15 036
1,75 %	15 512	16 842	17 144	17 285	17 370	17 426	17 467	17 498	17 522	17 541
2,00 %	17 728	19 248	19 593	19 754	19 851	19 916	19 963	19 998	20 025	20 047
2,50 %	22 160	24 060	24 491	24 692	24 814	24 895	24 953	24 997	25 032	25 059

Tab. 9.1.2b. Náhradové poměry v dávkově definovaném penzijním plánu při třicetileté účasti ($N = 30$) s počátečním ročním platem $w = 300\,000$ Kč a ročním konstantním růstem $k = 1\%$

<i>Náhradové poměry v penzijním plánu DB</i>										
α	$\beta = 0,1$	$\beta = 0,2$	$\beta = 0,3$	$\beta = 0,4$	$\beta = 0,5$	$\beta = 0,6$	$\beta = 0,7$	$\beta = 0,8$	$\beta = 0,9$	$\beta = 1,0$
0,50 %	13,1 %	14,3 %	14,5 %	14,6 %	14,7 %	14,8 %	14,8 %	14,8 %	14,8 %	14,9 %
0,75 %	19,7 %	21,4 %	21,8 %	22,0 %	22,1 %	22,1 %	22,2 %	22,2 %	22,3 %	22,3 %
1,00 %	26,3 %	28,5 %	29,0 %	29,3 %	29,4 %	29,5 %	29,6 %	29,6 %	29,7 %	29,7 %
1,25 %	32,8 %	35,6 %	36,3 %	36,6 %	36,8 %	36,9 %	37,0 %	37,0 %	37,1 %	37,1 %
1,50 %	39,4 %	42,8 %	43,5 %	43,9 %	44,1 %	44,3 %	44,4 %	44,4 %	44,5 %	44,6 %
1,75 %	46,0 %	49,9 %	50,8 %	51,2 %	51,5 %	51,6 %	51,8 %	51,9 %	51,9 %	52,0 %
2,00 %	52,5 %	57,0 %	58,1 %	58,5 %	58,8 %	59,0 %	59,2 %	59,3 %	59,3 %	59,4 %
2,50 %	65,7 %	71,3 %	72,6 %	73,2 %	73,5 %	73,8 %	73,9 %	74,1 %	74,2 %	74,3 %

9.2. Penzijní závazky v plánech typu DB

V dávkově definovaných penzijních (DB) je nutné soustavně věnovat pozornost závazkům takových plánů, protože zde nedochází k transferu hlavních penzijních rizik na stranu účastníků, jako je tomu v příspěvkově definovaných penzijních plánech (DC). Předchozí odstavec se soustředil na to, jaká je výše penze a vůbec jaké jsou nároky účastníka, který dosáhl důchodového věku. Poskytovatelé penzí v rámci penzijních plánů typu DB si však musí klást podobné otázky již daleko dříve než na konci aktivní životní fáze v důchodovém věku x , kterého daný účastník dosáhne v čase N (je-li počátek jeho aktivní služby chápán jako čas 0), ale již ve věku y ($y < x$), kterého daný účastník dosáhl v čase τ ($\tau < N$, přičemž zřejmě platí $x - y = N - \tau$). Takové nároky účastníka vůči penzijnímu plánu typu DB se na straně poskytovatele penzí označují jako jeho *penzijní závazky*.

V praxi se tyto závazky měří trojím způsobem, přičemž se používá následující terminologie (použitá symbolika se ovšem nijak nevymyká předchozímu značení):

- *penzijní závazky ve věku y (retirement benefit obligation):*

$$RBO_y = e^{-r(x-y)} \cdot \alpha \cdot N \cdot \omega(N) \cdot \bar{a}_x; \quad (9.2.1)$$

- *akumulované penzijní závazky ve věku y (accumulated benefit obligation):*

$$ABO_y = e^{-r(x-y)} \cdot \alpha \cdot \tau \cdot \omega(\tau) \cdot \bar{a}_x; \quad (9.2.2)$$

- *projektované penzijní závazky ve věku y (projected benefit obligation):*

$$PBO_y = e^{-r(x-y)} \cdot \alpha \cdot \tau \cdot \omega(N) \cdot \bar{a}_x. \quad (9.2.3)$$

Hned na začátku upozorníme na to, že ve věku $y = x$ (tj. v čase $\tau = N$) se všechny tři typy penzijních závazků srovnají na hodnotě

$$RBO_x = ABO_x = PBO_x = \alpha \cdot N \cdot \omega(N) \cdot \bar{a}_x, \quad (9.2.4)$$

kteřou je zřejmě možné interpretovat jako případné jednorázové vyrovnání při dosažení důchodového věku x . Obecně ve věku y ($y < x$) lze jednotlivé přístupy k měření penzijních závazků charakterizovat následujícím způsobem:

- penzijní závazky RBO_y ve věku y vznikají diskontováním plného jednorázového vyrovnání, na které by byl nárok ve věku x , k věku y výpočtu závazků;
- akumulované penzijní závazky ABO_y ve věku y jsou více pragmatické, neboť oceňují vyšší závazků v tomto věku v opravdu zasloužené výši (např. neztrácí svou vypovídací schopnost i v případě ukončení zaměstnání ve věku y , přičemž účastník nemusí jako u odložené penze přežít až do důchodového věku x , ale mohl by se v případě, že to legislativa povoluje, přihlásit o své nároky hned ve věku y);
- projektované penzijní závazky PBO_y ve věku y představují určitý kompromis mezi ABO_y a RBO_y : respektují sice fakt, že ve věku y je zatím odpracováno jen τ roků, ale aplikují zde platovou projekci $\omega(N)$, na kterou je možné maximálně (totiž v čase N) dosáhnout; podle jiné interpretace penzijních závazků PBO_y vydělal účastník v čase τ zatím jen podíl $\alpha \cdot \tau \cdot \omega(N) \cdot \bar{a}_x$ z finální hodnoty $\alpha \cdot N \cdot \omega(N) \cdot \bar{a}_x$.

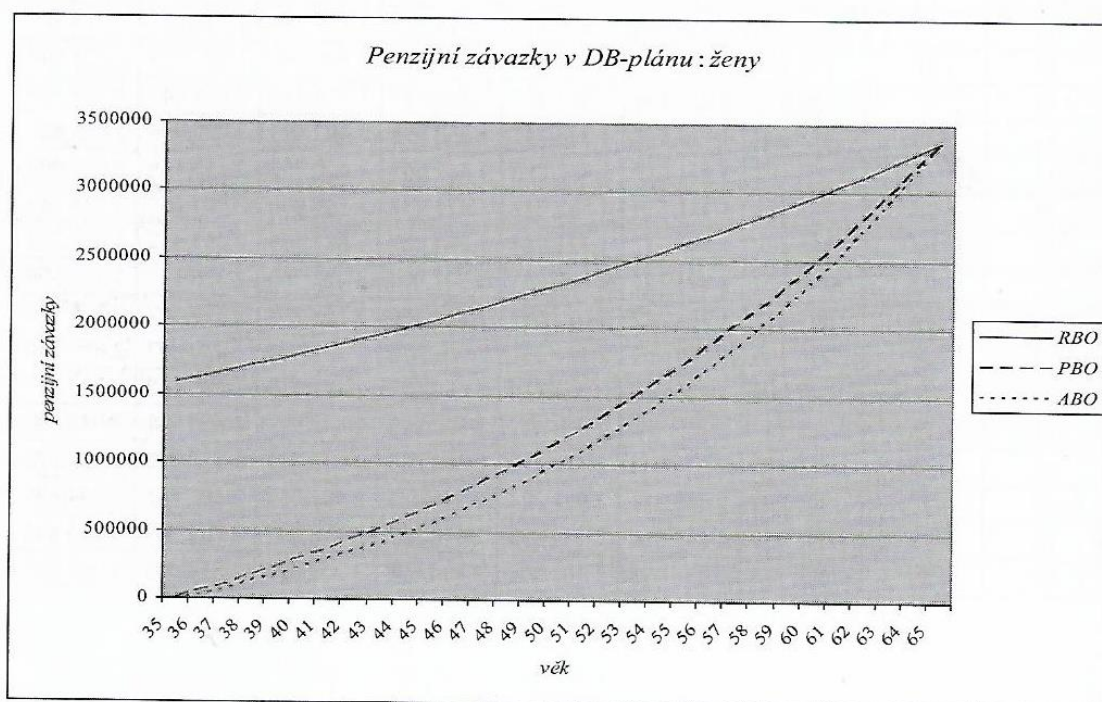
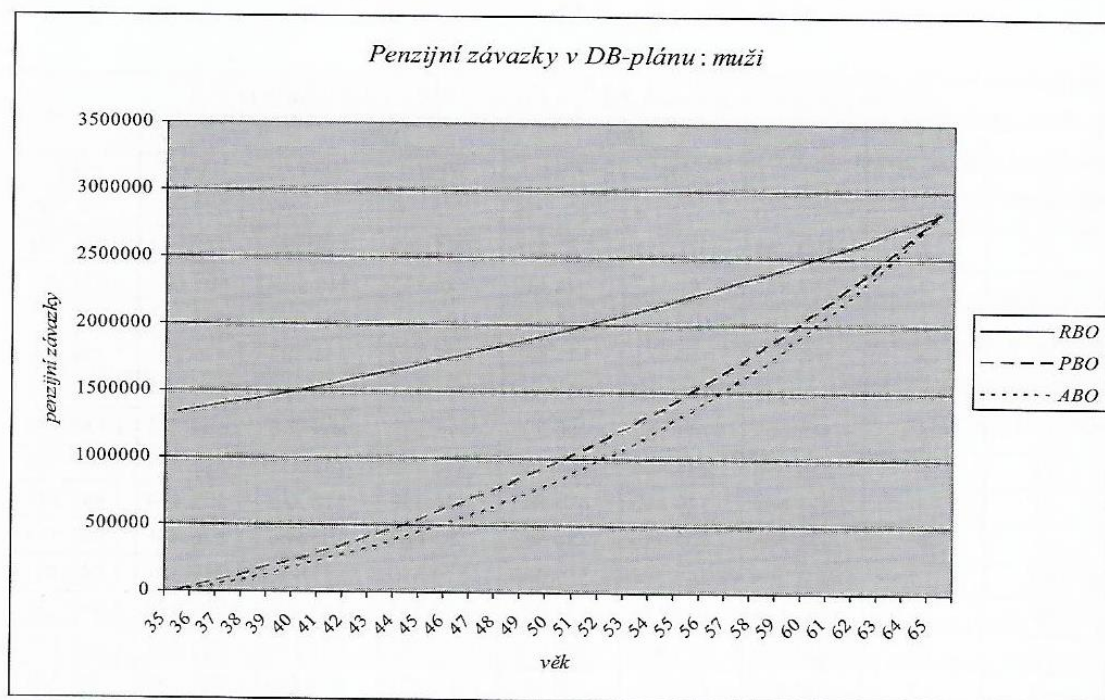
V tab. 9.2.1 a na obr. 9.2.1 je uveden průběh $ABO_y < PBO_y < RBO_y$ ($y = 0, 1, \dots, 30$) pro situaci, kdy do příslušného DB-plánu vstoupil 35letý účastník a setrval zde po dobu $N = 30$ let do důchodového věku $x = 65$ (Česká republika v roce 2010 s využitím odhadnutého Gompertzova zákona úmrtnosti z odstavce 7.1, tj. $\lambda = 0$, $m = 80,75$ a $b = 10,00$ pro muže a $\lambda = 0$, $m = 85,71$ a $b = 7,87$ pro ženy, úroková míra $r = 2,5\%$, počáteční roční plat $w = 300\,000$ Kč s ročním konstantním růstem $k = 1\%$ dává finální plat $w(30) = 404\,958$ Kč, váhový koeficient $\beta = 1$ dává vážený mzdový základ $\omega(30) = 400\,948$ Kč, zásluhový penzijní faktor $\alpha = 2\%$).

Všechny tři křivky na obr. 9.2.1 jsou rostoucí s tím, že křivky ABO_y a PBO_y mají podobné průběhy vycházející z nulové hodnoty závazku ve vstupním věku ($\tau = 0$), zatímco křivka RBO_y probíhá na vyšší hladině, neboť vychází z významně nenulové hodnoty (metodika RBO oceňuje velkoryse závazek hned při vstupu do DB-plánu hodnotou 1 339 017 Kč pro muže a 1 591 406 Kč pro ženy; naproti tomu metodika ABO je realistickou mírou penzijních závazků ukončených předčasně ve věku y menším než důchodový věk x , takže se v angličtině označuje jako „wind up measure“). Všechny tři křivky se ovšem po třiceti letech sejdou v důchodovém věku $x = 65$ na společné hodnotě 2 834 698 Kč pro muže a 3 369 006 Kč pro ženy (viz (9.1.16))

Tab. 9.2.1. Průběh penzijních závazků $ABO_y < PBO_y < RBO_y$ ($y=0, 1, \dots, 30$) při vstupním věku 35 let po dobu $N=30$ let do důchodového věku $x=65$ (Česká republika v roce 2010 s využitím odhadnutého Gompertzova zákona s $\lambda=0, m=80,75$ a $b=10,00$ pro muže a $\lambda=0, m=85,71$ a $b=7,87$ pro ženy, $r=2,5\%$, $w=300\,000$ Kč, $k=1\%$, $\beta=1, \alpha=2\%$), viz také obr. 9.2.1

Průběh penzijních závazků $ABO_y < PBO_y < RBO_y$ v DB-plánu (v Kč)								
y	τ	$\omega(\tau)$	ABO_y		PBO_y		RBO_y	
			muži	ženy	muži	ženy	muži	ženy
35	0	0	0	0	0	0	1 339 017	1 591 406
36	1	190 744	21 771	25 875	45 764	54 390	1 372 914	1 631 692
37	2	262 832	61 517	73 113	93 845	111 533	1 407 669	1 672 999
38	3	291 287	104 856	124 620	144 330	171 535	1 443 305	1 715 351
39	4	303 711	149 461	177 632	197 312	234 503	1 479 842	1 758 775
40	5	310 257	195 684	232 568	252 884	300 550	1 517 305	1 803 299
41	6	314 661	244 182	290 208	311 143	369 790	1 555 715	1 848 950
42	7	318 296	295 466	351 158	372 190	442 343	1 595 098	1 895 756
43	8	321 669	349 892	415 843	436 128	518 333	1 635 479	1 943 747
44	9	324 966	407 730	484 582	503 064	597 886	1 676 881	1 992 954
45	10	328 255	469 204	557 643	573 110	681 135	1 719 331	2 043 405
46	11	331 563	534 522	635 274	646 381	768 216	1 762 856	2 095 134
47	12	334 898	603 892	717 718	722 993	859 269	1 807 483	2 148 173
48	13	338 265	677 521	805 226	803 071	954 440	1 853 240	2 202 554
49	14	341 665	755 629	898 056	886 739	1 053 879	1 900 155	2 258 312
50	15	345 099	838 440	996 477	974 129	1 157 741	1 948 258	2 315 482
51	16	348 568	926 192	1 100 769	1 065 375	1 266 186	1 997 578	2 374 098
52	17	352 071	1 019 132	1 211 227	1 160 617	1 379 379	2 048 147	2 434 199
53	18	355 609	1 117 518	1 328 157	1 259 998	1 497 493	2 099 996	2 495 821
54	19	359 183	1 221 619	1 451 880	1 363 667	1 620 702	2 153 158	2 559 003
55	20	362 793	1 331 719	1 582 732	1 471 777	1 749 190	2 207 665	2 623 784
56	21	366 439	1 448 112	1 721 064	1 584 487	1 883 144	2 263 552	2 690 206
57	22	370 122	1 571 107	1 867 243	1 701 960	2 022 760	2 320 855	2 758 309
58	23	373 842	1 701 027	2 021 651	1 824 366	2 168 237	2 379 607	2 828 136
59	24	377 599	1 838 209	2 184 691	1 951 878	2 319 784	2 439 847	2 899 730
60	25	381 394	1 983 006	2 356 780	2 084 677	2 477 614	2 501 612	2 973 137
61	26	385 227	2 135 786	2 538 357	2 222 949	2 641 949	2 564 941	3 048 403
62	27	389 098	2 296 933	2 729 879	2 366 885	2 813 016	2 629 873	3 125 573
63	28	393 009	2 466 851	2 931 824	2 516 685	2 991 051	2 696 448	3 204 698
64	29	396 959	2 645 960	3 144 693	2 672 552	3 176 297	2 764 709	3 285 825
65	30	400 948	2 834 698	3 369 006	2 834 698	3 369 006	2 834 698	3 369 006

Obr. 9.2.1. Průběh penzijních závazků $ABO_y < PBO_y < RBO_y$ ($y=0, 1, \dots, 30$) při vstupním věku 35 let po dobu $N=30$ let do důchodového věku $x=65$ (Česká republika v roce 2010 s využitím odhadnutého Gompertzova zákona s $\lambda=0, m=80,75$ a $b=10,00$ pro muže a $\lambda=0, m=85,71$ a $b=7,87$ pro ženy, $r=2,5\%$, $w=300\,000$ Kč, $k=1\%$, $\beta=1, \alpha=2\%$), viz také tab. 9.2.1



Tab. 9.2.2a je založena na stejných parametrických hodnotách jako tab. 9.2.1 (uvažuje se ovšem celé spektrum úrokových hodnot r) s tím, že v této tabulce jsou uvedeny pouze penzijní závazky ve věku $y = 45$ (tj. v roce $\tau = 10$ účasti) uvažovaného účastníka s účastí od vstupního věku 35 let. S rostoucím r samozřejmě penzijní závazky klesají (neboť se nejen zmenšuje diskontní faktor, ale zmenšuje se také okamžitý penzijní faktor \bar{a}_{65}).

Tab. 9.2.2a. Penzijní závazky $ABO_{45} < PBO_{45} < RBO_{45}$ ve věku $y = 45$, tj. po $\tau = 10$ letech účasti při vstupním věku 35 let (Česká republika v roce 2010 s využitím odhadnutého Gompertzova zákona s $\lambda = 0$, $m = 80,75$ a $b = 10,00$ pro muže a $\lambda = 0$, $m = 85,71$ a $b = 7,87$ pro ženy, $w = 300\,000$ Kč, $k = 1\%$, $\beta = 1$, $\alpha = 2\%$), viz také tab. 9.2.1 pro $r = 2,5\%$

Penzijní závazky $ABO_{45} < PBO_{45} < RBO_{45}$ (v Kč)								
r	\bar{a}_{65}		ABO_{45}		PBO_{45}		RBO_{45}	
	muži	ženy	muži	ženy	muži	ženy	muži	ženy
0,5 %	14,029	17,055	833 352	1 013 132	1 017 901	1 237 493	3 053 703	3 712 480
1,0 %	13,409	16,206	720 744	871 061	880 355	1 063 960	2 641 065	3 191 880
1,5 %	12,830	15,417	624 015	749 834	762 205	915 887	2 286 614	2 747 662
2,0 %	12,290	14,685	540 828	646 257	660 595	789 372	1 981 786	2 368 117
2,5 %	11,783	14,004	469 204	557 643	573 110	681 135	1 719 331	2 043 405
3,0 %	11,309	13,370	407 466	481 734	497 701	588 416	1 493 103	1 765 247
4,0 %	10,447	12,228	308 170	360 713	376 415	440 593	1 129 244	1 321 780
5,0 %	9,685	11,231	233 919	271 250	285 720	331 320	857 161	993 959
6,0 %	9,010	10,357	178 168	204 804	217 624	250 159	652 871	750 477
7,0 %	8,410	9,588	136 145	155 229	166 294	189 605	498 883	568 815

Pokrytí penzijních závazků vytvářením penzijních fondů

V případě příspěvkově definovaných penzijních plánů (DC) se přímo z principu klasickým způsobem „spořicíh účtů“ pravidelně dotovaných příspěvky účastníka a/nebo zaměstnavatele (sponzora) vytváří příslušný penzijní fond. V případě dávkově definovaných penzijních plánů (DB) nevzniká z čistě ekonomického pohledu nutnost takové fondy pokrývající penzijní závazky vůbec vytvářet (z okamžitého pohledu je pro zaměstnavatele nejjednodušší žádné penzijní fondy nevytvářet a v případě uplatnění nároku na penzi své penzijní závazky řešit z aktuálních výnosů společnosti, což je ostatně přístup, který praktikuje stát v průběžných důchodových systémech). To se však ve většině zemí s rozvinutými penzijními systémy dostává do sporu s požadavky regulátora (většinou státu), který výměnou za svou podporu nekompromisně vyžaduje takové penzijní fondy reálně obezřetným způsobem vytvářet; velmi často za tím účelem vznikají legislativní jednotky (entity) obecně označované jako

penzijní plány, které mívají během kumulační fáze určité daňové či jiné úlevy, ale na oplátku podléhají striktní regulaci, např. co se týče finančního umístění (investování) svěřených prostředků. Právě zde se uplatní míry penzijních závazků nejen typu *RBO*, ale i *ABO* a *PBO*, protože na jejich základě lze rozhodnout, jakým tempem je nutné penzijní účet navyšovat a tedy jak vysoké příspěvky do něj platit.

V tab. 9.2.2b se za stejných podmínek jako v tab. 9.2.2a vyšetřuje, o kolik narostou příslušné penzijní závazky během jednoho roku mezi věky 45 a 46 let pro vybrané hodnoty úrokové míry r : např. při úrokové míře $r = 2,5\%$ se pro muže v případě metodiky *ABO* závazek zvýší o 65 319 Kč, v případě metodiky *PBO* o 73 270 Kč a v případě metodiky *RBO* „jen“ o 43 525 Kč; v každém případě tato nutná navýšení penzijních fondů klesají s rostoucím r . Tab. 9.2.2c se dívá na stejnou záležitost jiným pohledem: při pevném $r = 2,5\%$ nechává tabulka také růst věk, v němž se navyšování závazků počítá ($y = 35, 40, 45, 50, 55, 60$). Zde naopak nutná navýšení penzijních fondů s rostoucím věkem rostou (např. pro muže v případě metodiky *ABO* je nutné v uvedených věcích navyšovat fond postupně o 21 771 Kč, 48 498 Kč, 65 319 Kč, 87 752 Kč, 116 393 Kč a 152 780 Kč.

Tab. 9.2.2b. Navýšení penzijních závazků mezi věky 45 a 46 let (Česká republika v roce 2010 s využitím odhadnutého Gompertzova zákona s $\lambda = 0, m = 80,75$ a $b = 10,00$ pro muže a $\lambda = 0, m = 85,71$ a $b = 7,87$ pro ženy, $w = 300\,000$ Kč, $k = 1\%$, $\beta = 1$, $\alpha = 2\%$)

Navýšení penzijních závazků mezi věky 45 → 46 (v Kč)						
r	ΔABO_{45}		ΔPBO_{45}		ΔRBO_{45}	
	muži	ženy	muži	ženy	muži	ženy
0,5 %	81 654	97 045	90 212	107 216	12 857	15 280
1,0 %	77 429	92 023	85 914	102 108	23 325	27 721
1,5 %	73 284	87 097	81 637	97 025	31 737	37 720
2,0 %	69 242	82 293	77 413	92 005	38 386	45 621
2,5 %	65 319	77 630	73 270	87 081	43 525	51 729
3,0 %	61 527	73 124	69 229	82 278	47 379	56 309
4,0 %	54 374	64 623	61 517	73 112	51 981	61 779
5,0 %	47 825	56 839	54 365	64 613	53 467	63 545
6,0 %	41 891	49 787	47 818	56 831	52 796	62 747
7,0 %	36 559	43 450	41 886	49 780	50 685	60 239

Tab. 9.2.2c. Navýšení penzijních závazků ve vybraných věcích (Česká republika v roce 2010 s využitím odhadnutého Gompertzova zákona s $\lambda=0, m=80,75$ a $b=10,00$ pro muže a $\lambda=0, m=85,71$ a $b=7,87$ pro ženy, $r=2,5\%$, $w=300\,000$ Kč, $k=1\%$, $\beta=1$, $\alpha=2\%$)

Navýšení penzijních závazků ve vybraných věcích (v Kč)						
y	ΔABO_y		ΔPBO_y		ΔRBO_y	
	muži	ženy	muži	ženy	muži	ženy
35→36	21 771	25 875	45 764	54 390	33 897	40 287
40→41	48 498	57 640	58 259	69 240	38 411	45 651
45→46	65 319	77 630	73 270	87 081	43 525	51 729
50→51	87 752	104 292	91 246	108 445	49 320	58 617
55→56	116 393	138 332	112 710	133 954	55 887	66 421
60→61	152 780	181 577	138 272	164 335	63 329	75 265

Konečně tab. 9.2.2d, 9.9.2e a 9.2.2f (postupně pro metodiky *ABO*, *PBO* a *RBO*) rozkládají navýšení penzijních závazků z tab. 9.2.2c vždy na navýšení v důsledku úročení a na navýšení v důsledku účasti za daný rok. Např. v tab. 9.2.2d podle metodiky *ABO* mezi věky 45 → 46 pro muže vzniká složka navýšení v důsledku úročení jako úrok $469\,204 \cdot (\exp(0,025 \cdot 1) - 1) = 11\,878$ Kč z částky 469 204 Kč, která představuje výši závazků ABO_{45} (viz tab. 9.2.2a pro $r=2,5\%$), a složku navýšení v důsledku účasti lze spočítat jako doplněk $65\,319 - 11\,878 = 53\,441$ Kč úrokové složky do celého navýšení ΔABO_{45} . Pro představu je také složka navýšení v důsledku účasti vždy vyjádřena procentem z platu $w(y)$ v příslušném věku y .

Tab. 9.2.2d. Navýšení penzijních závazků ΔABO ve vybraných věcích a jeho rozklad na složku navýšení v důsledku úročení a na složku navýšení v důsledku účasti (Česká republika v roce 2010 s využitím odhadnutého Gompertzova zákona s $\lambda=0, m=80,75$ a $b=10,00$ pro muže a $\lambda=0, m=85,71$ a $b=7,87$ pro ženy, $r=2,5\%$, $w=300\,000$ Kč, $k=1\%$, $\beta=1$, $\alpha=2\%$)

Rozklad ΔABO ve vybraných věcích v důsledku úročení a účasti (v Kč)									
y	w(y)	úroky		+ účast		= ΔABO_y		služba (% platu)	
		muži	ženy	muži	ženy	muži	ženy	muži	ženy
35→36	300 000	0	0	21 771	25 875	21 771	25 875	7,26 %	8,62 %
40→41	315 381	4 954	5 887	43 545	51 752	48 498	57 640	13,81 %	16,41 %
45→46	331 551	11 878	14 117	53 441	63 514	65 319	77 630	16,12 %	19,16 %
50→51	348 550	21 225	25 226	66 527	79 067	87 752	104 292	19,09 %	22,68 %
55→56	366 421	33 713	40 067	82 681	98 265	116 393	138 332	22,56 %	26,82 %
60→61	385 208	50 200	59 662	102 580	121 915	152 780	181 577	26,63 %	31,65 %

Tab. 9.2.2e. Navýšení penzijních závazků ΔPBO ve vybraných věcích a jeho rozklad na složku navýšení v důsledku úročení a na složku navýšení v důsledku účasti (Česká republika v roce 2010 s využitím odhadnutého Gompertzova zákona s $\lambda=0$, $m=80,75$ a $b=10,00$ pro muže a $\lambda=0$, $m=85,71$ a $b=7,87$ pro ženy, $r=2,5\%$, $w=300\,000$ Kč, $k=1\%$, $\beta=1$, $\alpha=2\%$)

Rozklad ΔPBO ve vybraných věcích v důsledku úročení a účasti (v Kč)									
y	w(y)	úrok ΔPBO		služba ΔPBO		ΔPBO		služba (% platu)	
		muži	ženy	muži	ženy	muži	ženy	muži	ženy
35→36	300 000	0	0	45 764	54 390	45 764	54 390	15,25 %	18,13 %
40→41	315 381	6 402	7 608	51 857	61 632	58 259	69 240	16,44 %	19,54 %
45→46	331 551	14 508	17 243	58 762	69 838	73 270	87 081	17,72 %	21,06 %
50→51	348 550	24 660	29 308	66 586	79 137	91 246	108 445	19,10 %	22,70 %
55→56	366 421	37 258	44 281	75 452	89 674	112 710	133 954	20,59 %	24,47 %
60→61	385 208	52 774	62 721	85 498	101 613	138 272	164 335	22,20 %	26,38 %

Tab. 9.2.2f. Navýšení penzijních závazků ΔRBO ve vybraných věcích a jeho rozklad na složku navýšení v důsledku úročení a na složku navýšení v důsledku účasti (Česká republika v roce 2010 s využitím odhadnutého Gompertzova zákona s $\lambda=0$, $m=80,75$ a $b=10,00$ pro muže a $\lambda=0$, $m=85,71$ a $b=7,87$ pro ženy, $r=2,5\%$, $w=300\,000$ Kč, $k=1\%$, $\beta=1$, $\alpha=2\%$)

Rozklad ΔRBO ve vybraných věcích v důsledku úročení a účasti (v Kč)									
y	w(y)	úrok ΔRBO		služba ΔRBO		ΔRBO		služba (% platu)	
		muži	ženy	muži	ženy	muži	ženy	muži	ženy
35→36	300 000	33 897	40 287	0	0	33 897	40 287	0,00 %	0,00 %
40→41	315 381	38 411	45 651	0	0	38 411	45 651	0,00 %	0,00 %
45→46	331 551	43 525	51 729	0	0	43 525	51 729	0,00 %	0,00 %
50→51	348 550	49 320	58 617	0	0	49 320	58 617	0,00 %	0,00 %
55→56	366 421	55 887	66 421	0	0	55 887	66 421	0,00 %	0,00 %
60→61	385 208	63 329	75 265	0	0	63 329	75 265	0,00 %	0,00 %

I když složka navýšení v důsledku úročení i složka navýšení v důsledku účasti s věkem rostou, je růst první z nich ve všech třech metodikách výraznější (v případě závazků typu RBO je z pochopitelných důvodů složka ΔRBO_y v důsledku účasti neustále nulová). Vyjádřeno procentem z platu je růst složky navýšení v důsledku účasti s rostoucím věkem výraznější u metodiky ABO než u metodiky PBO (např. pro muže roste tato složka u ABO

z 7,26 % na 26,63 % platu, zatímco u *PBO* z 15,25 % jen na 22,20 % platu). Jinými slovy, např. v případě zaměstnavatelských penzijních fondů plně hrazených z příspěvků zaměstnavatele by do něj sponzor měl dodávat kolem 10 % platu mladšího účastníka a kolem 25 % platu staršího účastníka; zbytek penzijních závazků se pokryje z výnosů investiční činnosti penzijního plánu.

V praxi existují desítky způsobů, jak penzijní závazky fondově zabezpečit (viz také kap. 10). Tyto tzv. *penzijní fondové metody* mají různé (a bohužel nejednotné) názvy (např. průběžná jednotková metoda, projektivní jednotková metoda, metoda vstupního věku, metoda dosaženého věku, agregovaná metoda a mnoho dalších) a pohybují se mezi různými extrémními přístupy (např. na jedné straně stojí průběžný důchodový systém PAYG a na straně druhé kompletní pokrytí finálních penzijních závazků jednorázovým navýšením penzijního fondu hned při vstupu účastníka do penzijního plánu).

Navíc z praktického hlediska je nepřijatelné, aby např. procentní příspěvky z platu kolísaly tak, jak tomu je v tab. 9.2.2d, 9.9.2e a 9.2.2f. Navíc se v těchto tabulkách předpokládá konstantní investiční výnos, což neodpovídá realitě, a různé turbulence na finančních trzích by tyto „teoretické“ příspěvkové sazby ještě víc rozkmitaly. Proto se v praxi penzijních fondů provádí různá *vyhlazení příspěvkových sazeb*, a to jak v čase (např. přes celé akumulací období daného účastníka), tak přes účastnický kmen (tak se srovnají platové a věkové rozdíly jednotlivých účastníků). Další komplikace vnášejí také různé garance a anuity týkající se více životů (viz odstavec 8.1).

9.3. Udržitelné penzijní výdaje

Pokud je penzijní systém založen v nezanedbatelné míře na fondovém principu, vyvstávají zákonitě otázky, kolik (ročně) odkládat během akumulací fáze a kolik (ročně) utrácet během fáze anuitní. Jako ideální se může jevit „přístup sobeckého penzisty“, kterému se podaří do konce života utratit poslední korunu, aniž by do posledního okamžiku strádal. Takový důchodce je sice obezřetný, ale na druhé svém případným potomkům usnadní život jen tím, že je finančně nezatíží. Vzhledem k velkému množství náhodných faktorů, které zde vstupují do hry, je rozumné zaujmout postoj velmi často aplikovaný v současných financích (tzv. hodnota v riziku VaR z anglického *Value-at-Risk*, viz např. Cipra (2002)), kdy nás zajímá pravděpodobnost ztráty či alternativně nejvyšší ztráta, ke které může dojít s předepsanou pravděpodobností; v penzijním kontextu se samozřejmě bude jednat především o pravděpodobnost toho, že nedojde ke „zruinování“ důchodce ještě před koncem jeho

života, což se v penzijní literatuře (viz např. Milevsky (2006)) někdy označuje jako *pravděpodobnost udržitelných penzijních výdajů*.

V praxi souvisí předchozí teoretický problém s tzv. *penzijním plánováním* (finanční poradci už dokonce mluví o *penzijním rizikovém managementu*). Bez ohledu na název je přitom nutné zohlednit tři klíčové faktory, kterými jsou

- (1) *alokace penzijních prostředků a jejich investování*, tj. intenzita, s jakou se kumulují příslušné příspěvky na penzijním účtu (např. v rámci penzijního fondu), a míra investičního zhodnocení takových penzijních aktiv;
- (2) *penzijní spotřeba*, tj. intenzita, s jakou se čerpá z daného penzijního účtu během dekulmační (anuitní) fáze; tempo anuitních výběrů také podstatně závisí na výši inflace, která může nutit penzistu, pokud si chce udržet určitý životní standard, „utrácet“ víc, než bylo původně zamýšleno;
- (3) *dlohověkost a zdravotní kondice*, neboť při penzijním plánování velmi závisí na co nejobjektivnějším odhadu délky a případně také kvality budoucího života.

Je zřejmé, že všechny tři zmíněné aspekty jsou významně ovlivňovány náhodou a bývají navzájem úzce provázány, takže výpočet unifikované míry, jakou je právě pravděpodobnost udržitelných penzijních výdajů, se zdá být zcela namístě. Jestliže např. roste penzijní spotřeba a vše ostatní (včetně investičního zhodnocování) se nemění, pak pravděpodobnost udržitelných penzijních výdajů klesá. Paradoxně pokud se zhoršuje zdravotní stav a v důsledku rostoucí morbiditity se zvyšuje úmrtnost, přičemž jinak opět nedochází ke změnám, pak pravděpodobnost udržitelných penzijních výdajů naopak roste (o paradox se zde jedná z etického pohledu a nikoli z pohledu pojistné matematiky, neboť v takovém případě dochází ke zkracování doby, po kterou se penze vyplácí). Výpočet pravděpodobnosti udržitelných penzijních výdajů má určité přednosti před alternativními postupy, které se v náhodném prostředí také někdy aplikují (např. simulace Monte Carlo jsou obvykle velmi pracné a objevují se problémy s jejich replikací a interpretací).

Počáteční hodnota životní anuity

V odstavcích 8.4.1 a 8.4.2 jsme se zabývali modelováním životních anuit (v diskrétním a spojitým čase). Podívejme se v rámci spojitých modelů tohoto typu ještě jednou na počáteční hodnotu *PV* životních anuit s tím, že zdůrazníme dvojí typ náhodnosti uplatňující se v tomto kontextu:

- (1) Náhodnost úrokových měr $r(t)$ se podle odstavce 5.2 obvykle modeluje pomocí geometrického Brownova pohybu

$$S_t = S_0 \cdot e^{B_t^{(\mu, \sigma)}} = S_0 \cdot e^{\mu \cdot t + \sigma \cdot B_t} \quad (9.3.1)$$

(S_0 je počáteční kapitál a $B_t^{(\mu, \sigma)}$ je (nestandardní) Brownův pohyb, viz (5.2.9)) s logaritmicke-normálním rozdělením

$$\ln S_t \sim N(\ln S_0 + \mu \cdot t, \sigma^2 t), \quad (9.3.2)$$

střední hodnotou

$$E(S_t) = S_0 \cdot e^{\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot t} = S_0 \cdot e^{\nu \cdot t} \quad (9.3.3)$$

a mediánem

$$M(S_t) = S_0 \cdot e^{\mu \cdot t}; \quad (9.3.4)$$

značí-li $\Phi(x)$ distribuční funkci rozdělení $N(0, 1)$, pak pro logaritmický výnos platí

$$P\left(\ln \frac{S_t}{S_0} < x\right) \sim \Phi\left(\frac{x - \mu \cdot t}{\sigma \sqrt{t}}\right). \quad (9.3.5)$$

(2) Náhodnost zbývající délky života T_x se podle odstavce 7.1 v nejjednodušším případě modeluje pomocí exponenciálního zákona úmrtnosti

$${}_t p_x = \exp\left\{-\int_x^{x+t} \lambda \, ds\right\} = e^{-\lambda t} \quad (9.3.6)$$

(viz (7.1.16)) se střední délkou života ve věku x

$$e_x = E(T_x) = \frac{1}{\lambda} \quad (9.3.7)$$

a mediánovou délkou života ve věku x

$$M(T_x) = \frac{\ln(2)}{\lambda}. \quad (9.3.8)$$

Kombinací modelů (9.3.1) a (9.3.6) dostaneme pro počáteční hodnotu životní anuity (s výplatou jednotkových ročních penzijních výplat ve spojitém čase) následující vyjádření

$$PV_x = \int_0^{T_x} e^{-(\mu t + \sigma B_t)} \, dt \quad (9.3.9)$$

(srovnej s (8.4.19)).

Pravděpodobnost ruinování

Pravděpodobnost ruinování je termín, který se běžně používá v komerčním pojištění pro označení pravděpodobnosti toho, že pojistné včetně pojistně-technických rezerv nestačí na případné pojistné plnění. V penzijním kontextu je pravděpodobnost ruinování doplňkem pravděpodobnosti udržitelných penzijních výdajů (viz počátek tohoto odstavce 9.3) do jedné, neboť je to vlastně pravděpodobnost *neudržitelných* penzijních výdajů, a může být vyjádřena modelově jako

$$\varphi(w) = P(PV_x > w) = P\left(\int_0^{T_x} e^{-(\mu+t+\sigma \cdot B_t)} dt > w\right), \quad (9.3.10)$$

kde $w > 0$ je stav penzijního účtu k důchodovému věku x na konci akumulární fáze. V literatuře bylo ukázáno (viz např. Dufresne (1990), Milevsky (1997)), že tuto pravděpodobnost lze poměrně přesně aproximovat pomocí pravděpodobnostního gama rozdělení. Gama rozdělení (viz např. Rektorys (1995)) má distribuční funkci tvaru

$$G(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x z^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{z}{\beta}\right) dz, \quad x > 0, \quad (9.3.11)$$

kde $\alpha > 0$ a $\beta > 0$ jsou parametry tohoto rozdělení a $\Gamma(\alpha)$ je (úplná) gama funkce

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} z^{\alpha-1} e^{-z} dz. \quad (9.3.12)$$

Matematicky zformulováno, za výše uvedených předpokladů (1) a (2) platí asymptoticky při $\lambda \rightarrow \infty$ a pevném $w > 0$

$$\begin{aligned} P(PV_x > w) &\sim G(1/w) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^{1/w} z^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{z}{\beta}\right) dz = \\ &= 1 - \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^w y^{-(\alpha+1)} \exp\left(-\frac{1}{\beta y}\right) dy, \end{aligned} \quad (9.3.13)$$

kde

$$\alpha = \frac{2\mu + 4\lambda}{\sigma^2 + \lambda} - 1, \quad \beta = \frac{\sigma^2 + \lambda}{2}. \quad (9.3.14)$$

Vztahy (9.3.14) mezi parametry jsou odvozeny porovnáním prvních a druhých momentů mezi teoretickým gama rozdělením na jedné straně a odpovídající počáteční anuitní hodnotou na straně druhé. Speciálně střední hodnotu PV_x lze aproximovat jako

$$E(PV_x) \sim \frac{1}{\mu - \sigma^2 + \lambda} \tag{9.3.15}$$

Pro numerický výpočet lze např. využít excelovskou funkci GAMMADIST vracející distribuční funkci gama rozdělení (užitečná je také funkce GAMMAINV vracející kvantily gama rozdělení, viz dále).

Formule (9.3.13) umožňuje numericky analyzovat riziko penzijní (či dokonce sociální) nedostatečnosti a vyšetřovat vliv nejrůznějších faktorů na toto riziko. Jak už bylo konstatováno v úvodu tohoto odstavce 9.3, podobá se takový postup analýzám finančního rizika v bankovníctví založeným na metodice VaR (Value-at-Risk).

Tab. 9.3.1a. Pravděpodobnost neudržitelných penzijních výdajů (v %) pro různé důchodové věky a výplatní poměry (muži a ženy v ČR 2010 pro $\mu = 1 \%$, $\sigma = 5 \%$)

<i>Muži v ČR 2010 pro $\mu = 1 \%$, $\sigma = 5 \%$: pravděpodobnost neudržitelných penzijních výdajů (v %)</i>												
<i>x</i>	<i>e_x</i>	λ	<i>Výplatní poměr 1/w:</i>									
			<i>0,01</i>	<i>0,02</i>	<i>0,03</i>	<i>0,04</i>	<i>0,05</i>	<i>0,06</i>	<i>0,07</i>	<i>0,08</i>	<i>0,09</i>	<i>0,10</i>
	∞	0,0000	68,7 %	99,6 %	100,0 %	100,0 %	100,0 %	100,0 %	100,0 %	100,0 %	100,0 %	100,0 %
55	22,50	0,0444	0,6 %	4,0 %	10,8 %	20,2 %	31,0 %	41,9 %	52,2 %	61,5 %	69,5 %	76,2 %
60	18,69	0,0535	0,4 %	2,7 %	7,5 %	14,4 %	22,9 %	32,1 %	41,3 %	50,1 %	58,2 %	65,5 %
65	15,26	0,0655	0,2 %	1,7 %	4,8 %	9,7 %	15,9 %	23,0 %	30,5 %	38,2 %	45,7 %	52,8 %
70	12,11	0,0826	0,1 %	1,0 %	2,9 %	5,9 %	10,0 %	15,0 %	20,6 %	26,6 %	32,7 %	38,9 %
75	9,16	0,1092	0,1 %	0,5 %	1,5 %	3,1 %	5,5 %	8,4 %	12,0 %	15,9 %	20,3 %	24,8 %
80	6,62	0,1511	0,0 %	0,2 %	0,6 %	1,4 %	2,5 %	4,0 %	5,9 %	8,1 %	10,6 %	13,4 %
85	4,54	0,2203	0,0 %	0,1 %	0,2 %	0,5 %	1,0 %	1,6 %	2,4 %	3,4 %	4,5 %	5,9 %

<i>Ženy v ČR 2010 pro $\mu = 1 \%$, $\sigma = 5 \%$: pravděpodobnost neudržitelných penzijních výdajů (v %)</i>												
<i>y</i>	<i>e_y</i>	λ	<i>Výplatní poměr 1/w:</i>									
			<i>0,01</i>	<i>0,02</i>	<i>0,03</i>	<i>0,04</i>	<i>0,05</i>	<i>0,06</i>	<i>0,07</i>	<i>0,08</i>	<i>0,09</i>	<i>0,10</i>
	∞	0,0000	68,7 %	99,6 %	100,0 %	100,0 %	100,0 %	100,0 %	100,0 %	100,0 %	100,0 %	100,0 %
55	27,31	0,0366	0,9 %	6,0 %	15,6 %	27,9 %	40,9 %	53,2 %	64,0 %	72,9 %	80,0 %	85,5 %
60	22,91	0,0436	0,6 %	4,2 %	11,2 %	20,9 %	31,8 %	42,9 %	53,3 %	62,6 %	70,6 %	77,2 %
65	18,71	0,0534	0,4 %	2,7 %	7,5 %	14,5 %	22,9 %	32,1 %	41,3 %	50,2 %	58,3 %	65,5 %
70	14,77	0,0677	0,2 %	1,5 %	4,5 %	9,0 %	14,9 %	21,7 %	29,0 %	36,4 %	43,8 %	50,8 %
75	11,12	0,0899	0,1 %	0,8 %	2,3 %	4,9 %	8,4 %	12,6 %	17,6 %	22,9 %	28,5 %	34,2 %
80	7,91	0,1264	0,0 %	0,3 %	1,0 %	2,2 %	3,9 %	6,1 %	8,8 %	11,9 %	15,3 %	19,0 %
85	5,32	0,1880	0,0 %	0,1 %	0,4 %	0,8 %	1,5 %	2,4 %	3,5 %	4,9 %	6,6 %	8,4 %

Tab. 9.3.1b. Pravděpodobnost neudržitelných penzijních výdajů (v %) pro různé důchodové věky a výplatní poměry (muži a ženy v ČR 2010 pro $\mu = 2,5 \%$, $\sigma = 5 \%$)

<i>Muži v ČR 2010 pro $\mu = 2,5 \%$, $\sigma = 5 \%$: pravděpodobnost neudržitelných penzijních výdajů (v %)</i>												
<i>x</i>	<i>e_x</i>	λ	<i>Výplatní poměr 1/w:</i>									
			<i>0,01</i>	<i>0,02</i>	<i>0,03</i>	<i>0,04</i>	<i>0,05</i>	<i>0,06</i>	<i>0,07</i>	<i>0,08</i>	<i>0,09</i>	<i>0,10</i>
	∞	0,0000	0,1 %	25,8 %	87,2 %	99,5 %	100,0 %	100,0 %	100,0 %	100,0 %	100,0 %	100,0 %
55	22,50	0,0444	0,1 %	1,4 %	5,0 %	10,9 %	18,9 %	28,2 %	37,9 %	47,5 %	56,4 %	64,4 %
60	18,69	0,0535	0,1 %	1,0 %	3,6 %	8,0 %	14,1 %	21,5 %	29,6 %	37,9 %	46,2 %	54,0 %
65	15,26	0,0655	0,1 %	0,7 %	2,5 %	5,5 %	9,9 %	15,4 %	21,8 %	28,6 %	35,6 %	42,6 %
70	12,11	0,0826	0,0 %	0,5 %	1,6 %	3,5 %	6,5 %	10,2 %	14,7 %	19,8 %	25,3 %	31,0 %
75	9,16	0,1092	0,0 %	0,3 %	0,9 %	2,0 %	3,7 %	5,9 %	8,7 %	12,0 %	15,7 %	19,7 %
80	6,62	0,1511	0,0 %	0,1 %	0,4 %	1,0 %	1,8 %	3,0 %	4,4 %	6,3 %	8,4 %	10,7 %
85	4,54	0,2203	0,0 %	0,0 %	0,2 %	0,4 %	0,7 %	1,2 %	1,9 %	2,7 %	3,7 %	4,8 %

<i>Ženy v ČR 2010 pro $\mu = 2,5 \%$, $\sigma = 5 \%$: pravděpodobnost neudržitelných penzijních výdajů (v %)</i>												
<i>y</i>	<i>e_y</i>	λ	<i>Výplatní poměr 1/w:</i>									
			<i>0,01</i>	<i>0,02</i>	<i>0,03</i>	<i>0,04</i>	<i>0,05</i>	<i>0,06</i>	<i>0,07</i>	<i>0,08</i>	<i>0,09</i>	<i>0,10</i>
	∞	0,0000	0,1 %	25,8 %	87,2 %	99,5 %	100,0 %	100,0 %	100,0 %	100,0 %	100,0 %	100,0 %
55	27,31	0,0366	0,2 %	2,0 %	6,8 %	14,8 %	25,1 %	36,3 %	47,6 %	57,9 %	67,0 %	74,7 %
60	22,91	0,0436	0,1 %	1,5 %	5,1 %	11,3 %	19,5 %	28,9 %	38,8 %	48,5 %	57,4 %	65,4 %
65	18,71	0,0534	0,1 %	1,0 %	3,6 %	8,0 %	14,1 %	21,5 %	29,6 %	38,0 %	46,2 %	54,0 %
70	14,77	0,0677	0,1 %	0,7 %	2,3 %	5,2 %	9,4 %	14,6 %	20,7 %	27,2 %	34,1 %	40,9 %
75	11,12	0,0899	0,0 %	0,4 %	1,3 %	3,0 %	5,5 %	8,7 %	12,6 %	17,1 %	22,0 %	27,2 %
80	7,91	0,1264	0,0 %	0,2 %	0,6 %	1,4 %	2,7 %	4,4 %	6,5 %	9,0 %	11,9 %	15,1 %
85	5,32	0,1880	0,0 %	0,1 %	0,2 %	0,6 %	1,1 %	1,8 %	2,7 %	3,9 %	5,2 %	6,8 %

Tab. 9.3.1c. Praviděpodobnost neudržitelných penzijních výdajů (v %) pro různé důchodové věky a výplatní poměry (muži a ženy v ČR 2010 pro $\mu = 5 \%$, $\sigma = 10 \%$)

<i>Muži v ČR 2010 pro $\mu = 5 \%$, $\sigma = 10 \%$: praviděpodobnost neudržitelných penzijních výdajů (v %)</i>												
<i>x</i>	<i>e_x</i>	λ	<i>Výplatní poměr 1/w:</i>									
			<i>0,01</i>	<i>0,02</i>	<i>0,03</i>	<i>0,04</i>	<i>0,05</i>	<i>0,06</i>	<i>0,07</i>	<i>0,08</i>	<i>0,09</i>	<i>0,10</i>
	∞	0,0000	0,0 %	2,1 %	15,3 %	40,7 %	66,7 %	84,5 %	93,8 %	97,8 %	99,3 %	99,8 %
55	22,50	0,0444	0,0 %	0,6 %	2,2 %	5,5 %	10,4 %	16,7 %	24,0 %	31,9 %	40,0 %	47,9 %
60	18,69	0,0535	0,0 %	0,4 %	1,7 %	4,2 %	8,0 %	13,0 %	19,0 %	25,6 %	32,7 %	39,8 %
65	15,26	0,0655	0,0 %	0,3 %	1,3 %	3,1 %	5,9 %	9,7 %	14,3 %	19,6 %	25,4 %	31,4 %
70	12,11	0,0826	0,0 %	0,2 %	0,9 %	2,1 %	4,0 %	6,7 %	10,0 %	13,9 %	18,3 %	23,0 %
75	9,16	0,1092	0,0 %	0,1 %	0,5 %	1,3 %	2,4 %	4,1 %	6,2 %	8,7 %	11,7 %	14,9 %
80	6,62	0,1511	0,0 %	0,1 %	0,3 %	0,7 %	1,3 %	2,2 %	3,3 %	4,7 %	6,4 %	8,4 %
85	4,54	0,2203	0,0 %	0,0 %	0,1 %	0,3 %	0,6 %	1,0 %	1,5 %	2,2 %	3,0 %	3,9 %

<i>Ženy v ČR 2010 pro $\mu = 5 \%$, $\sigma = 10 \%$: praviděpodobnost neudržitelných penzijních výdajů (v %)</i>												
<i>y</i>	<i>e_y</i>	λ	<i>Výplatní poměr 1/w:</i>									
			<i>0,01</i>	<i>0,02</i>	<i>0,03</i>	<i>0,04</i>	<i>0,05</i>	<i>0,06</i>	<i>0,07</i>	<i>0,08</i>	<i>0,09</i>	<i>0,10</i>
	∞	0,0000	0,0 %	2,1 %	15,3 %	40,7 %	66,7 %	84,5 %	93,8 %	97,8 %	99,3 %	99,8 %
55	27,31	0,0366	0,1 %	0,7 %	2,8 %	7,0 %	13,2 %	21,0 %	29,8 %	39,0 %	48,0 %	56,5 %
60	22,91	0,0436	0,0 %	0,6 %	2,3 %	5,6 %	10,6 %	17,0 %	24,5 %	32,5 %	40,7 %	48,7 %
65	18,71	0,0534	0,0 %	0,4 %	1,7 %	4,2 %	8,0 %	13,0 %	19,0 %	25,7 %	32,7 %	39,8 %
70	14,77	0,0677	0,0 %	0,3 %	1,2 %	2,9 %	5,6 %	9,2 %	13,6 %	18,7 %	24,3 %	30,1 %
75	11,12	0,0899	0,0 %	0,2 %	0,7 %	1,8 %	3,5 %	5,8 %	8,7 %	12,1 %	16,0 %	20,3 %
80	7,91	0,1264	0,0 %	0,1 %	0,4 %	1,0 %	1,8 %	3,1 %	4,7 %	6,7 %	9,0 %	11,6 %
85	5,32	0,1880	0,0 %	0,0 %	0,2 %	0,4 %	0,8 %	1,4 %	2,1 %	3,0 %	4,1 %	5,5 %

Nejprve v tabulkách 9.3.1 jsou podle (9.3.13) vypočteny praviděpodobnosti ruinování (tj. neudržitelných penzijních výdajů) zvlášť pro muže a ženy v České republice v roce 2010 a pro vybrané důchodové věky 55, 60, ..., 85 v závislosti na velikosti výplatního poměru 1/w (třeba výplatní poměr 0,06 znamená, že z penzijního účtu ve výši 1 000 000 Kč se každý rok vyplátí 60 000 Kč, tj. 5 000 Kč měsíčně), a to pro různé hodnoty výnosových parametrů μ (výnosový drift) a σ (výnosová volatilita): $\mu = 1 \%$ a $\sigma = 5 \%$ v tab. 9.3.1a, $\mu = 2,5 \%$ a $\sigma = 5 \%$ v tab. 9.3.1b, $\mu = 5 \%$ a $\sigma = 10 \%$ v tab. 9.3.1c. Parametr λ v exponenciálním zákonu úmrtnosti odhadujeme co nejjednodušeji na základě vztahu $\lambda = 1/e_x$, kde e_x je střední délka života v důchodovém věku x (viz (7.1.18)). Např. při $\mu = 1 \%$ a $\sigma = 5 \%$ (což odpovídá poměrně konzervativní investiční strategii) pro muže s důchodovým věkem 65 let a výplatním poměrem 0,06 (tj. 60 000 Kč ročně z penzijního účtu ve výši 1 000 000 Kč apod.) činí odpovídající

pravděpodobnost ruinování 23,0 % (pro ženu se stejným důchodovým věkem 65 let dosahuje tato pravděpodobnost samozřejmě vyšší hodnoty 32,1 %, viz tab. 9.3.1a). Jinými slovy, situace neudržitelných penzijních výdajů čeká v tomto případě každého pátého důchodce a každou třetí důchodkyni. Při růstu výnosového driftu ovšem pravděpodobnost ruinování prudce klesá bez ohledu na vyšší volatilitu, např. při $\mu = 5\%$ a $\sigma = 10\%$ (viz tab. 9.3.1c) a jinak stejných parametrických hodnotách klesá pravděpodobnost ruinování na 9,7 % pro muže a na 13,0 % pro ženu. Obecně pravděpodobnost ruinování klesá (i) s rostoucím důchodovým věkem, (ii) s klesajícím výplatním poměrem $1/w$ (tj. s rostoucím stavem penzijního účtu či s klesající výší jednotlivých anuitních plateb), (iii) s rostoucím výnosovým driftem μ , (iv) s klesající výnosovou volatilitou σ a také je nižší pro muže než pro ženy.

Tab. 9.3.2a. Maximální výplatní poměr $1/w$ (v %) s tolerancí ruinování 1 % pro různé důchodové věky a výnosové drifty (muži a ženy v ČR 2010 pro $\sigma = 5\%$)

Muži v ČR 2010 pro $\sigma = 5\%$: maximální výplatní poměr $1/w$ (v %) s tolerancí ruinování 1 %													
x:	e_x	λ	Drift μ :										
			0 %	0,5 %	1 %	1,5 %	2 %	2,5 %	3 %	4 %	5 %	6 %	7 %
	∞	0,0000	neex.	0,055 %	0,291 %	0,596 %	0,935 %	1,293 %	1,666 %	2,441 %	3,244 %	4,067 %	4,904 %
55	22,50	0,0444	0,857 %	1,023 %	1,201 %	1,387 %	1,583 %	1,786 %	1,998 %	2,441 %	2,909 %	3,398 %	3,907 %
60	18,69	0,0535	1,053 %	1,221 %	1,397 %	1,582 %	1,774 %	1,973 %	2,179 %	2,609 %	3,061 %	3,533 %	4,024 %
65	15,26	0,0655	1,315 %	1,483 %	1,659 %	1,841 %	2,030 %	2,225 %	2,425 %	2,842 %	3,279 %	3,734 %	4,205 %
70	12,11	0,0826	1,686 %	1,855 %	2,030 %	2,210 %	2,396 %	2,586 %	2,782 %	3,186 %	3,607 %	4,044 %	4,495 %
75	9,16	0,1092	2,265 %	2,435 %	2,609 %	2,787 %	2,970 %	3,156 %	3,346 %	3,738 %	4,143 %	4,561 %	4,991 %
80	6,62	0,1511	3,177 %	3,348 %	3,521 %	3,698 %	3,878 %	4,061 %	4,246 %	4,626 %	5,016 %	5,416 %	5,826 %
85	4,54	0,2203	4,686 %	4,857 %	5,030 %	5,205 %	5,383 %	5,562 %	5,743 %	6,112 %	6,489 %	6,874 %	7,265 %

Ženy v ČR 2010 pro $\sigma = 5\%$: maximální výplatní poměr $1/w$ (v %) s tolerancí ruinování 1 %													
y	e_y	λ	Drift μ :										
			0 %	0,5 %	1 %	1,5 %	2 %	2,5 %	3 %	4 %	5 %	6 %	7 %
	∞	0,0000	neex.	0,055 %	0,291 %	0,596 %	0,935 %	1,293 %	1,666 %	2,441 %	3,244 %	4,067 %	4,904 %
55	27,31	0,0366	0,687 %	0,853 %	1,031 %	1,220 %	1,420 %	1,629 %	1,847 %	2,305 %	2,790 %	3,299 %	3,829 %
60	22,91	0,0436	0,840 %	1,006 %	1,183 %	1,370 %	1,566 %	1,770 %	1,982 %	2,427 %	2,896 %	3,387 %	3,898 %
65	18,71	0,0534	1,052 %	1,220 %	1,396 %	1,580 %	1,773 %	1,972 %	2,178 %	2,608 %	3,060 %	3,532 %	4,023 %
70	14,77	0,0677	1,362 %	1,531 %	1,706 %	1,888 %	2,076 %	2,270 %	2,470 %	2,885 %	3,320 %	3,772 %	4,240 %
75	11,12	0,0899	1,846 %	2,015 %	2,190 %	2,369 %	2,554 %	2,743 %	2,937 %	3,337 %	3,753 %	4,184 %	4,628 %
80	7,91	0,1264	2,641 %	2,811 %	2,985 %	3,162 %	3,343 %	3,528 %	3,716 %	4,102 %	4,499 %	4,909 %	5,330 %
85	5,32	0,1880	3,982 %	4,153 %	4,326 %	4,502 %	4,680 %	4,861 %	5,044 %	5,417 %	5,799 %	6,189 %	6,588 %

Tab. 9.3.2b. Maximální výplatní poměr $1/w$ (v %) s tolerancí ruinování 5 % pro různé důchodové věky a výnosové drifty (muži a ženy v ČR 2010 pro $\sigma = 5\%$)

Muži v ČR 2010 pro $\sigma = 5\%$: maximální výplatní poměr $1/w$ (v %) s tolerancí ruinování 5 %													
y	e_x	λ	Drift μ :										
			0 %	0,5 %	1 %	1,5 %	2 %	2,5 %	3 %	4 %	5 %	6 %	7 %
	∞	0,0000	neex.	0,102 %	0,411 %	0,771 %	1,156 %	1,555 %	1,965 %	2,806 %	3,666 %	4,540 %	5,424 %
55	22,50	0,0444	2,284 %	1,919 %	2,180 %	2,449 %	2,725 %	3,007 %	3,296 %	3,890 %	4,503 %	5,133 %	5,778 %
60	18,69	0,0535	2,783 %	2,290 %	2,550 %	2,816 %	3,090 %	3,368 %	3,653 %	4,236 %	4,837 %	5,454 %	6,085 %
65	15,26	0,0655	3,445 %	2,781 %	3,041 %	3,306 %	3,576 %	3,852 %	4,132 %	4,705 %	5,294 %	5,897 %	6,513 %
70	12,11	0,0826	4,384 %	3,478 %	3,737 %	4,000 %	4,268 %	4,540 %	4,816 %	5,379 %	5,955 %	6,544 %	7,144 %
75	9,16	0,1092	5,849 %	4,566 %	4,824 %	5,086 %	5,351 %	5,619 %	5,891 %	6,443 %	7,007 %	7,580 %	8,164 %
80	6,62	0,1511	8,156 %	6,278 %	6,536 %	6,796 %	7,059 %	7,324 %	7,592 %	8,134 %	8,686 %	9,245 %	9,813 %
85	4,54	0,2203	11,969 %	9,108 %	9,365 %	9,624 %	9,885 %	10,148 %	10,412 %	10,946 %	11,486 %	12,032 %	12,585 %

Ženy v ČR 2010 pro $\sigma = 5\%$: maximální výplatní poměr $1/w$ (v %) s tolerancí ruinování 5 %													
x	e_y	λ	Drift μ :										
			0 %	0,5 %	1 %	1,5 %	2 %	2,5 %	3 %	4 %	5 %	6 %	7 %
	∞	0,0000	neex.	0,102 %	0,411 %	0,771 %	1,156 %	1,555 %	1,965 %	2,806 %	3,666 %	4,540 %	5,424 %
55	27,31	0,0366	1,348 %	1,599 %	1,861 %	2,132 %	2,411 %	2,698 %	2,992 %	3,598 %	4,225 %	4,870 %	5,530 %
60	22,91	0,0436	1,635 %	1,887 %	2,147 %	2,416 %	2,693 %	2,976 %	3,265 %	3,860 %	4,474 %	5,106 %	5,752 %
65	18,71	0,0534	2,035 %	2,287 %	2,547 %	2,814 %	3,087 %	3,366 %	3,651 %	4,234 %	4,835 %	5,452 %	6,083 %
70	14,77	0,0677	2,617 %	2,870 %	3,130 %	3,394 %	3,664 %	3,939 %	4,219 %	4,790 %	5,377 %	5,978 %	6,592 %
75	11,12	0,0899	3,525 %	3,779 %	4,037 %	4,300 %	4,567 %	4,838 %	5,112 %	5,672 %	6,244 %	6,828 %	7,423 %
80	7,91	0,1264	5,016 %	5,271 %	5,529 %	5,790 %	6,054 %	6,321 %	6,591 %	7,138 %	7,696 %	8,263 %	8,839 %
85	5,32	0,1880	7,532 %	7,787 %	8,045 %	8,304 %	8,566 %	8,830 %	9,095 %	9,632 %	10,177 %	10,728 %	11,286 %

Tab. 9.3.2c. Maximální výplatní poměr $1/w$ (v %) s tolerancí ruinování 10 % pro různé důchodové věky a výnosové drifty (muži a ženy v ČR 2010 pro $\sigma = 5\%$)

Muži v ČR 2010 pro $\sigma = 5\%$: maximální výplatní poměr $1/w$ (v %) s tolerancí ruinování 10%													
x	e_x	λ	Drift μ :										
			0%	0,5%	1%	1,5%	2%	2,5%	3%	4%	5%	6%	7%
	∞	0,0000	neex.	0,138%	0,487%	0,878%	1,287%	1,709%	2,138%	3,014%	3,905%	4,807%	5,717%
55	22,50	0,0444	2,284%	2,587%	2,897%	3,214%	3,536%	3,864%	4,198%	4,877%	5,573%	6,282%	7,003%
60	18,69	0,0535	2,783%	3,086%	3,396%	3,711%	4,031%	4,356%	4,686%	5,357%	6,043%	6,741%	7,451%
65	15,26	0,0655	3,445%	3,749%	4,058%	4,371%	4,690%	5,012%	5,338%	6,001%	6,676%	7,364%	8,061%
70	12,11	0,0826	4,384%	4,688%	4,996%	5,309%	5,625%	5,944%	6,267%	6,921%	7,587%	8,262%	8,947%
75	9,16	0,1092	5,849%	6,153%	6,461%	6,772%	7,086%	7,403%	7,722%	8,368%	9,023%	9,686%	10,358%
80	6,62	0,1511	8,156%	8,462%	8,769%	9,079%	9,391%	9,705%	10,021%	10,658%	11,303%	11,955%	12,613%
85	4,54	0,2203	11,969%	12,275%	12,582%	12,891%	13,201%	13,513%	13,826%	14,457%	15,092%	15,733%	16,379%

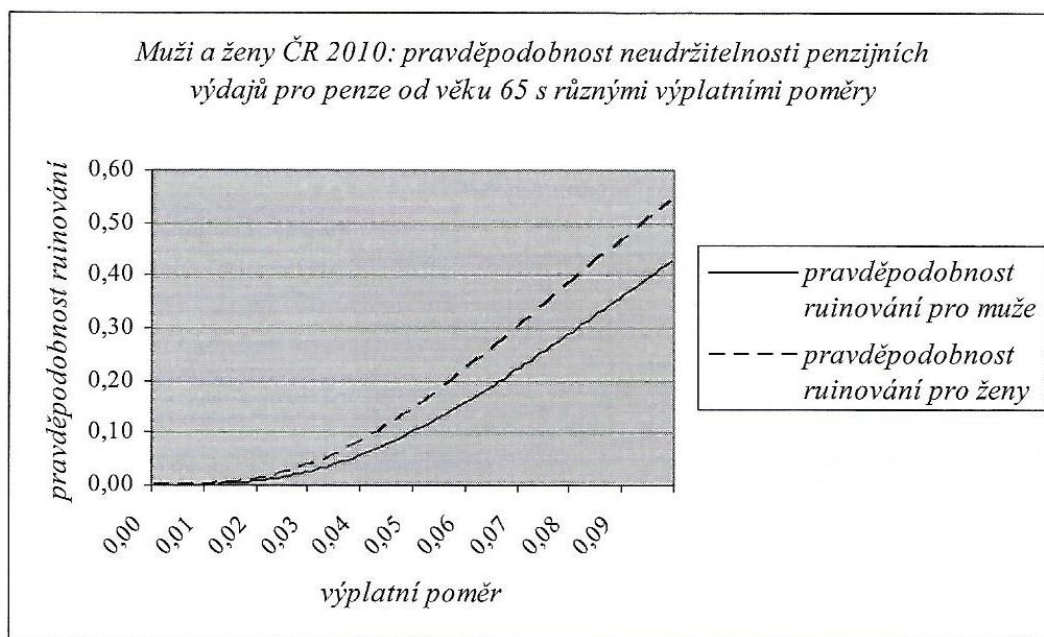
Ženy v ČR 2010 pro $\sigma = 5\%$: maximální výplatní poměr $1/w$ (v %) s tolerancí ruinování 10%													
y	e_y	λ	Drift μ :										
			0%	0,5%	1%	1,5%	2%	2,5%	3%	4%	5%	6%	7%
	∞	0,0000	neex.	0,138%	0,487%	0,878%	1,287%	1,709%	2,138%	3,014%	3,905%	4,807%	5,717%
55	27,31	0,0366	1,854%	2,155%	2,466%	2,785%	3,110%	3,442%	3,779%	4,469%	5,175%	5,896%	6,630%
60	22,91	0,0436	2,240%	2,543%	2,853%	3,170%	3,493%	3,821%	4,155%	4,836%	5,532%	6,242%	6,965%
65	18,71	0,0534	2,780%	3,083%	3,392%	3,708%	4,028%	4,353%	4,683%	5,354%	6,040%	6,738%	7,448%
70	14,77	0,0677	3,565%	3,869%	4,177%	4,491%	4,809%	5,131%	5,456%	6,118%	6,792%	7,477%	8,173%
75	11,12	0,0899	4,789%	5,093%	5,401%	5,713%	6,029%	6,347%	6,669%	7,320%	7,982%	8,654%	9,335%
80	7,91	0,1264	6,799%	7,104%	7,412%	7,722%	8,035%	8,350%	8,668%	9,310%	9,960%	10,618%	11,283%
85	5,32	0,1880	10,190%	10,496%	10,803%	11,112%	11,423%	11,736%	12,050%	12,683%	13,322%	13,967%	14,618%

Tabulky 9.3.2 přistupují k problematice neudržitelných penzijních výdajů opačným (i když možná praktičtějším) způsobem: obsahují zvlášť pro muže a ženy v České republice v roce 2010 a pro vybrané důchodové věky 55, 60, ..., 85 maximální výplatní poměry $1/w$ přicházející v úvahu s předem danou tolerancí (tj. pravděpodobností ruinování, kterou ještě daný penzijní systém toleruje), a to pro vybrané hodnoty výnosového driftu $\mu = 0\%$, $0,5\%$, 1% , $1,5\%$, 2% , $2,5\%$, 3% , 4% , ..., 7% , pro výnosovou volatilitu $\sigma = 5\%$ a pro různé výše tolerance: 1% v tab. 9.3.2a, 5% v tab. 9.3.2b a 10% v tab. 9.3.2c. Parametr λ v exponenciálním zákonu úmrtnosti je odhadnut opět pomocí vztahu $\lambda = 1/e_x$. Např. při toleranci 1% , důchodovém věku 65 let a konzervativních hodnotách $\mu = 1\%$ a $\sigma = 5\%$ je maximální výplatní poměr $1,659\%$ pro muže a $1,396\%$ pro ženy (tj. 16 590 Kč a 13 960 Kč ročně z penzijního účtu ve výši 1 000 000 Kč, viz tab. 9.3.2a). Jedná se o překvapivě nízké anuitní výplaty (zvlášť když si je přepočteme na 1 383 Kč a 1 163 Kč měsíčně), ale uvědomme si, jak vysoký je zde

stupeň bezpečnosti (pravděpodobnost ruinování je přípustná pouze v maximální výši 1 %). Pro vyšší výnosový drift $\mu = 2,5\%$ a jinak stejné hodnoty se maximální roční výběry zvýší na 22 250 Kč pro muže a 19 720 Kč pro ženy. Pokud nám stačí tolerance jen 10 % (viz tab. 9.3.2c), lze již při konzervativních výnosových hodnotách $\mu = 1\%$ a $\sigma = 5\%$ ročně čerpat 40 580 Kč (tj. měsíčně 3 382 Kč pro muže v důchodovém věku 65 let) a 33 920 Kč (tj. měsíčně 2 827 Kč pro ženy v důchodovém věku 65 let); pro vyšší výnosový drift $\mu = 2,5\%$ a jinak stejné hodnoty se maximální roční výběry zvýší na 50 120 Kč (tj. 4 177 Kč měsíčně) pro muže a 43 530 Kč (tj. 3 628 Kč měsíčně) pro ženy.

Konečně na obr. 9.3.1 a 9.3.2 je celá situace znázorněna graficky. Konkrétně na obr. 9.3.1 je zachycen růst pravděpodobnosti ruinování v závislosti na rostoucích výplatních poměrech. Na obr. 9.3.2 je zvláště pro muže a ženy znázorněn pokles minimálního penzijního kapitálu potřebného pro výplatu jednotkové roční penze s různými tolerancemi 1 %, 5 % a 10 % v závislosti na rostoucím důchodovém věku (muži a ženy v ČR 2010 pro $\mu = 2,5\%$ a $\sigma = 5\%$).

Obr. 9.3.1. Pravděpodobnost neudržitelnosti penzijních výdajů (tj. pravděpodobnost ruinování) pro penze od věku 65 s různými výplatními poměry $1/w$ (muži a ženy v ČR 2010 pro $\mu = 2,5\%$ a $\sigma = 5\%$)



Obr. 9.3.2. Minimální kapitál (v Kč) potřebný pro výplatu jednotkové roční penze (1 Kč) s danou tolerancí pro různé důchodové věky (muži a ženy v ČR 2010 pro $\mu = 2,5\%$ a $\sigma = 5\%$)

