

Požiadavky na skúšku z predmetu Stochastický kalkulus a aplikácie

1. Základy teórie Lebesgueovho integrálu

- Topológia, otvorené množiny, spojité funkcie (definície)
- σ -algebra merateľných množín (definícia, príklady), borelovské množiny (definícia)
- Miera: definícia miery, príklady mier (aritmetická miera, Diracova miera, pravdepodobnostná miera), Lebesgueova miera ako rozšírenie elementárneho objemu
- Merateľné funkcie: definícia merateľnej funkcie, príklady merateľných funkcií, uzavretosť množiny merateľných funkcií na limitné prechody, jednoduché merateľné funkcie (definícia, príklady), všeobecná merateľná funkcia ako monotónna limita jednoduchých merateľných funkcií
- Lebesgueov integrál: definícia pre jednoduché merateľné funkcie, pre všeobecné merateľné funkcie, postupnosť ako funkcia na prirodzených číslach, súčet postupnosti ako Lebesgueov integrál, súvis Lebesgueovho, Riemannovho a Newtonovho integrálu
- Limitné vety: Lebesgueova veta o monotónnej konvergencii, Fatouova lema, Lebesgueova veta o majorante
- Súčin mier a Fubiniho veta
- L^p priestory: definícia L^p priestoru pre $1 \leq p \leq \infty$, Hölderova a Minkowského nerovnosť, úplnosť L^p priestoru
- Radon-Nikodymova veta: definícia náboja, absolútna spojitosť, formulácia Radon-Nikodymovej vety, hustota pravdepodobnostného rozdelenia
- Podmienená stredná hodnota: definícia a vlastnosti

2. Základy teórie stochastických diferenciálnych rovníc

- Wienerov proces (základné vlastnosti a hlavné myšlienky vybudovania Wienerovho procesu)
- Itôv integrál
- Itôva lemma, súčinové pravidlo, integrácia per-partes
- Martingaly, Veta o reprezentácii martingalov
- Girsanovova veta

3. Deriváty akcií

- Stochastická diferenciálna rovnica pre vývoj ceny akcie
- Samofinancované stratégie, syntetizovanie derivátov, rizikovo neutrálna miera
- Black – Scholesov model
- Put – Call parita
- Rôzne druhy derivátov (Bet, Supershare)
- Odvodenie Black-Scholesovej PDR

Minimálna kostra

Na skúške môžete dostať akúkoľvek otázku podľa sylabu. Zásadná nevedomosť pri niektorom z bodov z minimálnej kostry však diskvalifikuje z úspešnej skúšky.

1/ Definície: topológia, otvorené množiny, spojité funkcie, σ -algebra merateľných množín, borelovské množiny, miera, merateľná funkcia, jednoduchá merateľná funkcia. Všeobecná merateľná funkcia ako monotónna limita jednoduchých merateľných funkcií

2/ Lebesgueov integrál: definícia pre jednoduché merateľné funkcie, pre všeobecné merateľné funkcie, súvis Lebesgueovho, Riemannovho a Newtonovho integrálu

3/ Limitné vety: Lebesgueova veta o monotónnej konvergencii, Fatouova lema, Lebesgueova veta o majorante

4/ Súčin mier a Fubiniho veta

5/ L^p priestory: definícia L^p priestoru pre $1 \leq p \leq \infty$

6/ Formulácia Radon-Nikodymovej vety. Definícia a vlastnosti podmienenej strednej hodnoty.

7/ Wienerov proces: definícia, vlastnosti.

8/ Itôv integrál: Itôv integrál pre elementárne funkcie a pre ostatné funkcie ako limitný prípad. Vlastnosti funkcií, pre ktoré je definovaný Itôv integrál. Vlastnosti Itôvho integrálu.

9/ Itôva lema: Itôv proces, formulácia Itôvej lemy. Je potrebné vedieť používať Itôvu lemu.

10/ Martingaly: definícia a vlastnosti.

11/ Stochastická diferenciálna rovnica pre vývoj ceny akcie: vedieť sformulovať a odvodiť riešenie.

12/ Samofinancovaná stratégia: vedieť vysvetliť, čo to je.

13/ Oceňovanie derivátov pomocou rizikovo neutrálnej miery. Vedieť napísať všeobecnú oceňovaciu formulu.

14/ Odvodenie Black-Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice pre deriváty akcií.