Modelovanie príspevkovo a dávkovo definovaných dôchodkových systémov

Dôchodkové poistenie a penzijné fondy

Igor Melicherčík

DC a DB systém

Príspevkovo definovaný (Defined contribution) dôchodkový systém:

- Definuje sa len výška príspevku (napr. % z platu)
- Finálna výška úspor je nejasná
- Riziko je na strane sporiteľa

Dávkovo definovaný (Defined benefit) dôchodkový systém

- Definuje sa výška dávky z vložených prostriedkov
- Riziko je na strane poskytovateľa

DC systém - príklad

II. pilier na Slovensku:

- Prispievam definované % z platu (momentálne 5%)
- O príspevky sa stará DSS
- S nejasným výsledkom - výnosy aktív sú stochastické
- Dôchodok vo forme doživotnej anuity
- Výsledok anuity je tiež nejasný (závisí od stochastických úrokových mier a demografie)

DB systém - príklad

I. pilier na Slovensku:

$$D = POMB \times ODP \times ADH = \sum_i OBM_i \times ADH$$

- Každý rok zarobím $OBM_i \times ADH = \frac{W_i}{E(W_{NH})} \times ADH$
- ADH sa zvyšuje rastom miezd
- Každý príspevok teda úročím rastom miezd do obdobia dôchodku
- Za jasný príspevok jasná dávka

Jednoduchý spojitý DC model

- Príspevky $c(t)$ zo mzdy, zjednodušene $c(t) \equiv c = const$
- Investičný rast $g(t)$, zjednodušene $g(t) \equiv g = const$
- $w(t)$: mzdová inenzita v čase t
- Počet rokov sporenia: N
- a_x hodnota doživotnej jednotkovej (ročne) dávky

Nasporená suma:

$$S_T = \int_0^N c(t) e^{g(t)(N-t)} w(t)\, dt$$

Dôchodková dávka (ročne): $D = S_T / a_x$

Jednoduchý spojitý DC model

Rast mzdy (zjednodušene) $w(t) = we^{kt}$

$$
\begin{aligned}
D &= \frac{\int_0^N c(t)e^{g(N-t)}we^{kt}\,dt}{a_x} \\
&= \frac{cwe^{gN}}{k-g}\left(e^{(k-g)N} - 1\right)/a_x
\end{aligned}
$$

Ilustračný výpočet:

$c = 6\%, w = 12000\,\mathrm{EUR}, k = 2\%, g = 5\%,$
vek: 65 rokov, $N = 40$, realistická hodnota $a_x = 15$

$D = 8261,62$ EUR ročne = 688,47 EUR mesačne
$w(N) = we^{kN} = 26706,49$ EUR ==> náhrada 30,93%

Anuitné platby s rastovým faktorom

Potreba chrániť sa proti inflácii

Anuita s jednotkovými platbami zvyšujúcimi sa faktorom g:

$$a_x^{(g)} = \mathrm{E}(PV_x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{{}_ip_x(1+g)^i}{(1+r)^i}$$

${}_ip_x$ je pravdepodobnosť, že osoba vo veku x sa dožije ešte aspoň i rokov

Možno zovšeobecniť:
úrokové miery r_j, protiinflačný index π_j:

$$a_x^{(g)} = \mathrm{E}(PV_x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{{}_ip_x \prod_{j=1}^{i}(1+\pi_j)}{\prod_{j=1}^{i}(1+r_j)}$$

Stochastické DC modely

Pri DC modeloch sporiteľ čelí viacerým neistotám

Akumulačná fáza

- Stochastické výnosy akcií
- Stochastický vývoj úrokových mier
- Stochastický vývoj mzdy

Deakumulačná fáza

- Stochastická dĺžka života
- Stochastický vývoj úrokových mier

DB systém

Je viac možností ako definovať dávky

- Plošný dôchodok - všetkým rovnako
- Plošne vymeriavaný dôchodok - lineárne podľa počtu odpracovaných rokov N: $D = c \times N$
- Dôchodok podľa mzdy v posledom aktívnom roku. Súčin počtu opracovaných rokov N, zásluhového faktora α a mzdy v poslednom roku w_N:

$$D = \alpha \times w_N \times N$$

- Dôchodok podľa priemeru mzdy $\overline{w}$ za pracovnú históriu:

$$D = \alpha \times \overline{w} \times N$$

Jednoduchý spojitý DB model

- $w(t)$: mzdová intenzita v čase t
- Počet rokov sporenia: N
- α: zásluhový dôchodkový faktor (% zo mzdy za rok)
- β: váhový koeficient

DB dávka:

$$D = \alpha N \beta \int_0^N e^{-\beta(N-t)} w(t)\, dt = \alpha N \omega(N)$$

Spriemerovaný plat za obdobie N:

$$\omega(N) = \beta \int_0^N e^{-\beta(N-t)} w(t)\, dt$$

Exponenciálne priemerovanie

Exponenciálne priemerovanie pri časových radoch

$$\hat{y}_t = \beta \sum_{i=0}^{\infty} (1-\beta)^i y_{t-i}\,,\ 0 < \beta < 1.$$

Platí: $\beta \sum_{i=0}^{\infty} (1-\beta)^i = 1$.

Ak $w(t) = w$, potom

$$\omega(N) = w(1 - e^{-\beta N}) \sim w$$

pre vysoké hodnoty β alebo dlhé časové horizonty N.

DB model - Ilustračný príklad 1.

- Mzdová intenzita $w(t) = w = 12000$ EUR (ročne)
- Zásluhový faktor $\alpha = 1,25\%$ (= 50% náhrada/40 rokov)
- Počet rokov $N = 40$
- Pri exponeciálnom priemerovaní dáva zmysel $\beta \to \infty$

$$\begin{aligned} D &= 1,25\% \times 40 \times 12000\,\text{EUR} \\ &= 6000\,\text{EUR ročne} \\ &= 500\,\text{EUR mesačne.} \end{aligned}$$

DB model - Ilustračný príklad 2.

Realistickejšie nastavenie: $w(t) = we^{kt}$. Potom

$$\omega(N) = \frac{\beta w}{\beta + k}\left(e^{kN} - e^{-\beta N}\right)$$

Pre vysoké hodnoty β platí: $\omega(N) \to w(N)$.

Ilustračný príklad

$\beta = 0,3$, $N = 40$, $k = 2\%$, $\alpha = 1,25\%$

==> $w(N) = 26706$ EUR ročne = 2226 EUR mesačne
==> $\omega(N) = 25037$ EUR ročne = 2086 EUR mesačne
==> $D = 1,25\% \times 40 \times 25037$
= 12519 EUR ročne = 1043 EUR mesačne

Záväzky DB systému

Prevádzkovateľ DB systému musí včas kontrolovať nároky účastníkov

V dôchodkovom veku je už neskoro, nemusí na to mať prostriedky

Predpokladáme celkový počet odpracovaných rokov N

Záväzky budeme počítať po $\tau \leq N$ odpracovaných rokoch

3 spôsoby merania záväzkov

- Dôchodkové záväzky (retirement benefit obligation) vo veku y:

$$RBO_y = e^{-r(x-y)}\alpha N\omega(N)a_x$$

==> Diskontovanie plného záväzku

- Akumulované dôchodkové záväzky (accumulated benefit obligation) vo veku y:

$$ABO_y = e^{-r(x-y)}\alpha\tau\omega(\tau)a_x$$

==> Len naozaj zaslúžená výška záväzku
==> Ak by som už nepracoval, tieto záväzky mi ostanú

3 spôsoby merania záväzkov

- Projektované dôchodkové záväzky (projected benefit obligation) vo veku y:

$$PBO_y = e^{-r(x-y)} \alpha \tau \omega(N) a_x$$

==> Rešpektuje sa, že zaslúžená je len časť
==> Je tu však celá mzdová projekcia $\omega(N)$

Vo veku odchodu do dôchodku x sa stretnú:

$$RBO_x = ABO_x = PBO_x = \alpha N \omega(N) a_x$$

Inak platí:

$$ABO_y < PBO_y < RBO_y$$

Meranie záväzkov - ilustračný príklad

Nastavenie parametrov:

$N = 40$, $w = 12000$ EUR, $w(t) = we^{kt}$, $k = 2\%$
$\beta = 1$, $\alpha = 1,25\%$, $r = 1\%$

$$\begin{aligned} w(N) &= 26706\,\text{EUR} \\ \omega(N) &= 26183\,\text{EUR} \end{aligned}$$

Vek odchodu do dôchodku $x = 65$ rokov
Hodnota anuity, ktorá vypláca 1 EUR ročne $a_x = 15$

$$RBO_x = ABO_x = PBO_x = \alpha N \omega(N) a_x = 196371\,\text{EUR}$$

Meranie záväzkov - ilustračný príklad

Vek y	ABO_y	PBO_y	RBO_y
25	0	0	131632
30	8537	17298	138380
35	19959	36369	145475
40	34785	57350	152934
45	53885	80388	160775
50	78257	105636	169018
55	109107	133263	177684
60	147891	163445	186794
65	196371	196371	196371

Cieľ je rovnaký, rozdielna je stratégia navyšovania
RBO - stačí úročiť
ABO, PBO potrebuje podsatné príspevky zo mzdy
ABO pomalý štart, potom rýchlejší nárast príspevkov
PBO rýchlejší štart, potom pozvolnejší nárast príspevkov

Udržatel’nosť dôchodkových výdavkov

Pri DC systéme mám v rukách sporenie

Vezmem do svojich rúk aj výdavkovú časť?

Po kúpe anuity mám síce istotu príjmu do smrti, nezanechám však žiadne dedičstvo

Ak budem len míňať nasporenú sumu, možno niečo po mne ostane, riskujem však krach - minutie nasporených prostriedkov ešte počas života

Dva pekné články na referovanie:

Suboptimality of Immediate Annuitization in Private Pension Schemes.

Optimal Asset Allocation Towards The End of the Life Cycle: To Annuitize or Not to Annuitize?

Model udržatel'nosti výdavkov

Čelím dvom neistotám:

- Stochastický výnos aktív
- Stochastická dĺžka života

Výnos aktív:

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma B_t},$$

B_t je štandardný Brownov pohyb.

Pravdepodobnosti dožitia - exponenciálny zákon úmrtnosti:

$$_t p_x = e^{-\lambda t}$$

Ak T_x je dĺžka života, potom $e_x = \mathrm{E}(T_x) = \frac{1}{\lambda}$.

Pravdepodobnosť krachu

Súčasná hodnota jednotkovej (ročne) platby vyplácanej do smrti:

$$PV_x = \int_0^{T_x} e^{-(\mu t + \sigma B_t)}\, dt$$

Ak w je stav úctu pri odchode do dôchodku, potom pravdepodobnosť krachu je:

$$\mathrm{P}(PV_x > w) \sim G(1/w)\,,$$

kde G je distribučná funkcia Gamma rozdelenia.

Platí:

$$\mathrm{E}(PV_x) \sim \frac{1}{\mu - \sigma^2 + \lambda}$$

Distribučná funkcia Gamma rozdelenia

V exceli funkcia GAMMA.DIST

$$G(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^x z^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{z}{\beta}\right) dz,\ x > 0\,,$$

kde $\alpha > 0$, $\beta > 0$ sú parametre a $\Gamma(\alpha)$ je úplná Gamma funkcia:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty z^{\alpha-1} e^{-z}\, dz\,.$$

V našom prípade:

$$\alpha = \frac{2\mu + 4\lambda}{\sigma^2 + \lambda} - 1\,,\ \beta = \frac{\sigma^2 + \lambda}{2}\,.$$

P(krachu) - ilustratívny výpočet

Vyplácame ročne cw z nasporenej sumy w

Pravdepodobnosť krachu je potom:

$$\mathrm{P}(cwPV_x > w) = \mathrm{P}(cPV_x > 1) = \mathrm{P}(PV_x > 1/c) = G(c)\,.$$

Nech $x = 65$ rokov, e_x = 15 rokov, potom $\lambda = 1/15$.
Nech $\mu = 3\%$, $\sigma = 10\%$.

Pravdepodobnosti krachu:

c	1%	3%	5%	7%	10%	15%
P(krachu)	0.12%	2.97%	10.76%	22.31%	42.09%	69.93%