

*INVESTMENT STRATEGIES IN
DEFINED-CONTRIBUTION PENSION
SCHEMES*

DPPF 2020

I. Melicherčík, Gábor Szücs, I. Vilček

UK Bratislava

Tatra Asset Management

Typy fondov

DSS je povinná spravovať 2 fondy:

Garantovaný fond (dlhopisy)

Negarantovaný fond (typicky akcie)

Sporitelia majú možnosť držať aktíva vo fonde podľa ich výberu, môžu ich deliť v ľubovoľnom pomere.

Tento pomer môže v ľubovoľnom okamihu zmenený a podlieha reguláciám.

V čase blízko pred dôchodkom podiel v Garantovanom fonde musí byť postupne zvyšovaný.

Vývoj úspor

Nech s_t , $t = 1, 2, \dots, T$, je nasporená suma v čase t
 T je očakávaný čas odchodu do dôchodku.

Rozpočtové ohraničenie:

$$\begin{aligned} s_{t+1} &= \delta s_t \exp(R^s(t, t+1)) + (1 - \delta) s_t \exp(R^b(t, t+1)) + w_{t+1} \tau \\ s_1 &= w_1 \tau, \quad t = 1, 2, \dots, T - 1 \end{aligned}$$

w_t je ročný plat s rastom β_t

$R^s(t, t+1)$ a $R^b(t, t+1)$ sú ročné výnosy akcií a dlhopisov
v časovom intervale $[t, t+1)$.

Vývoj úspor

Nová stavová premenná: $d_t = \frac{s_t}{w_t}$

d_t je pomer nasporenej sumy a ročného platu

$$d_{t+1} = d_t \frac{\delta \exp(R^s(t, t+1)) + (1 - \delta) \exp(R^b(t, t+1))}{1 + \beta_t} + \tau,$$

$$d_1 = \tau$$

Táto veličina môže byť ľahko prepočítaná na mieru náhrady.

Modelovanie výnosov dlhopisov

Časová štruktúra úrokových mier sa riadi 1-faktorovým short rate modelom:

$$dr_t = \mu(r_t, t) dt + \omega(r_t, t) dZ_t$$

Uvažujeme model Cox-Ingersoll-Ross (CIR):

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma^b \sqrt{r_t} dZ_t, \quad \kappa, \theta, \sigma^b > 0,$$

kde θ je dlhodobá úroková miera, κ je miera reverzi a σ^b je volatilita procesu, Z_t je Brownov pohyb.

Vývoj úrokovej miery môžeme zdiskretizovať:

$$r_{t+1} = \theta + e^{-\kappa}(r_t - \theta) + \left(\sigma^b \sqrt{\frac{r_t}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa})} \right) \Phi, \quad \Phi \sim N(0, 1)$$

Modelovanie výnosov akcií

Ceny akcií S_t sú riadené geometrickým Brownovým pohybom.

Ročný výnos akcií teda možno vyjadriť ako:

$$R^s(t, t + 1) = \mu^s + \sigma^s \Psi ,$$

kde μ^s a σ^s sú stredná hodnota a volatilita ročných výnosov akcií v časovom intervale $[t, t + 1)$ a $\Psi \sim N(0, 1)$.

Náhodné premenné Φ , Ψ majú 2-rozmerné normálne rozdelenie:

$$\begin{bmatrix} \Psi \\ \Phi \end{bmatrix} \sim N_2 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \right) \quad (1)$$

kde $\rho = E(\Phi\Psi) \in (-1, 1)$ je korelačný koeficient.

Ďalšie predpoklady

Predpokladajme, že každý rok sporiteľ má možnosť určiť podiel akcií v portfóliu $\delta_t(I_t)$, kde I_t označuje informáciu pozostávajúcu z histórie výnosov dlhopisov a akcií $R^b(t', t' + 1)$, $R^s(t', t' + 1)$, a rastov miezd $\beta_{t'}$, $t' = 1, 2, \dots, t - 1$.

Predpokladáme, že rasty miezd β_t , $t = 1, 2, \dots, T - 1$ sú deterministické.

Dá sa ukázať, že potom jediná relevantná informácia sú hodnoty d_t a short rate r_t . Preto $\delta_t(I_t) \equiv \delta_t(d_t, r_t)$.

Dynamický akumulčný model

Maximalizujeme očakávanú užitočnosť d_T v čase odchodu do dôchodku T

$$\max E(U(d_T))$$

s rozpočtovými ohraničeniami pre $t = 1, 2, \dots, T - 1$

$$d_{t+1} = d_t \frac{\delta \exp(R^s(t, t+1)) + (1 - \delta) \exp(R^b(t, t+1))}{1 + \beta_t} + \tau,$$

$$d_1 = \tau$$

$$r_{t+1} = g(r_t, \Phi),$$

$$r_1 = r_{init}$$

Výstupom je optimálny podiel akcií

$$\delta_t \in [0, \Delta_t], t = 1, 2, \dots, T - 1,$$

$$\delta_t = \delta(t, I_t) \longrightarrow \delta(t, d_t, r_t)$$

Nastavenie parametrov modelu

Rok	Rast miezd	Rok	Príspevky
2013	4.37%	2013-2016	4%
2014	4.75%	2017	4.25%
2015	5.2%	2018	4.5%
2016-2020	6.4%	2019	4.75%
2021-2025	5.9%	2020	5%
2026-2030	5.6%	2021	5.25%
2031-2035	5.2%	2022	5.5%
2036-2040	4.9%	2023	5.75%
2041-2051	4.5%	2024-2051	6%

Funkcia užitočnosti: $-d^{1-a}$, $a = 9$

Nastavenie parametrov modelu

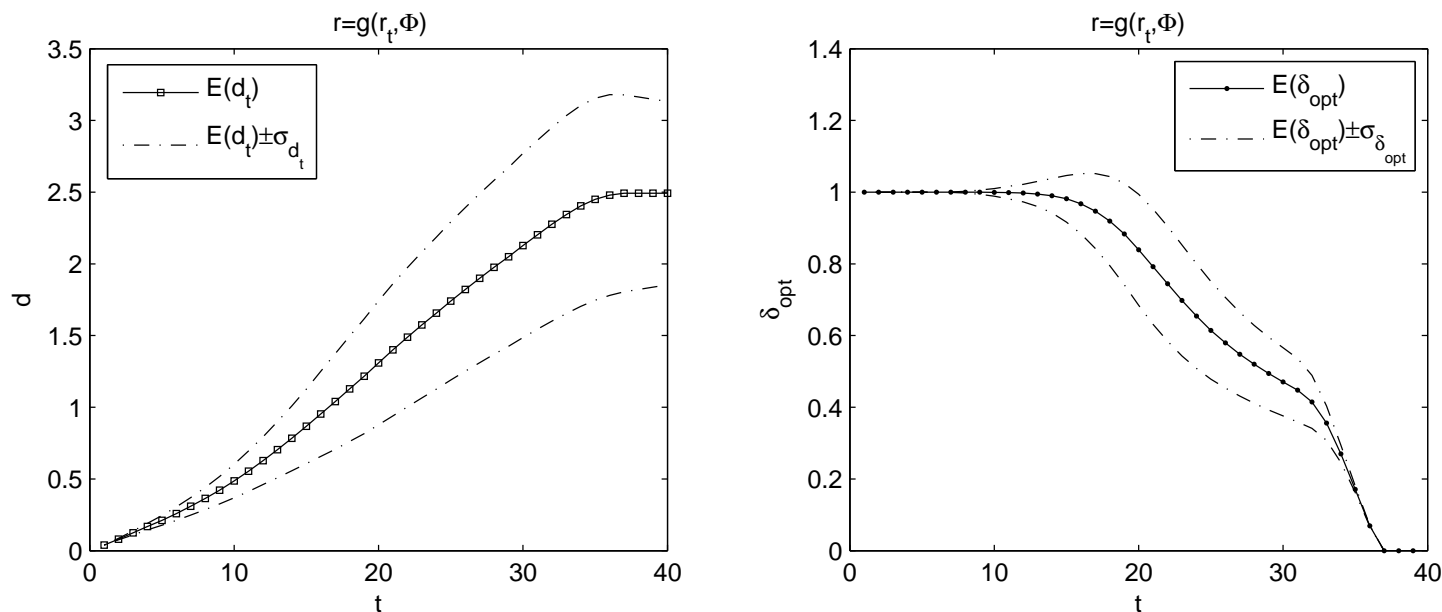
Vek sporitel'a	Rok	Maximálne % akcií	Δ_t
≤ 49	1. – 28.	100%	1
50 - 58	29. – 37.	$10 \cdot (59 - age)\%$	$0.1 \cdot (59 - age)$
≥ 59	38. – 40.	0%	0

κ	0.8993	T_b	3
θ	0.0226	μ_t^s	8.44%
σ^b	0.148	σ_t^s	0.1417
λ	0	ρ	-0.01082

Parametre akcií: S&P500, perióda 1817-2012

CIR parametre: denné dáta, EURIBOR 1999-2012

Výsledky - Základý scenár



Vývoj priemernej úrovne úspor (vľavo) a priemerný podiel akcií spolu so smerodajnou odchýlkou.

Priemerná úroveň úspor je malá: približne 2,5 násobok ročného platu.

Benchmark pre II. pilier

Uvažujme sporiteľ a prispievajúceho do II. piliera 6% z hrubej mzdy (t.j. 1/3 príspevkov na starobný dôchodok).

Tento budúci dôchodca dostane 2/3 starobného dôchodku z I. piliera, ktorý je nastavený na 50% náhradu.

Ak má byť II. pilier efektívny, mal by priniesť zvyšnú tretinu, t.j. 17% náhradu.

Mieru náhrady počítame pomocou štandardných anuitných formuliek:

$$M \sim \frac{d_T}{\sum_{k=0}^{\infty} p_{x,k} (1+i)^{-k} - \frac{11}{24}}$$

i je technická úroková miera

$p_{x,k}$ je pravdepodobnosť, že osoba vo veku x bude žiť najmenej nasledujúcich k rokov

Benchmark pre II. pilier

d_T / i	0%	0,5%	1%	1,5%	2%	2,5%	3%
0,5	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,04
1	0,05	0,06	0,06	0,06	0,07	0,07	0,07
1,5	0,08	0,08	0,09	0,09	0,1	0,1	0,11
2	0,11	0,11	0,12	0,13	0,13	0,14	0,15
2,5	0,13	0,14	0,15	0,16	0,16	0,17	0,18
3	0,16	0,17	0,18	0,19	0,2	0,21	0,22
3,5	0,19	0,2	0,21	0,22	0,23	0,24	0,25
4	0,21	0,23	0,24	0,25	0,26	0,28	0,29
4,5	0,24	0,25	0,27	0,28	0,3	0,31	0,33
5	0,27	0,28	0,3	0,31	0,33	0,35	0,36

17% miera náhrady potrebuje nasporených najmenej 2,5-3 ročných platov

Toto je otázne

Analýza citlivosti

- (M0) Základný scenár.
- (M1) Príspevky $\tau_t = 4\%$ počas celého obdobia sporenia.
- (M2) Príspevky $\tau_t = 9\%$ počas celého obdobia sporenia.
- (M3) Bez zákonných regulácií akciového fondu.
- (M4) Nižšia averzia k riziku $a = 5$.
- (M5) Vyššia durácia dlhopisového fondu $T_b = 5$.
- (M6) Nižší rast miezd: $\tilde{\beta}_{4-39} = \beta_{4-39} - 1\%$.
- (M7) Nižší drift výnosov akcií: $\mu_t^s = 5\%$.
- (M8) Lineárny rast t driftu výnosov akcií:
 $\mu_t^s = 2\% + 0.25 \cdot (t - 1)\%$.
- (M9) Vyššia volatilita výnosov akcií: $\sigma_t^s = 20\%$.
- (M10) Zakázané miešanie akciového a dlhopisového fondu,
t.j. $\delta_t \in \{0, 1\}$.

Analýza citlivosti

<i>Modifikácia</i>	$E(d_T)$	$\sigma(d_T)$	$Q_{5\%}(d_T)$	CE
(M0)	2.4947	0.6441	1.6226	1.9304
(M1)	1.7922	0.4747	1.1454	1.3591
(M2)	4.0357	1.0757	2.5808	3.0676
(M3)	2.8063	0.8028	1.7302	2.0361
(M4)	2.9284	1.1535	1.5875	2.2103
(M5)	2.4984	0.6487	1.6195	1.9266
(M6)	2.9597	0.7774	1.8997	2.2569
(M7)	1.6873	0.2326	1.3415	1.5550
(M8)	2.2122	0.5093	1.5049	1.7900
(M9)	2.1803	0.4912	1.4893	1.7719
(M10)	2.0326	0.4924	1.4054	1.6857

Stresové testovanie

Testovali sme vybrané stratégie proti súboru scenárov vývoja akciových driftov.

Parametre modelu CIR zostali nezmenené.

(SC1) $\mu_t^s = 11\%$ počas celého obdobia sporenia.

(SC2) $\mu_t^s = 9\%$ počas celého obdobia sporenia.

(SC3) $\mu_t^s = 7\%$ počas celého obdobia sporenia.

(SC4) $\mu_t^s = 5\%$ počas celého obdobia sporenia.

(SC5) Lineárny rast driftu od 2% do 11.5%:

$$\mu_t^s = 2\% + 0.25 \cdot (t - 1)\%.$$

Stresové testovanie

(SC6) S&P 500 (1900 – 1939)

(SC7) S&P 500 (1915 – 1954)

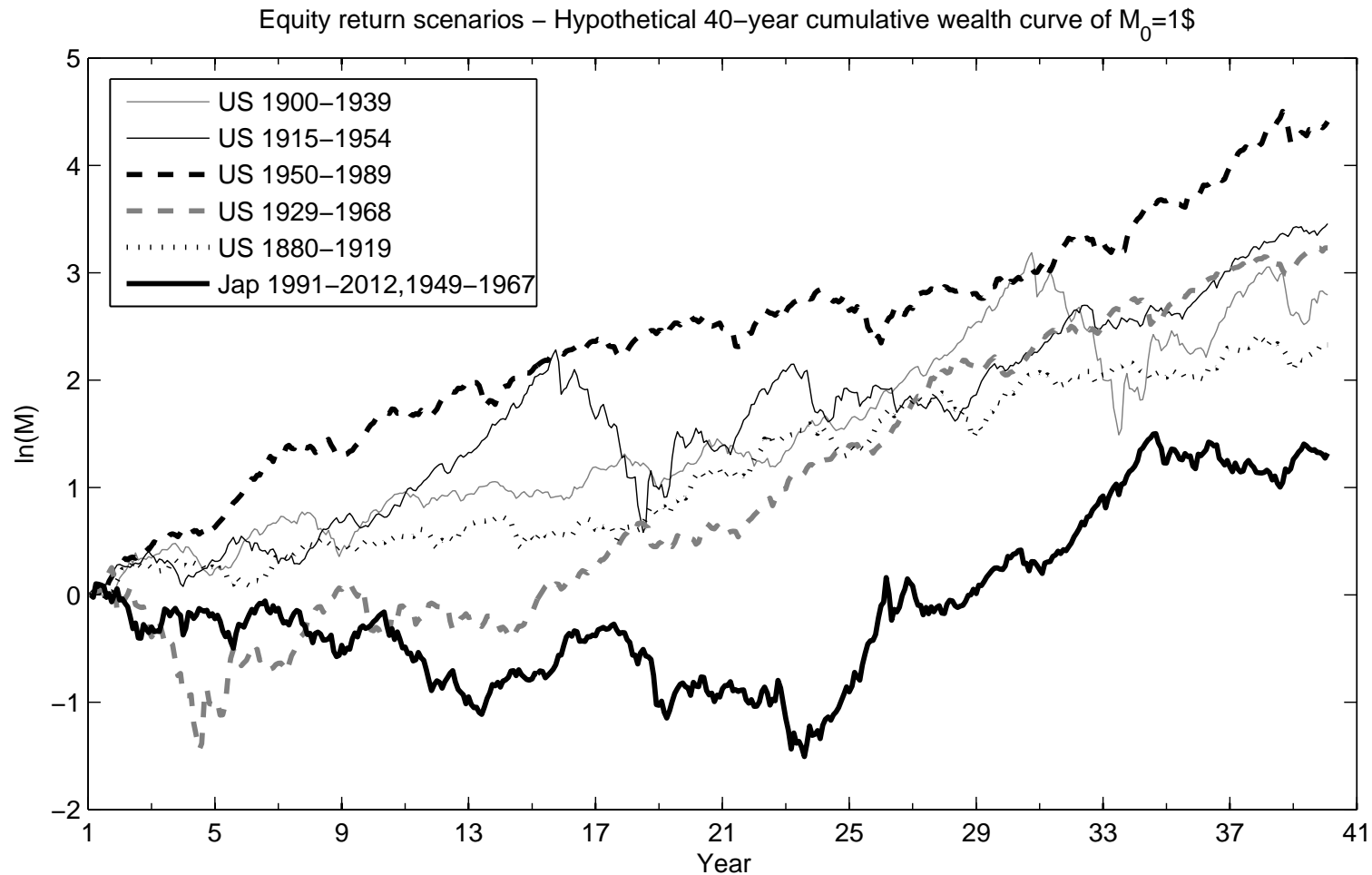
(SC8) S&P 500 (1950 – 1989)

(SC9) S&P 500 (1929 – 1968)

(SC10) S&P 500 (1880 – 1919)

(SC11) Nikkei 225 (1991 – 2012, 1949 – 1967)

Stresové testovanie - scenáre driftov



Scenáre (SC6)-(SC11) použité v stresovom testovaní.

Stratégie pre stresové testovanie

Stratégia	Popis
(ST1)-(ST11)	Optimálne $\hat{\delta}$ pre príslušný scenár
(ST12)	$\delta = 0$
(ST13)	$\delta = \Delta_t$
(ST14)	$\delta_t = \max\{0, 1 - \frac{t-1}{36}\}$
(ST15)	$\delta_t = \min\{\Delta_t, 1 - \frac{t+22}{100}\}$

Stratégia (ST14) začína investovať v akciovom fonde a každý rok postupne lineárne presúva úspory do dlhopisového fondu.

Stratégia (ST15) je populárne pravidlo: „Investuj (100-vek)% do akcií“.

Stresové testovanie-určitostné ekvivalenty

	SC1	SC2	SC3	SC4	SC5	SC6	SC7	SC8	SC9	SC10	SC11
(ST1)	2.40	2.00	1.71	1.48	1.76	1.87	1.81	1.94	2.85	1.72	2.64
(ST2)	2.37	2.01	1.73	1.50	1.78	1.83	1.87	2.01	2.72	1.77	2.58
(ST3)	2.28	1.99	1.74	1.54	1.77	1.82	1.94	2.05	2.48	1.77	2.30
(ST4)	2.05	1.87	1.70	1.56	1.70	1.76	1.90	1.95	2.13	1.70	1.92
(ST5)	2.29	1.99	1.73	1.52	1.79	1.80	1.97	2.02	2.62	1.76	2.58
(ST6)	1.91	1.72	1.57	1.44	1.60	3.78	1.33	1.61	2.03	1.74	1.86
(ST7)	1.90	1.73	1.57	1.45	1.61	1.73	4.67	1.68	1.92	1.43	2.49
(ST8)	2.04	1.81	1.62	1.46	1.66	1.83	1.85	3.11	2.51	2.00	1.72
(ST9)	2.01	1.79	1.61	1.46	1.67	1.45	1.45	1.83	4.39	1.41	3.11
(ST10)	1.89	1.72	1.57	1.45	1.60	1.88	1.81	1.93	2.09	2.69	1.38
(ST11)	1.82	1.66	1.53	1.42	1.59	1.45	1.70	1.63	2.26	1.25	6.98
(ST12)	1.40	1.40	1.40	1.40	1.40	1.40	1.40	1.40	1.40	1.40	1.40
(ST13)	2.38	1.99	1.69	1.46	1.76	1.90	1.76	1.91	2.89	1.68	2.58
(ST14)	1.95	1.78	1.64	1.53	1.63	1.73	1.77	1.82	2.05	1.67	1.87
(ST15)	2.16	1.90	1.70	1.53	1.76	1.73	1.88	1.96	2.44	1.68	2.40

Stresové testovanie-priemery $E(d_T)$

	SC1	SC2	SC3	SC4	SC5	SC6	SC7	SC8	SC9	SC10	SC11
(ST1)	3.69	2.94	2.38	1.96	2.44	2.58	2.64	2.95	4.33	2.44	3.85
(ST2)	3.26	2.70	2.25	1.90	2.29	2.38	2.56	2.79	3.68	2.30	3.37
(ST3)	2.76	2.39	2.07	1.81	2.09	2.20	2.41	2.52	3.00	2.09	2.74
(ST4)	2.24	2.04	1.85	1.69	1.84	1.96	2.13	2.16	2.34	1.85	2.15
(ST5)	2.89	2.48	2.14	1.85	2.21	2.22	2.53	2.57	3.32	2.17	3.30
(ST6)	2.47	2.16	1.92	1.71	1.95	5.91	1.54	1.99	2.65	2.21	2.39
(ST7)	2.41	2.12	1.88	1.69	1.91	2.07	7.79	2.06	2.42	1.66	3.24
(ST8)	2.72	2.33	2.01	1.76	2.05	2.35	2.38	4.75	3.41	2.62	2.13
(ST9)	2.67	2.30	2.00	1.76	2.07	1.82	1.70	2.38	7.60	1.72	4.38
(ST10)	2.37	2.10	1.88	1.69	1.90	2.35	2.32	2.41	2.63	3.73	1.56
(ST11)	2.26	2.03	1.83	1.66	1.90	1.73	2.12	1.98	2.91	1.42	11.17
(ST12)	1.40	1.40	1.40	1.40	1.40	1.40	1.40	1.40	1.40	1.40	1.40
(ST13)	4.33	3.23	2.49	1.99	2.57	2.97	2.60	3.01	5.43	2.50	4.10
(ST14)	2.15	1.93	1.76	1.61	1.73	1.85	1.92	1.99	2.25	1.78	1.99
(ST15)	2.67	2.28	1.98	1.74	2.04	2.03	2.23	2.35	3.07	1.96	2.93

Stresové testovanie-kvantily $Q_{5\%}$ z d_T

	SC1	SC2	SC3	SC4	SC5	SC6	SC7	SC8	SC9	SC10	SC11
(ST1)	2.06	1.69	1.42	1.22	1.47	1.56	1.51	1.63	2.44	1.44	2.25
(ST2)	2.01	1.69	1.45	1.25	1.49	1.53	1.57	1.70	2.30	1.48	2.18
(ST3)	1.91	1.67	1.46	1.30	1.49	1.53	1.63	1.72	2.09	1.49	1.93
(ST4)	1.75	1.60	1.47	1.34	1.47	1.51	1.62	1.67	1.82	1.46	1.63
(ST5)	1.93	1.67	1.45	1.28	1.50	1.51	1.66	1.71	2.20	1.47	2.18
(ST6)	1.59	1.43	1.31	1.20	1.34	3.27	1.12	1.34	1.69	1.45	1.55
(ST7)	1.58	1.44	1.32	1.22	1.35	1.45	4.07	1.41	1.60	1.21	2.08
(ST8)	1.70	1.51	1.35	1.22	1.38	1.53	1.54	2.64	2.10	1.67	1.44
(ST9)	1.68	1.49	1.34	1.22	1.39	1.20	1.22	1.52	3.87	1.18	2.61
(ST10)	1.57	1.44	1.32	1.22	1.34	1.57	1.51	1.61	1.74	2.26	1.18
(ST11)	1.52	1.39	1.28	1.20	1.33	1.21	1.42	1.36	1.88	1.06	6.09
(ST12)	1.37	1.37	1.37	1.37	1.37	1.37	1.37	1.37	1.37	1.37	1.37
(ST13)	2.03	1.67	1.40	1.21	1.46	1.59	1.46	1.59	2.53	1.40	2.19
(ST14)	1.67	1.55	1.44	1.35	1.43	1.50	1.54	1.57	1.76	1.46	1.63
(ST15)	1.80	1.60	1.43	1.30	1.48	1.45	1.58	1.64	2.04	1.42	2.01

Literatúra

KILIANOVÁ, S., MELICHERČÍK, I., ŠEVČOVIČ, D.(2006). *Dynamic accumulation model for the second pillar of the Slovak pension system.*

JAKUBÍK, T, MELICHERČÍK, I., ŠEVČOVIČ, D.(2008). *Sensitivity analysis for a dynamic stochastic accumulation model for optimal pension savings management.*

MELICHERČÍK, I., ŠEVČOVIČ, D.(2008). *Dynamic stochastic accumulation model with application to pension savings management.*

ŠEVČOVIČ, D., URBÁNOVÁ CSAJKOVÁ, A. (2005). *On a two-phase minmax method for parameter estimation of the Cox, Ingersoll, and Ross interest rate model.*