

1-EFM-270 Úvod do teórie hier
1-MMN-375 Teória hier
Letný semester 2013/2014
Priebežný test - riešenie

Otázka 1. (20 bodov)

Uvažujte nasledujúcu hru v statickom tvare

		<i>Hráč 2</i>			
		<i>L</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>R</i>
<i>Hráč 1</i>	<i>L</i>	1, 2	6, 2	3, 4	-2, 7
	<i>C</i>	2, 1	3, 7	7, 4	-3, 2
	<i>D</i>	5, 4	1, 5	3, 2	4, 3
	<i>R</i>	2, 2	5, 2	3, 9	9, 5

Nájdite racionalizovateľné akcie oboch hráčov!

Riešenie.

Racionalizovateľné akcie hráča sú tie, ktoré prežijú iterovanú elimináciu dominovaných akcií. Akceptoval som, ak ste hľadali len dominované akcie inými čistými akciami aj zmiešanými akciami. Keďže ani jeden z hráčov nemá dominovanú akciu čistou, tak racionalizovateľné akcie oboch hráčov sú všetky akcie, ktoré majú hráči k dispozícii:

Hráč 1: $\{L, C, D, R\}$

Hráč 2: $\{L, C, D, R\}$

Ak ste hľadali aj dominanciu zmiešaných akcií, tak u Hráča 2 je akcia *L* dominovaná istou kombináciou akcií *C* a *R*. Potom bude mať Hráč 1 akciu *D* ostro dominovanú kombináciou akcií *C* a *R*.

V tomto prípade majú hráči tieto racionalizovateľné akcie

Hráč 1: $\{L, C, R\}$

Hráč 2: $\{C, D, R\}$

Za korektnosť eliminácie bolo 15 bodov, v prípade úvahy aj slabo dominovaných akcií 10 bodov. Za riešenie (zoznam racionalizovateľných akcií) 5 bodov.

Otázka 2. (20 bodov)

Dvaja ľudia sa angažujú v spoločnom projekte. Ak jednotlivé osoby vynaložia námahu $x_1 \geq 0$ resp. $x_2 \geq 0$, ich funkcie výplat budú

$$u_1(x_1, x_2) = \begin{cases} 10 - x_1 & x_1 \geq x_2 \\ -x_1 & x_1 < x_2 \end{cases}$$

$$u_2(x_1, x_2) = \begin{cases} 10 - x_2 & x_2 \geq x_1 \\ -x_2 & x_2 < x_1 \end{cases}$$

a) Ukážte, že profil akcií $(x_1, x_2) = (5, 5)$ je Nashovým ekvilibriom tejto hry!

b) Nájdite všetky Nashove ekvilibriá tejto hry v čistých akciách!

Riešenie.

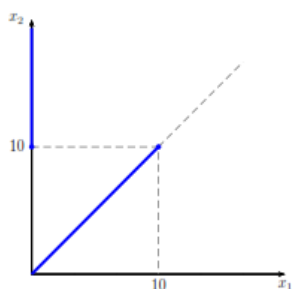
a) Ukážeme, že hrať akciu $x_i = 5$ je najlepšou reakciou na akciu $x_{-i} = 5$: Hranie 5 prináša výplatu 5. Hranie $x_i > 5$ prináša výplatu $10 - x_i < 5$, kým hranie $x_i < 5$ prináša výplatu $-x_i < 5$. Ani jedno jednostranné vychýlenie teda nie je profitabilné (5 bodov).

b) Zostrojme reakčné multifunkcie oboch hráčov:

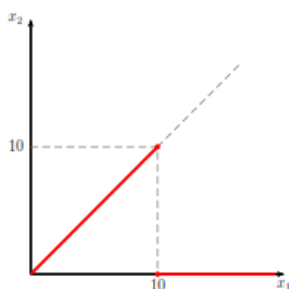
$$x_1 = B_1(x_2) = \begin{cases} 0 & x_2 > 10 \\ \{0, 10\} & x_2 = 10 \\ x_2 & x_2 < 10 \end{cases}$$

$$x_2 = B_2(x_1) = \begin{cases} 0 & x_1 > 10 \\ \{0, 10\} & x_1 = 10 \\ x_1 & x_1 < 10 \end{cases}$$

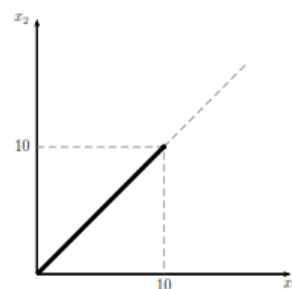
(za každú po 4 body). Po ich vykreslení dostaneme množinu Nashovych ekvilibrií tejto hry $\{(x_1, x_2): 0 \leq x_1 = x_2 \leq 10\}$ (7 bodov).



BR_1



b) BR_2



c) Nashove ekvilibriá

Otázka 3. (10 bodov)

Uvažujte nasledujúcu hru v strategickom tvare

		Hráč 2		
		L	M	R
Hráč 1	U	1, 2	4, 3	3, 2
	C	0, 3	6, 2	5, 1
	D	0, 2	3, 1	2, 4

Nájdite všetky Nashove ekvilibriá tejto hry v čistých i zmiešaných akciách!

Riešenie.

Hráč 1 má akciu D dominovanú akciou U a následne hráč 2 má akciu R dominovanú akciou L aj M. Preto môžeme uvažovať redukovanú hru

		Hráč 2	
		L	M
Hráč 1	U	1, 2	4, 3
	C	0, 3	6, 2

Hra nemá Nashove ekvilibriá v čistých akciách (2 body). Pretože hra je generická, ekvilibrium v zmiešaných akciách stačí nájsť pomocou vety o indiferentnosti v hraní akcií v ekvilibriu. Nech hráč 1 hrá zmiešanú akciu $\alpha_1 = (p, 1 - p)$ a hráč 2 zmiešanú akciu $\alpha_2 = (q, 1 - q)$. Potom

$$u_1(U, \alpha_2) = 1q + 4(1 - q) = 4 - 3q$$

$$u_1(C, \alpha_2) = 0q + 6(1 - q) = 6 - 6q$$

odkiaľ $4 - 3q = 6 - 6q$, a teda

$$q^* = 2/3.$$

(2 body). Analogicky,

$$u_2(\alpha_1, L) = 2p + 3(1 - p) = 3 - p$$

$$u_2(\alpha_1, M) = 3p + 2(1 - p) = 2 + p$$

odkiaľ $3 - p = 2 + p$, a teda

$$p^* = 1/2.$$

(2 body). Nashovym ekvilibriom je teda profil akcií $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*) = \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)\right)$ (4 body).

Otázka 4. (20 bodov)

Uvažujte nasledujúcu hru v strategickom tvare:

		Hráč 2	
		X	Y
Hráč 1	A	2, 3	0, 4
	B	2, 2	1, 1
	C	1, 1	1, 1
	D	0, 1	0, 3

Obráťte list!

- Zostrojte reakčné multifunkcie oboch hráčov pre čisté akcie!
- Nájdite všetky Nashove ekvilibriá tejto hry v čistých akciách!
- Nájdite všetky Nashove ekvilibriá tejto hry v zmiešaných akciách!

Riešenie.

a) $B_1(X) = \{A, B\}$, $B_1(Y) = \{B, C\}$,

$$B_2(A) = \{Y\}, B_2(B) = \{X\}, B_2(C) = \{X, Y\}, B_2(D) = \{Y\} \text{ (2 body).}$$

b) Hra má dve Nashove ekvilibriá v čistých akciách - (B, X) a (C, Y) (2 body).

c) Hra nie je generická, preto musíme byť opatrní pri hľadaní Nashovych ekvilibrií v zmiešaných akciách. Predovšetkým si musíme uvedomiť, že akcia D je dominovaná akciou B aj akciou C , teda stačí nám uvažovať redukovanú hru bez dominovanej akcie.

Nech hráč 2 hrá zmiešanú akciu $\alpha_2 = (q, 1 - q)$. Potom

$$\begin{aligned} u_1(A, \alpha_2) &= 2q + 0(1 - q) = 2q \\ u_1(B, \alpha_2) &= 2q + 1(1 - q) = 1 + q \\ u_1(C, \alpha_2) &= 1q + 1(1 - q) = 1 \end{aligned}$$

Ak by hráč 1 miešal v ekvilibriu všetky tri akcie, museli by sa výplaty z ich hrania rovnať. Avšak my dostávame

$$\begin{aligned} 2q &= 1 + q \Rightarrow q = 1 \\ 2q &= 1 \Rightarrow q = \frac{1}{2} \\ 1 + q &= 1 \Rightarrow q = 0 \end{aligned}$$

Teda, hráč 1 v ekvilibriu nemieša akcie A , B a C (4 body).

Nech hráč 1 mieša len akcie A a B , pričom hráč 1 hrá akciu A s pravdepodobnosťou p a akciu B s pravdepodobnosťou $1 - p$. Potom $q = 1$ a

$$u_1(A, \alpha_2) = u_1(B, \alpha_2) = 2 > u_1(C, \alpha_2) = 0$$

Pretože $u_1(A, \alpha_2) < u_1(B, \alpha_2)$ pre každé $q < 1$ a $u_1(A, \alpha_2) = u_1(B, \alpha_2)$ pre $q = 1$, reakčná multifunkcia hráča 1 má tvar

$$B_1(q) = \begin{cases} 0 & q < 1 \\ [0, 1] & q = 1 \end{cases}$$

Pre hráča 2 máme

$$\begin{aligned} u_2(\alpha_1, X) &= 3p + 2(1 - p) = 2 + p \\ u_2(\alpha_1, Y) &= 4p + 1(1 - p) = 1 + 3p \end{aligned}$$

Jeho reakčná multifunkcia má tvar

$$B_2(p) = \begin{cases} 1 & p < \frac{1}{2} \\ [0, 1] & p = \frac{1}{2} \\ 0 & p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Odtiaľ dostávame množinu Nashovych ekvilibrií v zmiešaných akciách

$$\{\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*) = ((p, 1 - p, 0, 0), (1, 0)), 0 \leq p \leq \frac{1}{2}\}$$

(4 body).

Nech hráč 1 mieša len akcie A a C. Potom $q = \frac{1}{2}$ a

$$u_1(A, \alpha_2) = u_1(C, \alpha_2) = 1 < u_1(B, \alpha_2) = \frac{3}{2}$$

V ekvilibriu hráč 1 nemôže miešať len tieto dve akcie (4 body).

Nech hráč 1 mieša len akcie B a C, pričom hráč 1 hrá akciu B s pravdepodobnosťou p a akciu C s pravdepodobnosťou $1-p$. Potom $q = 0$ a

$$u_1(B, \alpha_2) = u_1(C, \alpha_2) = 1 > u_1(A, \alpha_2) = 0$$

Pretože $u_1(B, \alpha_2) > u_1(C, \alpha_2)$ pre každé $q > 0$ a $u_1(B, \alpha_2) = u_1(C, \alpha_2)$ pre $q = 0$, reakčná multifunkcia hráča 1 má tvar

$$B_1(q) = \begin{cases} [0,1] & q = 0 \\ 0 & q > 0 \end{cases}$$

Pre hráča 2 máme

$$u_2(\alpha_1, X) = 2p + 1(1-p) = 1 + p$$

$$u_2(\alpha_1, Y) = 1p + 1(1-p) = 1$$

Jeho reakčná multifunkcia má tvar

$$B_2(p) = \begin{cases} [0,1] & p = 0 \\ 0 & p > 0 \end{cases}$$

Odtiaľ dostávame množiny Nashových ekviliórií

$$\{\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*) = ((0, p, 1-p, 0), (0,1)), 0 \leq p \leq 1\}$$

$$\{\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*) = ((0,0,1,0), (q, 1-q)), 0 < q < 1\}$$

(4 body).

Otázka 5. (30 bodov)

Uvažujte dve firmy, ktoré si konkurujú Cournotovským spôsobom – pôsobia na trhu s homogénnym tovarom, určeným inverznou funkciou dopytu $p(Q) = a - bQ$, kde Q

je agregovaná ponuka. Obe firmy majú fixné náklady $\frac{(a-c)^2}{6b}$, ktoré sa započítavajú

vždy, keď firma vyrába kladné množstvo produkcie, a lineárne variabilné náklady $c > 0$.

- Nájdite ekvilibrium hry Cournotovho duopolu za predpokladu, že obe firmy nemajú fixné náklady a vypočítajte zisk oboch firiem!
- Ukážte, že obom firmám sa zníži zisk, ak majú fixné náklady!
- Nájdite všetky ekvilibria hore opísanej hry Cournotovho duopolu s fixnými nákladmi v čistých akciách!

Riešenie.

- Na trhu s homogénnym tovarom danom inverznou funkciou $p(Q) = a - bQ$ pôsobia dve firmy s rovnakými technológiami, ktoré vedú k rovnakým konštantným marginálnym nákladom $c > 0$. Obe firmy simultánne volia úroveň produkcie $q_i \in [0, \infty)$. Funkciu výplat tvorí funkcia zisku, teda

$$u_i(q_i, q_{-i}) = (a - b(q_i + q_{-i}))q_i - cq_i$$

(2 body). Ak konkurenčná firma volí úroveň produkcie q_{-i} , tak firma i rieši optimalizačnú úlohu

$$\max_{q_i \in [0, \infty)} u_i(q_i, q_{-i}) = (a - b(q_i + q_{-i}))q_i - cq_i$$

Podmienka prvého rádu má tvar

$$a - 2bq_i - bq_{-i} - c = 0$$

Odtiaľ dostávame najlepšiu reakciu na produkciu konkurenčnej firmy

$$q_i = \frac{a-c}{2b} - \frac{q_{-i}}{2}$$

Takéto množstvo je optimálne len v prípade, že je nezáporné, teda v prípade keď $q_{-i} < \frac{a-c}{b}$. Ak optimálne q_i je záporné, tak najlepšou reakciou je vyrábať nulové množstvo. Reakčné multifunkcie majú tvar

$$B_i(q_{-i}) = \begin{cases} \frac{a-c}{2b} - \frac{q_{-i}}{2}, & q_{-i} \leq \frac{a-c}{b} \\ 0, & q_{-i} > \frac{a-c}{b} \end{cases}$$

(za každú reakčnú multifunkciu 2 body, bez podmienky nezápornosti 1 bod). Odtiaľ dostávame, že Nashovým ekviliбриom hry Cournotovho duopolu sú úrovne produkcie $q^* = (q_i^*, q_{-i}^*) = (\frac{a-c}{3b}, \frac{a-c}{3b})$ (4 body). Každá z firiem dosahuje zisk $u_i(q_i, q_{-i}) = \frac{(a-c)^2}{9b}$ (3body).

- b) Aj ak má firma fixné náklady $F > 0$, tak podmienky prvého rádu sa nemenia (až na to, že najlepšou reakciou firmy je vyrábať nulovú produkciu, pokiaľ by bol zisk záporný) a zisk firiem je $u_i(q_i, q_{-i}) = \frac{(a-c)^2}{9b} - F$, čo je menšie než zisk v prípade, keď firma nemá fixné náklady (5 bodov).
- c) Nech firmy majú fixné náklady $\frac{(a-c)^2}{6b}$. Ak konkurenčná firma volí úroveň produkcie q_{-i} , tak firma i rieši optimalizačnú úlohu

$$\max_{q_i \in [0, \infty)} u_i(q_i, q_{-i}) = (a - b(q_i + q_{-i}))q_i - cq_i - \frac{(a-c)^2}{6b}$$

Podmienka prvého rádu má opäť tvar

$$a - 2bq_i - bq_{-i} - c = 0$$

(2 body). Odtiaľ dostávame najlepšiu reakciu na produkciu konkurenčnej firmy

$$q_i = \frac{a-c}{2b} - \frac{q_{-i}}{2}$$

Takéto množstvo je optimálne len v prípade, že je nezáporné a vedie k nezápornému zisku. Reakčné multifunkcie majú tvar

$$B_i(q_{-i}) = \begin{cases} \frac{a-c}{2b} - \frac{q_{-i}}{2}, & q_{-i} \leq \bar{q} \\ 0, & q_{-i} > \bar{q} \end{cases}$$

kde $\bar{q}$ je také množstvo produkcie, kedy je zisk firmy spolu s hraničnými nákladmi rovný nule. (za každú reakčnú multifunkciu 2 body, bez podmienky nezápornosti 1 bod).

V ekvilibriu nemôžeme obe firmy hrať nenulové množstvo, pretože hranie Cournotovho množstva oboma firmami vedie k záporným výplatám:

$$\begin{aligned} u_i\left(\frac{a-c}{3b}, \frac{a-c}{3b}\right) &= (a - b(q_i + q_{-i}) - c)q_i - \frac{(a-c)^2}{6b} = \\ &= \left(a - b\left(\frac{a-c}{3b} + \frac{a-c}{3b}\right) - c\right)\frac{a-c}{3b} - \frac{(a-c)^2}{6b} = -\frac{(a-c)^2}{18b} < 0 \end{aligned}$$

Prichádzajú do úvahy ešte možnosti, že jedna firma hrá nenulovú produkciu a druhá nulovú. Obe firmy nemôžu v ekvilibriu hrať nulové množstvá, lebo nie sú najlepšou reakciou na najlepšiu reakciu. Najlepšou reakciou na hranie nulovej produkcie $q_i = 0$ je hranie monopolistického množstva $q_i = \frac{a-c}{2b}$ a naopak:

$$B_i(q_{-i}) = \begin{cases} \frac{a-c}{2b} - \frac{q_{-i}}{2} = \frac{a-c}{4b}, & q_{-i} \leq \bar{q} \\ 0, & q_{-i} > \bar{q} \end{cases}$$

Ktorá vetva riešenia platí, sa dozvieme z hodnoty funkcie výplat

$$u_i(q_i, q_{-i}) = (a - b(q_i + q_{-i}))q_i - cq_i - \frac{(a-c)^2}{6b} =$$

$$\left(a - b\left(\frac{a-c}{4b} + \frac{a-c}{2b}\right) - c\right)\frac{a-c}{4b} - \frac{(a-c)^2}{6b} = -5\frac{(a-c)^2}{48b} < 0.$$

Teda, najlepšou reakciou na hranie monopolistického množstva je hranie nulovej produkcie. Na hranie nulovej produkcie je najlepšou reakciou hranie monopolistického množstva (vyplýva z tvaru reakčnej multifunkcie).

Hra má teda dve Nashove ekvilibriá, a to $\left(\frac{a-c}{2b}, 0\right)$ a $\left(0, \frac{a-c}{2b}\right)$ (6 bodov).