

Ján Pekár

**AUTOREGRESNÉ MODELY
HRUBÉHO DOMÁCEHO PRODUKTU
SLOVENSKA**



UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

**2004
BRATISLAVA**

© doc. RNDr. Ján Pekár, PhD., 2004

ISBN: 80-89186-04-1

Obsah

ÚVOD	7
I. ČASOVÝ RAD HDP SLOVENSKA 1993-2001	11
I.1 POUŽITÝ ČASOVÝ RAD	11
I.2 MAKROEKONOMICKÉ PROSTREDIE SLOVENSKEJ REPUBLIKY	12
I.2.1 <i>Etapa vzniku nového štátu a vlastnej cesty transformácie (roky 1993-1995)</i>	12
I.2.2 <i>Etapa nerovnovážneho hospodárskeho rastu (roky 1996-1998)</i>	12
I.2.3 <i>Etapa obnovenia rovnováhy (roky 1999-2000)</i>	13
I.2.4 <i>Etapa vysokého rastu a nerovnováhy (roky 2001-2002)</i>	14
II. ZÁKLADNÝ ŠTATISTICKÝ APARÁT	15
II.1 ZÁKLADNÉ POJMY	15
II.2 DEKOMPOZÍCIA ČASOVÉHO RADU.....	20
II.3 TESTOVANIE HYPOTÉZ A ROZHODOVACIE KRITÉRIÁ	21
III. BOXOVE-JENKINSOVE MODELY	29
III.1 MODELY ARIMA A SARIMA.....	29
III.1.1 <i>Procesy AR(p)</i>	30
III.1.2 <i>Procesy MA(q)</i>	31
III.1.3 <i>Procesy ARMA(p,q)</i>	32
III.1.4 <i>Integrované procesy ARIMA(p,d,q)</i>	33
III.1.5 <i>Sezónne procesy SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)_s</i>	34
III.2 IDENTIFIKÁCIA MODELOV V PÔVODNÝCH RADOCH BEZ ODSTRÁNENIA TRENDU.....	36
III.2.1 <i>Rad H</i>	37

III.2.2	<i>Rad LH</i>	41
III.2.3	<i>Rad RH</i>	44
III.3	IDENTIFIKÁCIA TRENDOV V RADOCH	47
III.3.1	<i>Identifikácia trendu v rade H</i>	48
III.3.2	<i>Identifikácia trendu v rade LH</i>	50
III.3.3	<i>Identifikácia trendu v rade RH</i>	51
III.4	IDENTIFIKÁCIA MODELOV V RADOCH S ODSTRÁNENÝM TRENDOM	53
III.4.1	<i>Rad HT</i>	53
III.4.2	<i>Rad LHT</i>	56
III.5	IDENTIFIKÁCIA TRENDU POMOCOU HODRICKOVHO-PRESCOTTOVHO FILTRA 59	
III.5.1	<i>Rad HP</i>	60
III.5.2	<i>Rad LHP</i>	64
III.5.3	<i>Rad RHP</i>	68
III.6	TESTOVANIE MODELOV (PREDIKCIA EX-POST)	73
III.6.1	<i>Modelovanie hrubého domáceho produktu</i>	73
III.6.2	<i>Modelovanie logaritmu hrubého domáceho produktu</i>	75
III.6.3	<i>Modelovanie tempa rastu HDP</i>	78
III.7	POROVNANIE MODELOV ŠPECIFIKOVANÝCH BOXOVOU-JENKINSOVOU METODOLÓGIU	80
IV.	NELINEÁRNE MODELY	83
IV.1	TEST LINEARITY	83
IV.2	NELINEÁRNE MODELY	89
IV.3	SAMOBUDIACE PRAHOVÉ AUTOREGRESNÉ MODELY SETAR(P,D;R).....	91
IV.3.1	<i>Test prahovej nelinearity (AR vs.SETAR)</i>	93
IV.3.2	<i>Špecifikácia parametra omeškania d</i>	94
IV.3.3	<i>Určenie hodnoty prahov r</i>	96

IV.3.4	<i>Model s jedným prahom</i>	99
IV.3.5	<i>Model s dvoma prahmi</i>	102
IV.4	AUTOREGRESNÉ MODEL Y HLADKÉHO PRECHODU STAR.....	105
IV.4.1	<i>Test linearity (AR vs. STAR)</i>	107
IV.4.2	<i>Špecifikácia modelu STAR</i>	113
IV.4.3	<i>Model LSTAR</i>	116
IV.4.4	<i>Model ESTAR</i>	119
IV.4.5	<i>Viacrežimové autoregresné model y hladkého prechodu</i>	
	<i>MRSTAR</i>	122
IV.5	MARKOVOVE MODEL Y PREPÍNANIA REŽIMOV	127
IV.5.1	<i>Odhad parametrov modelu</i>	129
IV.5.2	<i>Špecifikácia Markovovho modelu tempa rastu HDP</i>	131
IV.6	POROVNANIE PREDIKČNÝCH SCHOPNOSTÍ MODEL OV	132
	ZÁVER	135
	ČASOVÉ RADY HDP SLOVENSKA 1993-2001	137
	LITERATÚRA	139

ÚVOD

Mnoho prác v predchádzajúcich rokoch sa snažilo analyzovať dynamické správanie ekonomických a finančných časových radov, medzi nimi najmä časových radov hrubého domáceho produktu (HDP), ako jedného z hlavných ukazovateľov stavu ekonomiky, a využiť ho na predikciu vývoja HDP.

Sedemdesiate a osemdesiate roky boli v zajatí predpokladu, že prvá diferencia zlogaritmovaného časového radu HDP je lineárnym stacionárnym procesom, teda, že optimálnu predikciu budúceho vývoja HDP môžeme modelovať pomocou lineárnej funkcie niekoľkých predchádzajúcich hodnôt. V tejto oblasti môžeme sledovať tri základné smery. Beveridge a Nelson (1981), Nelson a Plosser (1982) a Campbell a Mankiw (1987ab) aplikovali ARIMA a ARMA modely na reziduálne časové rady po odstránení trendu, Harvey (1985), Watson (1986) a Clark (1984) použili modely nepozorovaných zložiek a Engle a Granger (1987) odvodili princíp kointegrovannej špecifikácie. Z uvedených postupov sa v súčasnosti najviac využívajú ARIMA modely, ktoré sú založené na Woldovej reprezentácii: každý kovariančne stacionárny časový rad sa dá vyjadriť ako funkcia kľzavých priemerov prítomnej a minulých inovácií.

V roku 1989 publikoval James Hamilton (1989) svoj slávny článok o nelineárnom modelovaní HDP Spojených štátov, čím spôsobil explóziu záujmu medzi ekonometrami o problémy testovania, odhadu, špecifikácie a vlastností nelineárnych modelov. Nelineárne modely, samozrejme, nie sú všeliakom a majú ohraničenia svojich možností. Predovšetkým, ich použitie je obtiažne,

pretože nelineárne optimalizačné metódy pri hľadaní extrému funkcie maximálnej virohodnosti sa môžu zaseknúť na lokálnom optime a nemusia poskytnúť globálne optimum na množine parametrov. Ďalším problémom je, že väčšina nelineárnych modelov nie je dostatočne flexibilných, pretože sú zostrojené na špecifický typ nelineárneho správania. Poslednou nevýhodou nelineárnych modelov, ktorú spomeniem, je veľká závislosť úspechu modelu na konkrétnych dátach.

V tejto práci budeme uvažovať nelineárne modely len určitého typu, kde nelinearita je daná existenciou viacerých režimov, pričom v jednotlivých režimoch sa časový rad správa ináč, a je v nich teda špecifikovaný iný (hoc aj lineárny) model. Hoci je v súčasnosti existencia viacerých režimov v ekonomických a finančných časových radoch všeobecne uznávaná, zatiaľ ešte nebola vypracovaná teória, ktorá by poskytovala jednotný prístup k špecifikácii ekonometrických modelov zahŕňajúcich zmeny režimov.

Cieľom tejto práce je

- poskytnúť prehľad niektorých modelov, ktoré môžu byť použité pri modelovaní ekonomických a finančných časových radov;
- aplikovať uvedené modely na časový rad hrubého domáceho produktu Slovenska;
- využiť špecifikované modely na predikciu ex-post tempa rastu HDP;
- porovnať získané modely.

Časový rad HDP je relatívne krátky, obsahuje len 36 údajov. Preto je implicitným zámerom práce ukázať aj na to, že hoc máme málo údajov, nie je dôvod vzdať sa možnosti modelovať. Pretože cieľom práce je zamerať sa na štatistické spracovanie uvažovaného časového radu a jeho projekciu do

budúcnosti, prípadné ekonomické súvislosti a otázky, ktoré s problémom súvisia, zmienime len okrajovo.

Práca sa skladá zo štyroch kapitol. V prvej kapitole stručne opíšeme časový rad, ktorý budeme modelovať, a opíšeme makroekonomické prostredie, v ktorom tento rad vznikol. V druhej kapitole opíšeme základný matematický a štatistický aparát, ktorý budeme používať. Ťažisko práce je tretia a štvrtá kapitola. V tretej kapitole aplikujeme štandardnú Boxovu-Jenkinsovu metodológiu na špecifikovanie modelov typu *SARIMA* v základnom rade a v radoch, ktoré z neho odvodíme. Štvrtá kapitola obsahuje opis troch typov nelineárnych viacrežimových modelov – samobudiaceho autoregresného modelu *SETAR*, autoregresného modelu hladkého prechodu *STAR* a Markovovho modelu prepínania režimov – a ich aplikáciu v rade tempa rastu hrubého domáceho produktu. Pretože všetky štatistické testy boli robené na hladine významnosti $\alpha = 0.05$, nie je táto skutočnosť explicitne pri každom teste uvedená.

Pri špecifikácii jednotlivých modelov sme brali do úvahy najmä tieto kritériá:

- súčet štvocov rezíduí;
- parsimonitu (čo najmenší počet parametrov) modelu;
- Akaikeho informačné kritérium (kvantifikované komplexné vyjadrenie predošlých dvoch kritérií);
- významnosť parametrov;
- charakter rezíduí ako gaussovský biely šum.

Pri numerických výpočtoch, najmä regresiach, boli využité tieto štandardné softwarové produkty: Eviews 3.1, Mathematica 3.0, Microsoft Excel 97 a StatgraphicsPlus. Práca vznikla v rámci riešenia vedeckovýskumného projektu

agentúry VEGA číslo 1/9155/02 „Dynamické modely v matematickej ekonomii“.

I. ČASOVÝ RAD HDP SLOVENSKA 1993-2001

Ekonomický rast každej krajiny vyjadrený rastom hrubého domáceho produktu (HDP) závisí od viacerých faktorov zahrňujúcich také javy, ako sú štrukturálne zmeny v ekonomike krajiny, globálna recesia, politická nestabilita, prírodné kalamity ale aj práve prebiehajúce fázy hospodárskeho cyklu. Zo štatistického pohľadu však môžeme štvrťročné údaje o HDP považovať za kombináciu štyroch navzájom oddelených štatistických procesov - dlhodobého trendu, hospodárskeho cyklu, sezónnych prejavov a krátkodobých šokov, ktoré sa dajú od seba oddeliť pomocou štandardných štatistických metód.

1.1 Použitý časový rad

V tejto práci sa budeme zaoberať časovým radom tridsiatich šiestich štvrťročných údajov HDP Slovenska za obdobie 1.štvrťrok 1993 - 4.štvrťrok 2001 v stálych cenách z roku 1995. Ide o relatívne krátke, osemročné obdobie a o relatívne malý počet údajov, to nám však umožní využiť viaceré špeciálne metódy určené pre krátke časové rady.

V ďalšom budeme používať okrem pôvodného časového radu štvrťročného HDP Slovenska, ktorý budeme označovať H , aj dva odvodené časové rady, bežné v ekonometrických modeloch. Prvý z nich vznikne logaritmickou transformáciou (prirodzenými logaritmom) radu H ; budeme ho označovať LH . Logaritmickú transformáciu urobíme hlavne so zreteľom na stabilizáciu rozptylu časového radu. Druhý odvodený časový rad, ktorý budeme uvažovať, je časový rad percentuálneho tempa rastu HDP; budeme ho označovať RH .

1.2 Makroekonomické prostredie Slovenskej republiky

Pri analýze ekonomického vývoja SR od roku 1993 môžeme rozlíšiť niekoľko odlišných etáp, ktorých charakter a následne aj charakter hospodárskeho rastu bol do značnej miery ovplyvnený hospodárskymi politikami, ktoré v daných obdobiach uplatňovali jednotlivé vlády.

1.2.1 Etapa vzniku nového štátu a vlastnej cesty transformácie (roky 1993-1995)

So vznikom nového štátu sa rozšírila potreba diskusie o alternatíve k dovtedy realizovanej reforme, ktorá mala previesť ekonomiku od centrálne plánovanej k tržne orientovanej. Presadzovala sa akceptácia slovenských špecifik a následné odklonenie od začatej transformačnej cesty. V roku 1993 ešte doznievala transformačná recesia, nevyhnutná daň obdobia transformácie krajiny, reálny pokles HDP dosiahol 6.9%. Avšak už v roku 1994 dochádza k oživeniu hospodárskeho rastu, ktorého hlavným pilierom bol rast exportu medziročne o 12.2%. Rast bol spôsobený oživením ekonomiky našich hlavných obchodných partnerov. Tento výrazný prírastok prekryl stále spiaci domáci dopyt, ktorý sa opätovne znížil. V roku 1995 zaznamenali prvýkrát prírastok všetky zložky domáceho dopytu, najvyšší prírastok však dosiahla spotreba domácností (3.6%). Na strane exportu však začalo dochádzať k oslabovaniu pozitívnej dynamiky z predchádzajúceho roku – medziročný rast bol vo výške 4.8%. Medziročný vývoj zložiek HDP v stálych cenách je v tabuľke 1.1

1.2.2 Etapa nerovnovážneho hospodárskeho rastu (roky 1996-1998)

V roku 1996 bola zachovaná vysoká dynamika hospodárskeho rastu (5.8%), avšak vo vývoji jednotlivých zložiek nastali oproti predchádzajúcemu obdobiu výrazné zmeny.

Tabuľka 1.1. Medziročný vývoj zložiek HDP v stálych cenách.

	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Hrubý domáci produkt	-6.9	5.2	6.5	5.8	5.6	4.0	1.3	2.2	3.3	4.4
Spotreba domácností	-0.6	1.5	3.6	9.1	6.0	5.8	2.9	-1.8	4.0	5.4
Vládna spotreba	-4.1	-10.1	2.1	17.4	-4.5	11.5	-7.7	1.3	5.1	4.0
Tvorba hrubého fixného kapitálu	-5.4	-2.5	1.8	30.9	14.3	11.0	-18.5	1.2	9.6	-0.9
Domáci dopyt	-6.8	-4.5	10.3	17.9	3.8	6.9	-6.2	0.0	7.2	3.8
Vývoz	-0.5	12.2	4.8	-1.3	19.0	13.2	5.2	13.8	6.5	5.9
Dovoz	-0.8	-5.4	11.5	19.8	13.8	16.9	-6.3	10.2	11.7	5.3

Údaje sú v percentách.

Domáci dopyt zaznamenal rekordný nárast až 17.9%, na ktorom sa najviac podieľal rast tvorby hrubého fixného kapitálu o 30.9%. Domáca ponuka nedokázala pružne reagovať na fiskálnou politikou stimulovaný dopyt, následkom čoho bol vytvorený tlak na dovozy, ktoré vzrástli o 19.8%. Čistý vývoz tak dosiahol výrazne zápornú hodnotu -9.5% hrubého domáceho produktu. V roku 1997 došlo k miernej korekcii nepriaznivého vývoja v štruktúre rastu z predošlého roka - fiskálna expanzia bola mierne zbrzdená, čím sa spomalila dynamika rastu všetkých zložiek domáceho dopytu. Čistý vývoz zaznamenal opäť záporné saldo, jeho hodnota však už nebola taká výrazná. Priaznivejší vývoj bol dosiahnutý aj vďaka oživeniu na strane vývozu, kde sa dosiahol medziročný rast 19%. V ďalšom roku už bol hospodársky rast, ktorý dosiahol 4%, ťahaný výlučne domácim dopytom a saldo čistého exportu dosiahlo dovedy rekordných -10.7% HDP.

1.2.3 Etapa obnovenia rovnováhy (roky 1999-2000)

S nástupom novej vlády v októbri 1998 sa stala prioritou zmena charakteru hospodárskej politiky, ktorej hlavným cieľom bolo opätovné nastolenie makroekonomickej rovnováhy cestou znižovania pasívneho salda bežného účtu platobnej bilancie a súčasného zastavenia zadlžovania štátu. V máji 1999 bol prijatý balíček opatrení, ktorý viedol k utlmeniu všetkých zložiek domáceho dopytu, avšak slovenské hospodárstvo neskĺzlo do recesie a zachovalo si rast

1.7%. Tento rast bol dosiahnutý aj vďaka rastu exportu o 5.2%, pričom jeho hlavnou príčinou bol opätovne priaznivý konjunkturálny vývoj u našich najväčších obchodných partnerov. Výsledky v roku 1999-2000 ukazovali úspech stabilizačných opatrení, reprezentovaný zmiernením vonkajšej nerovnováhy a zlepšením štruktúry rastu. Hodnoty čistého exportu však zostávali stále v záporných číslach.

1.2.4 Etapa vysokého rastu a nerovnováhy (roky 2001-2002)

Úspech z predchádzajúcej etapy sa ukázal ako veľmi krátkodobý, aj keď určité opatrenia mali ambíciu zakladať pozitívne stimuly v strednodobom horizonte. K prvej závažnej zmene dochádza už koncom roku 2000, kedy bolo naštartované oživenie domáceho dopytu. S týmto oživením došlo aj zvýšenie rastu dovozov, čo ohrozilo priaznivý vývoj čistého vývozu. Vývoj v roku 2001 už potvrdzuje túto nepriaznivú tendenciu vo vývoji zložiek HDP – silnejúci domáci dopyt (7.2%) a vyššie saldo čistého exportu (-4.1%). So záverom politického cyklu v roku 2002 prichádzajú populárne opatrenia vlády, ktoré mali za následok ešte väčší stimul pre domáci dopyt, ktorý vzrástol o 3.8% a stal sa nosným pilierom 4.4% rastu. Na druhej strane, v druhej polovici roku 2002 je možné sledovať aj oživenie na strane exportov, ktoré vypovedalo skôr o oživení priemyselnej produkcie SR než o oživení u obchodných partnerov.

II. ZÁKLADNÝ ŠTATISTICKÝ APARÁT

II.1 Základné pojmy

V tejto kapitole budeme skúmať možnosti modelovania HDP Slovenska pomocou Boxových - Jenkinsových modelov, ktoré sú najčastejšie používanou metodológiou predikcie pomocou časových radov. Metodológia bola opísaná Boxom a Jenkinsom (1976).

Definícia 2. 1. Rad náhodných premenných $\{X_t, t \in T\}$, usporiadaných v čase, kde parameter t voláme čas, voláme *náhodný proces* X . Ak T je podmnožina číselnej osi, tak náhodný proces voláme *spojitý*, ak T je rad indexov, tak náhodný proces voláme *diskrétny*. Reálnu funkciu $x = x(t); t \in T$, kde $x(t)$ je realizáciou $X(t)$ v čase t voláme *realizácia náhodného procesu* X .

Časový rad teda môžeme chápať ako realizáciu diskkrétneho náhodného procesu. Každý náhodný proces môžeme opísať pomocou týchto jeho charakteristík:

- stredná hodnota

$$(2.1) \quad \mu_t = E(X_t);$$

- rozptyl (druhý centrálny moment)

$$(2.2) \quad \sigma_t^2 = V(X_t) = E(X_t - \mu_t)^2;$$

- šikmosť (tretí centrálny moment)

$$(2.3) \quad \mu_t^{(3)} = E(X_t - \mu_t)^3;$$

- strmosť (štvrtý centrálny moment)

$$(2.4) \quad \mu_t^{(4)} = E(X_t - \mu_t)^4;$$

- kovariančná funkcia

$$(2.5) \quad \gamma_{t,t-k} = \text{Cov}(X_t, X_{t-k}) = E(X_t - \mu_t)(X_{t-k} - \mu_{t-k});$$

- korelačná funkcia

$$(2.6) \quad \rho_{t,t-k} = \frac{\gamma_{t,t-k}}{\sqrt{\sigma_t^2} \sqrt{\sigma_{t-k}^2}}.$$

Špeciálnym prípadom náhodných procesov sú stacionárne náhodné procesy.

Definícia 2.2 Náhodný proces X nazývame *slabo (kovariančne) stacionárny*, ak prvý a druhý moment procesu existujú a sú časovo invariantné, t.j.

$$(2.7) \quad E(X_t) = \mu \quad \text{pre všetky } t \in T$$

$$(2.8) \quad E(X_t - \mu_t)(X_{t-k} - \mu_{t-k}) = \gamma_k \quad \text{pre všetky } t \in T, k \in Z$$

Poznámka. Dá sa ľahko ukázať, že v stacionárnych radoch pre autokorelačnú funkciu (2.4) platí

$$(2.9) \quad \rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}.$$

Definícia 2.3 Náhodný proces X nazývame *ostro stacionárny*, ak pre ľubovoľné hodnoty k_1, k_2, \dots, k_n pravdepodobnosť výskytu udalostí $(x_t, x_{t+k_1}, x_{t+k_2}, \dots, x_{t+k_n})$ závisí len od voľby k_1, k_2, \dots, k_n a nezávisí od samotného času.

Poznámka. Z ostrej stacionarity vyplýva, že všetky momenty ostro stacionárneho náhodného procesu sú časovo invariantné.

Pretože ostrá stacionarita sa v praxi ťažko overuje, my budeme uvažovať len slabú, pričom toto adjektívum budeme vynechávať a slabo stacionárne procesy budeme nazývať stacionárne. Pokiaľ neuvedieme ináč, ďalej budeme uvažovať už len stacionárne procesy.

Náhodné procesy môžeme charakterizovať pomocou týchto výberových momentov:

- výberový priemer

$$(2.10) \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x_t,$$

kde N je počet hodnôt časového radu, je odhadom strednej hodnoty procesu μ ;

- výberový rozptyl

$$(2.11) \hat{s}^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (x_t - \bar{x})^2$$

je odhadom rozptylu procesu σ^2 ;

- výberová šikmosť

$$(2.12) \hat{S} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left(\frac{x_t - \bar{x}}{\hat{s}} \right)^3$$

je odhadom tretieho centrálného momentu procesu $\mu^{(3)}$;

- výberová strmosť

$$(2.13) \hat{K} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left(\frac{x_t - \bar{x}}{\hat{s}} \right)^4$$

je odhadom štvrtého centrálného momentu procesu $\mu^{(4)}$;

- výberová autokorelačná funkcia (ACF)

s posunutím k je daná vzťahom

$$(2.14) \hat{r}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^N (x_t - \bar{x})(x_{t-k} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^N (x_t - \bar{x})^2},$$

$k = 1, 2, \dots, N-1$, je odhadom kovariančnej funkcie ρ_k a je daná výberovou autokoreláciou s oneskorením k a výberovým rozptylom;

- výberová parciálna autokorelačná funkcia (PACF)

s posunutím k je posledným koeficientom v lineárnej regresii x_t na konštantu a posledných k hodnôt.

Definícia 2. 4 Náhodný proces, ktorého stredná hodnota sa rovná nule, t.j. $\mu = 0$, nazývame *centrovaný*.

Je jasné, že každý proces X môžeme transformáciou $Y_t = X_t - \mu$ upraviť na proces, ktorý je centrovaný. V ďalšom budeme uvažovať procesy, ktoré sú centrované.

Boxove - Jenkinsove modely sú vybudované na špeciálnom procese, tzv. bielom šume (white noise).

Definícia 2. 5 Náhodný proces E , v ktorom E_t sú nezávislé náhodné premenné so strednou hodnotou $E(E_t) = 0$ a rozptylom $V(E_t) = \sigma_E^2$ voláme *biely šum*. Ak E_t majú Gaussovo rozdelenie, biely šum voláme *gaussovský*.

Poznámka: Je jasné, že biely šum je stacionárny centrovaný náhodný proces, pre

ktorý platí $\gamma_k = 0$ pre $k \neq 0$ a $\rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$.

Definícia 2.6 Predpokladajme, že X je náhodný proces. Potom operátor posunutia L je daný vzťahom

$$(2.15) Lx_t = x_{t-1}$$

a operátor spätnej diferencie vzťahom

$$(2.16) \Delta x_t = (1 - L)x_t = x_t - x_{t-1}.$$

Poznámka. Oba operátory môžeme aplikovať viackrát za sebou, takže dostávame operátor posunutia rádu s

$$(2.17) L^s x_t = x_{t-s} \quad \text{pre všetky } s \in \mathbb{N}$$

a operátor spätnej diferencie rádu s

$$(2.18) \Delta^s x_t = (1 - L)^s x_t \quad \text{pre všetky } s \in \mathbb{N}_+.$$

Základom teórie, ktorá nás oprávňuje k ďalším krokom je nasledujúca veta, ktorá hovorí o tom, že každý kovariančne stacionárny náhodný proces môžeme rozložiť na dve zložky, deterministickú, ktorú môžeme exaktne opísať pomocou lineárnej kombinácie jeho histórie, a náhodnú, ktorú môžeme vyjadriť ako člen kľzavých priemerov konečného rádu.

Veta 2. 7 (*Woldova reprezentácia*) Každý centrovaný slabo stacionárny náhodný proces X môže byť jednoznačne vyjadrený (reprezentovaný) v tvare funkcie kľzavých priemerov súčasných a minulých inovácií

$$(2.19) x_t = \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i U_{t-i} + \eta_t \quad \text{s } \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i^2 < \infty, \theta_0 = 1,$$

kde $E(U_t U_{t-i}) = 0$ pre všetky $i \neq 0$, $E(U_t^2) = \sigma_u^2$ a kde η_t je stacionárne deterministický člen, ktorý môžeme zanedbať.

II.2 Dekompozícia časového radu

Ako sme uviedli v predošlej kapitole, výška HDP je ovplyvnená rôznymi faktormi. Preto časový rad HDP, podobne, ako viaceré iné ekonomické časové rady, môžeme rozdeliť na štyri zložky:

$$(2.20) Y_t = T_t + C_t + S_t + I_t,$$

alebo

$$(2.21) Y_t = T_t \cdot C_t \cdot S_t \cdot I_t$$

kde Y_t - hrubý domáci produkt;
 T_t - dlhodobý trend;
 C_t - vplyv hospodárskeho cyklu;
 S_t - sezónny vplyv;
 I_t - ekonomické nepravidelnosti (šoky, inovácie).

Dekompozíciu (2.20) voláme *aditívna dekompozícia*, kým dekompozíciu (2.21) voláme *multiplikatívna dekompozícia*. Metódu dekompozície napríklad štandardne využíva pri svojich prognózach NBER (*National Bureau of Economic Research*) v USA. Dekompozičná metóda, ktorá je štandardným vybavením bežných štatistických softwarových produktov, je výhodná pri dlhších časových radoch a pomáha identifikovať cyklickosť v prípade existencie viacerých cyklov. Vzhľadom na krátkosť uvažovaného časového radu, túto metódu neaplikujeme.

V tejto práci budeme oddeľovať trendovú zložku inou metódou. V literatúre sa môžeme stretnúť s viacerými spôsobmi oddelenia trendovej zložky.

Najrozšírenejšie softwarové produkty ponúkajú určenie trendových funkcií štandardných typov - konštantný, lineárny, polynomiálny, mocninový, exponenciálny či logaritmický trend. Na základe grafickej analýzy budeme postupne predpokladať existenciu konštantného, lineárneho a kvadratického trendu.

Historicky štandardnou metódou analýzy ekonomických časových radov bolo odstránenie lineárneho (alebo, častejšie, log-lineárneho) trendu. Pritom existuje veľké množstvo dôkazov, že mnohé ekonomické časové rady obsahujú stochastický trend, ktorý sa touto procedúrou nedá odstrániť. To je príčinou, prečo vo väčšine makroekonomických časových radov je lineárna detrendizácia nevhodná. Toto je príčinou, že v poslednej dobe sa objavilo niekoľko nových spôsobov oddelenia trendovej zložky časového radu (filtrov), napríklad Hodrickov-Prescottov filter (1997), Rotembergov filter (1999), založených na minimalizácii istých penalizačných funkcií, či Baxterov - Kingov frekvenčný filter (1995), a podobne.

II.3 Testovanie hypotéz a rozhodovacie kritériá

Pri identifikácii a diagnostickej kontrole modelu, ako aj pri jeho využití na predikciu budeme používať tieto testy a kritériá:

Akaikeho informačné kritérium (AIC). Akaikeho informačné kritérium sa používa pri výbere z nehniedzdených alternatívnych modelov, pričom sa preferuje jeho čo najnižšia hodnota. Počíta sa podľa vzorca

$$(2.22) AIC = -\frac{2l}{N} + \frac{2k}{N},$$

kde l – hodnota logaritmickej funkcie maximálnej vierohodnosti;

k – počet odhadovaných parametrov;

N – počet meraní.

Chowov test zlomu sa používa na testovanie významnosti rozdielu medzi regresnými rovnicami, ktoré získame pri regresii na jednotlivých častiach rozdeleného časového radu. Významnosť rozdielu indikuje štrukturálnu zmenu v modeli. Testovacou štatistikou F štatistika

$$(2.23) \hat{F} = \frac{\left(\sum_{i=1}^N (x_t - \hat{x}_t)^2 - \sum_{i=1}^{N_1} (x_t - \hat{x}_t)^2 - \sum_{i=N_1+1}^N (x_t - \hat{x}_t)^2 \right) / k}{\left(\sum_{i=1}^{N_1} (x_t - \hat{x}_t)^2 + \sum_{i=N_1+1}^N (x_t - \hat{x}_t)^2 \right) (N - 2k)}$$

kde N - celkový počet meraní;

N_1 - počet meraní v prvom podsúbore;

k - počet odhadovaných koeficientov.

Táto štatistika môže byť zovšeobecnená prirodzeným spôsobom na viac bodov zlomu. F štatistika má asymptoticky Fischerovo F rozdelenie, ak chyby sú nezávislé a identicky distribuované z normálneho rozdelenia.

Engleho test podmienenej autoregresnej heteroskedasticity (ARCH LM Test) Testujeme nulovú hypotézu neexistencie podmienenej autoregresnej heteroskedasticity v reziduáloch až po rád q proti alternatívnej hypotéze jej existencie. Testovacou štatistikou je Breuschova-Godfreyova štatistika Lagrangeovho multiplikátora

$$(2.24) LM = N * R^2$$

kde R^2 - koeficient determinácie (2.27)

N – počet meraní.

LM štatistika má asymptoticky $\chi^2(q)$ rozdelenie. V malých súboroch je namiesto štatistiky (2.24) výhodnejšia F -štatistika.

Jarqueho-Berov test. Jarqueho-Berov test slúži na testovanie, či rad má normálne rozdelenie. My ho budeme používať na testovanie, či rezíduá majú normálne rozdelenie. Testovacia štatistika meria rozdiely medzi šikmosťou a strmosťou meraného radu a normálneho rozdelenia. Štatistika sa počíta podľa vzorca

$$(2.25) JB = \frac{N-k}{6} \left(\hat{S}^2 + \frac{1}{4} (\hat{K} - 3)^2 \right),$$

kde \hat{S} – odhad tretieho centrálného momentu daný výberovou šikmosťou (2.12);

\hat{K} – odhad štvrtého centrálného momentu daný výberovou strmosťou (2.13);

N - počet meraní;

k - počet odhadovaných koeficientov.

Pod nulovou hypotézou

H_0 : rad má normálne rozdelenie

proti alternatívnej hypotéze

H_A : opak H_0

má JB štatistika χ^2 rozdelenie s dvomi stupňami voľnosti. P-hodnota Jarqueho-Berovho testu udáva pravdepodobnosť, že štatistika JB v absolútnej hodnote prekročí pozorovanú hodnotu za nulovej hypotézy. Ak $\alpha = 0.05$ bude väčšia, než získaná p-hodnota, tak hypotézu, že uvažovaný rad má normálne rozdelenie, zamietneme.

Ljungova-Boxova Q-štatistika. Q-štatistika s posunutím p je testovacia štatistika nulovej hypotézy, že v rade nie je autokorelácia až po rád p , t.j.

H_0 : v rade nie je autokorelácia až po rád p

proti alternatívnej hypotéze

H_A : opak H_0 .

Samotná štatistika má tvar

$$(2.26) Q_{LB} = N(N+2) \sum_{j=1}^p \frac{r_j^2}{N-j},$$

kde r_j - koeficient autokorelácie s posunutím j ;

N - počet meraní.

Q má asymptoticky χ^2 rozdelenie s počtom stupňov voľnosti rovným počtu autokorelácií.

LM test seriálovej korelácie. LM test je alternatívou Ljungovej-Boxovej štatistiky pri testovaní existencie autokorelácie až po rád p , pričom nulová a alternatívna hypotéza sú rovnaké ako pri uvedenej štatistike. Testovacou štatistikou je Breuschova-Godfreyova LM štatistika daná vzťahom (2.24), ktorá má asymptoticky $\chi^2(q)$ rozdelenie. Aj v tomto prípade je pri krátkych časových radoch výhodnejšia F -štatistika.

Miery presnosti vyrovnávania. Pri odhade parametrov modelu pomocou celého časové-ho radu budeme zisťovať tieto chyby (x_t je meraná hodnota, \hat{x}_t je modelovaná hodnota):

- koeficient determinácie

$$(2.27) \quad RS = R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^N (x_t - \hat{x}_t)^2}{\sum_{t=1}^N (x_t - \bar{x})^2}$$

vyjadruje mieru zhody meraných a modelovaných údajov;

- adjustovaný koeficient determinácie

$$(2.28) \quad ARS = \bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{N - 1}{N - k}$$

kde R^2 – koeficient determinácie;

N – počet meraní;

k – počet odhadovaných parametrov.

vyjadruje mieru zhody meraných a modelovaných údajov, penalizujúci zaradenie regresorov, ktoré neprispievajú k vysvetľujúcej úlohe modelu;

- štandardná chyba regresie

$$(2.29) \quad SER = \hat{s} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^N (x_t - \hat{x}_t)^2}{N - k}},$$

kde N – počet meraní;

k – počet odhadovaných parametrov;

je sumárna miera chyby založená na odhade rozptylu rezíduí.

- súčet štvorcov rezíduí

$$(2.30) \quad SSR = \sum_{t=1}^N (x_t - \hat{x}_t)^2$$

je kvantitatívnym vyjadrením presnosti vyrovnania;

- odmocnina priemernej štvorcovej chyby predikcie

$$(2.31) \text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{h+1} \sum_{t=N}^{N+h} (x_t - \hat{x}_t)^2},$$

kde S – začiatok obdobia predikcie;

h – počet predikovaných hodnôt;

- priemerná absolútna chyba

$$(2.32) \text{MAE} = \frac{1}{h+1} \sum_{t=N}^{N+h} |x_t - \hat{x}_t|;$$

- priemerná absolútna percentuálna chyba

$$(2.33) \text{MAPE} = \frac{1}{h+1} \sum_{t=N}^{N+h} \left| \frac{x_t - \hat{x}_t}{x_t} \right|;$$

- koeficient Theilovej nerovnosti

$$(2.34) \text{TIC} = \frac{\sqrt{\frac{1}{h+1} \sum_{t=N}^{N+h} (x_t - \hat{x}_t)^2}}{\sqrt{\frac{1}{h+1} \sum_{t=N}^{N+h} x_t^2} + \sqrt{\frac{1}{h+1} \sum_{t=N}^{N+h} \hat{x}_t^2}},$$

ktorý leží medzi nulou a jednotkou, pričom nula vyjadruje dokonalú presnosť vyrovnania.

Rozšírený Dickeyov-Fullerov test jednotkového koreňa. Dickeyov-Fullerov test použijeme na testovanie, či skúmaný rad je stacionárny, a v prípade, že je,

na určenie rádu integračného člena. Test kontroluje korelácie vyšších rádov pridávajúc členy posunutých spätných diferencií na pravej strane regresie

$$(2.35) \Delta x_t = \mu + \rho x_{t-1} + \delta_1 \Delta x_{t-1} + \delta_2 \Delta x_{t-2} + \dots + \delta_{p-1} \Delta x_{t-p+1} + \varepsilon_t .$$

Samotný test spočíva v testovaní nulovej hypotézy

$$H_0 : \gamma = 0$$

proti alternatívnej hypotéze

$$H_A : \gamma < 0 .$$

Štatistiku získanú z rozšíreného Dickeyovho-Fullerovho testu porovnávame s MacKinnonovými kritickými hodnotami pre tento test, a v prípade, že testovacia štatistika je menšia než MacKinnonova kritická hodnota, hypotézu zamietame.

Test strednej hodnoty a odhadnutých parametrov modelu. Testujeme nulovú hypotézu, že stredná hodnota procesu X sa rovná určitej konkrétnej hodnote m , t.j.

$$H_0 : \mu = m$$

proti dvojstrannej alternatívnej hypotéze, že sa jej nerovná, t.j.

$$H_A : \mu \neq m .$$

Pretože nepoznáme presnú hodnotu štandardnej odchýlky procesu X , používame t -štatistiku založenú na odhadoch

$$(2.36) t = \sqrt{N} \frac{\bar{x} - m}{\hat{s}},$$

kde \bar{x} - odhad strednej hodnoty daný výberovým priemerom (2.10);

\hat{s} - odhad štandardnej odchýlky daný výberovým rozptylom (2.11);

N - počet meraní.

Za predpokladu, že X má normálne rozdelenie, tak pod nulovou hypotézou má t -štatistika Studentovo t -rozdelenie s $N-1$ stupňami voľnosti. Podobne testujeme aj hypotézu, že nejaký parameter modelu sa rovná určitej konkrétnej hodnote.

Test významnosti ACF a PACF. Ak ACF leží vnútri intervalu $\left(-\frac{2}{\sqrt{N}}, \frac{2}{\sqrt{N}}\right)$, kde N je počet meraní, tak nie je na hladine významnosti $\alpha = 0.05$ významne rozdielna od nuly. To isté platí aj pre PACF.

III. BOXOVE-JENKINSOVE MODELY

V sedemdesiatych a osemdesiatych rokoch najpopulárnejším aparátom, ktorý používali ekonómovia vo svete pri modelovaní ekonomických procesov, bola metodológia vyvinutá G. E. P. Boxom a G. M. Jenkinsom. Tento aparát, známy aj ako Boxova-Jenkinsova metodológia, bol založený na myšlienke, že každý kovariančne stacionárny časový rad môže byť vyjadrený v tvare Woldovej reprezentácie (2.19), pričom nekonečný kĺzavý priemer môže byť dobre aproximovaný autoregresným procesom nízkeho rádu (prípadne obsahujúcim aj zložky kĺzavých priemerov). Hoci ide o relatívne staršiu metodológiu, dodnes nachádza pomerne dobré uplatnenie pri modelovaní časových radov.

III.1 Modely ARIMA a SARIMA

Z analýzy HDP vyplýva, že jeho výška v jednotlivých štvrtrokoch nezávisí len od produkcie v danom štvrtroku, ale je ovplyvnená aj produkciou v predošlých obdobiach. Preto je prirodzené predpokladať, že jednotlivé členy uvažovaného radu (prípadne reziduá po odstránení trendu) sú korelované s predošlými členmi radu. Na modelovanie seriálovej korelácie (v šume) používame tieto tri prostriedky:

- Autoregresné členy (AR). Autoregresná zložka predpovedného modelu vyjadruje vzťah k histórii (predošlým hodnotám) časového radu. Každý autoregresný člen zodpovedá použitiu posunutej hodnoty (reziduálu) v predikčnej rovnici.
- Členy kĺzavých priemerov (MA). Zložka kĺzavých priemerov v predpovednom modeli na zlepšenie aktuálnej predpovede využíva hodnoty chýb predošlých predpovedí.

- Integrovaný člen (I). Integrovaný člen vyjadruje rád, ktorým sa uvažovaný časový rad diferencuje s cieľom odstrániť nestacionaritu.
- Sezónna zložka (S). V prípade kratších než ročných časových radov (štvrtročných, mesačných, týždenných alebo denných) sa odporúča aj použiť sezónnych autoregresných (SAR) členov alebo sezónnych členov kľzavých priemerov (SMA).

Modely týchto typov môžeme aplikovať tak na pôvodné časové rady, ako aj na časové rady rezíduí, ktoré vznikli odstránením trendovej zložky z radov. Teraz si podrobne opíšeme jednotlivé zložky modelov ARIMA a SARIMA.

III.1.1 Procesy AR(p)

Autoregresný centrováný proces p -teho rádu $AR(p)$ je daný lineárnou kombináciou svojej histórie v predošlých p časových okamžikoch a bieleho šumu E . Môžeme ho vyjadriť vzťahom

$$(3.1) \quad X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + E_t = \sum_{j=1}^p \phi_j X_{t-j} + E_t,$$

ktorý môžeme zapísať aj v operátorovom tvare ako

$$(3.2) \quad \phi_p(B)X_t = E_t,$$

kde

$$(3.3) \quad \phi_p(B) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p),$$

pričom B je operátor spätného posunu, t.j.

$$(3.4) \quad B^j(X_t) = X_{t-j}.$$

V prípade, že proces X_t nie je centrováný, t.j. $\mu \neq 0$, má model $AR(p)$ tvar

$$(3.5) \quad X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + E_t = c + \sum_{j=1}^p \phi_j X_{t-j} + E_t,$$

kde

$$(3.6) \quad c = \mu - \phi_1 \mu - \phi_2 \mu - \dots - \phi_p \mu.$$

O podmienkach stacionarity procesu $AR(p)$ hovorí nasledujúca veta (Štulajter, 2001, str.81):

Veta 3.1 Náhodný proces X daný vzťahom (3.1) je stacionárny práve vtedy, ak všetky korene polynomickej rovnice

$$(3.7) \quad \phi_p(x) = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - \dots - \phi_p x^p = 0$$

ležia mimo jednotkového kruhu.

III.1.2 Procesy MA(q)

Model kľzavých priemerov rádu q , MA(q), je najjednoduchším modelom, s ktorým pracuje Boxova-Jenkinsova metodológia. Je definovaný ako lineárna kombinácia histórie bieleho šumu E v tvare

$$(3.8) \quad X_t = E_t + \theta_1 E_{t-1} + \theta_2 E_{t-2} + \dots + \theta_q E_{t-q} = E_t + \sum_{j=1}^q \theta_j E_{t-j},$$

alebo, v operátorovom tvare,

$$(3.9) \quad X_t = \theta_q(B) E_t,$$

kde

$$(3.10) \quad \theta_q(B) = (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q).$$

Proces $MA(q)$ je stacionárny a platí preň $\mu_t = 0$, $\sigma_X^2 = \sigma_E^2 \left(1 + \sum_{j=1}^q \theta_j^2 \right)$.

Aby sme zabezpečili jednoznačnosť MA procesu vzhľadom na danú ACF, zavedieme pojem invertovateľnosti náhodného procesu MA, ktorý nám dá istotu, že v prípade jeho prepísania do tvaru radu, tento bude konvergovať.

Definícia 3.2 Náhodný proces $MA(q)$, ktorý sa dá prepísať v tvare konečného AR procesu voláme *invertovateľný*.

Veta 3.3 Náhodný proces $MA(q)$, definovaný vzťahom (3.8) je invertovateľný práve vtedy, ak všetky korene polynomickej rovnice

$$(3.11) \theta_q(x) = 1 - \theta_1 x - \theta_2 x^2 - \dots - \theta_q x^q = 0$$

ležia mimo jednotkového kruhu.

III.1.3 Procesy ARMA(p,q)

Kombináciou $AR(p)$ a $MA(q)$ procesu vzniká $ARMA(p,q)$ proces, ktorý môžeme zapísať v tvare

$$(3.12) \begin{aligned} X_t &= \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + E_t + \theta_1 E_{t-1} + \dots + \theta_q E_{t-q} = \\ &= \sum_{j=1}^p \phi_j X_{t-j} + E_t + \sum_{j=1}^q \theta_j E_{t-j} \end{aligned}$$

alebo aj ako

$$(3.13) \phi_p(B)X_t = \theta_q(B)E_t,$$

kde $\phi_p(B)$ je daná vzťahom (3.3) a $\theta_q(B)$ vzťahom (3.10). Podobne, ako v prípade modelov AR a MA, môžeme sformulovať vetu.

Veta 3.4. Náhodný proces $ARMA(p,q)$, definovaný vzťahom (3.12) je stacionárny, práve vtedy, ak všetky korene polynomickej rovnice (3.7) ležia mimo jednotkového kruhu a je invertovateľný práve vtedy, ak všetky korene polynomickej rovnice (3.11) ležia mimo jednotkového kruhu.

Proces $ARMA(p,q)$ môžeme zapísať aj ako čistý $AR(\infty)$ proces v tvare

$$(3.14) \pi(B)X_t = E_t$$

kde

$$(3.15) \pi(B) = \phi_p(B)\theta_q^{-1}(B) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j$$

alebo ako čistý $MA(\infty)$ proces v tvare

$$(3.16) X_t = \psi(B)E_t$$

kde

$$(3.17) \psi(B) = \phi_p^{-1}(B)\theta_q(B) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j B^j .$$

Použitie kombinovaného $ARMA(p,q)$ procesu je efektívne, pretože spravidla vyžaduje menej parametrov než samotné AR alebo MA procesy.

III.1.4 Integrované procesy $ARIMA(p,d,q)$

V prípade, že máme časový rad, ktorý nie je centrováný, prípadne jeho trend je polynomickejší, na ich modelovanie môžeme použiť autoregresné integrované modely kľzavých priemerov rádov p, d, q , $ARIMA(p,d,q)$, založené na d -násobnom diferencovaní uvažovaného časového radu. Diferencovaný proces označme W_t . Potom máme

$$(3.18) W_t = \nabla^d X_t = (1 - B)^d X_t,$$

kde ∇ je štandardný operátor spätnej diferencie, $\nabla = 1 - B$. Alternatívne si teda môžeme $ARIMA(p,d,q)$ proces vyjadriť v tvare

$$(3.19) \phi_p(B)W_t = \theta_q(B)E_t$$

alebo

$$(3.20) \phi_p(B)(1-B)^d X_t = \theta_q(B)E_t.$$

Proces $ARIMA(p,d,q)$ nie je stacionárny, pretože AR operátor na ľavej strane vzorca (3.20) má d koreňov ležiacich na jednotkovej kružnici. V praxi sa často používajú len prvé diferencie, t.j, hodnota parametra d sa rovná 1.

III.1.5 Sezónne procesy $SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)_s$

V prípade, že skúmaný časový rad obsahuje okrem závislosti vnútri časovej periódy aj závislosť medzi navzájom zodpovedajúcimi veličinami v jednotlivých sezónach, teda medzi $\dots, X_{t-2s}, X_{t-s}, X_t, X_{t+s}, X_{t+2s}, \dots$, kde s je dĺžka periódy, použijeme sezónny autoregresný integrovaný proces kĺzavých priemerov $SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)_s$, kde p je rád procesu AR , q je rád procesu MA , d rád diferencie vnútri periódy, P je rád sezónneho procesu AR , Q je rád sezónneho procesu MA , D je rád sezónnej diferencie a s je dĺžka sezónnej periódy. Proces má tvar

$$(3.21) \Phi_P(B^s)\phi_p(B)(1-B)^d(1-B^s)^D X_t = \theta_q(B)\Theta_Q(B^s)E_t,$$

kde

$$(3.22) \Phi_P(B) = (1 - \Phi_1 B^s - \Phi_2 B^{2s} - \dots - \Phi_P B^{Ps}),$$

$$(3.23) \Theta_Q(B^s) = (1 + \Theta_1 B^s + \Theta_2 B^{2s} + \dots + \Theta_Q B^{Qs}),$$

$\phi_p(B)$ je daná vzťahom (3.3) a $\theta_q(B)$ vzťahom (3.10).

Ekonomické časové rady kratších než ročných údajov (štvrtročné, mesačné, týždenné, denné) v sebe spravidla obsahujú sezónnu zložku, preto si najskôr overíme, či je to aj naša situácia, a v kladnom prípade určíme dĺžku sezóny. Sezónnosť v časových radoch môžeme identifikovať pomocou periodogramov alebo pomocou autokorelačných funkcií.

V diskretnom prípade, pri výpočte periodogramu sa počítajú kvadratické korelácie medzi časovým radom a sínusovými/kosínusovými vlnami na frekvencii λ podľa vzťahu:

$$(3.24) I(\lambda) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{t=1}^N X_t e^{-it\lambda} \right|^2 = \frac{1}{2\pi N} \left\{ \left(\sum_{t=1}^N X_t \cdot \sin(t\lambda) \right)^2 + \left(\sum_{t=1}^N X_t \cdot \cos(t\lambda) \right)^2 \right\}$$

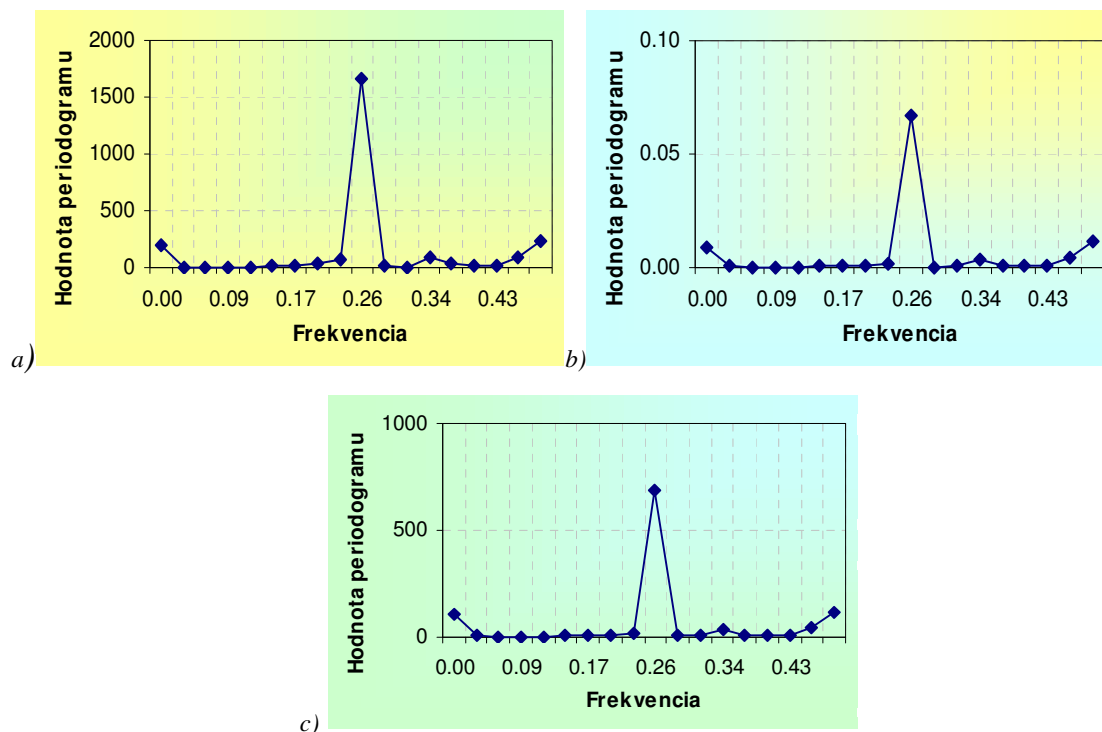
Periodogram $I(\lambda)$ sa vo všeobecnosti definuje na intervale $[-\pi, \pi]$. Nakoľko ide o párnú funkciu, kde platí $I(\lambda_j) = I(-\lambda_j)$, postačí nám vyčíslieť frekvencie na intervale $0 \leq \lambda_j \leq \pi$. Pre reálne postupnosti sa periodogram $I(\lambda)$ môže odhadnúť aj podľa autokovariančnej funkcie

$$(3.25) I(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\hat{r}_0 + 2 \sum_{t=1}^{N-1} \hat{r}_t \cdot \cos(t\lambda) \right),$$

pre Fourierove frekvencie $\lambda_j = \frac{2\pi \cdot j}{N}$, $j = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$, pričom r_0, r_1, \dots, r_{N-1} sú odhady autokovariančnej funkcie. Prevod na periódy v časových intervaloch reálneho radu sa robí podľa vzťahu $T_j = \frac{2\pi}{\lambda_j}$.

Uvedená analýza viedla k jedinému záveru, že každý z uvažovaných radov obsahuje významnú sezónnu zložku dĺžky $s = 4$, čo zodpovedá skutočnosti, že tvorba HDP je priamo závislá od poradia štvrtroku v roku. Na obrázku 3.1 sú zobrazené príslušné periodogramy. Pretože však skúmaný časový rad je krátky,

nie je možné z neho určiť priamo hodnotu parametra Q . Pretože je oprávnené predpokladať, že tvorba HDP závisí aj od štvorročného volebného cyklu (nepopulárne opatrenia v prvom roku vládnutia, populistické opatrenia v predvolebnom roku), v našich modeloch budeme tento cyklus brať do úvahy, teda $Q=4$.



Obrázok 3.1. Periodogramy diferencovaného časového radu HDP (a); diferencovaného časového radu logaritmov HDP (b); časového radu tempa rastu HDP(c).

III.2 Identifikácia modelov v pôvodných radoch bez odstránenia trendu

V tejto podkapitole identifikujeme Boxovou-Jenkinsovou metodológiou modely priamo v pôvodnom rade štvrťročných údajov HDP (rad H), v rade získanom jeho logaritmickou transformáciou (rad LH), ako aj v rade tempa rastu HDP (rad

RH). V súlade so zvyklosťami budeme označovať členy radu HDP ako Y_t , logaritmy HDP ako y_t a percentuálny rast HDP ako $g_t = 100 * (y_t - y_{t-1})$.

III.2.1 Rad H

Najskôr identifikujeme model v pôvodnom rade štvrťročných údajov HDP Slovenska 1993-2001. Na obrázku 3.2 je zobrazený priebeh a histogram časového radu. V uvažovanom období hospodárstvo Slovenska dosahovalo priemernú hodnotu HDP 155.05 mld SKK v stálych cenách priemeru roku 1995, pričom najnižší HDP bol dosiahnutý v prvom štvrťroku 1993 (120.0 mld SKK v stálych cenách) a najvyšší HDP bol dosiahnutý v treťom štvrťroku 2001 (183.9 mld SKK v stálych cenách). Základné štatistické charakteristiky radu sú uvedené v tabuľke 3.1. Pretože Jarqueho-Berova štatistika umožňuje nezamietnuť hypotézu, že rad H má normálne rozdelenie, môžeme použiť náš matematický aparát.

Najskôr ukážeme, že hypotézu nulovej strednej hodnoty radu H môžeme na hladine významnosti $\alpha = 0.05$ zamietnuť. Hodnota t -štatistiky pri testovaní hypotézy $H_0 : \mu = 0$ proti dvojstrannej alternatívnej hypotéze $H_A : \mu \neq 0$ je $t=52.58158$, pričom kritická hodnota Studentovho t -rozdelenia s 35 stupňami voľnosti na uvedenej hladine významnosti je 2.03011, takže hypotézu môžeme zamietnuť. To nás vedie k tomu, že budeme hľadať model obsahujúci konštantný člen. Z rozšíreného Dickeyovho-Fullerovho testu jednotkového koreňa pre nediferencovaný rad a pre raz diferencovaný rad vidíme, že proces je typu $I(1)$. PACF diferencovaného radu identifikuje rád autoregresnej zložky $p=3$ a ACF identifikuje rád zložky kľzavých priemerov $q=4$, ako aj sezónnosť $s=4$ a rád sezónnych kľzavých priemerov $Q=4$. Hodnoty prvých šestnástich ACF a PACF nediferencovaného, ako aj diferencovaného radu sú v tabuľke 3.2. Pretože p -hodnota Ljungovej-Boxovej Q -štatistiky rovná 0.294 vedie

k nezamietnutiu hypotézy, že v diferencovanom rade nie je autokorelácia prvého rádu, nebudeme brať do úvahy tie modely, v ktorých je rád autoregresie rovný $p=1$.

Na základe štatistických vlastností rôznych modelov časového radu H identifikujeme model M_H ako SARIMA (3,1,4)×(0,0,1)₄ v tvare

$$(3.26) \quad Y_t = 4.534075 + 0.427502Y_{t-1} - 0.180033Y_{t-2} + 0.220349Y_{t-3} \\ + 0.532182Y_{t-4} + E_t + 0.394138E_{t-4} + 0.355755E_{t-8} + 0.863943E_{t-12}$$

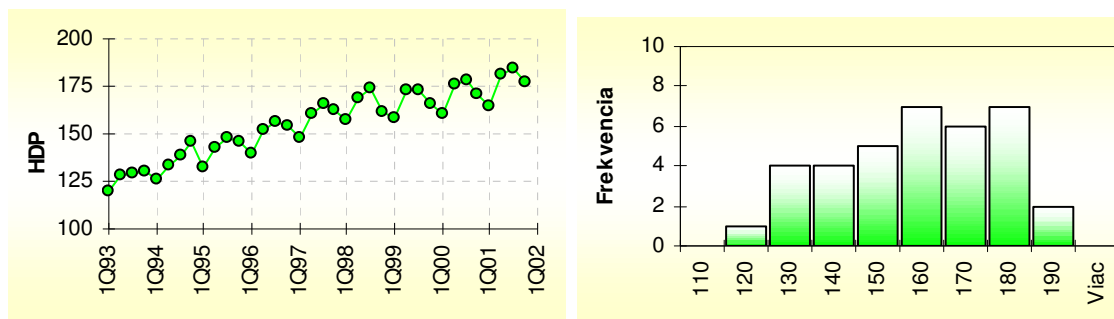
Štatistické vlastnosti koeficientov modelu M_H , ako aj predikčné schopnosti modelu sú uvedené v tabuľke 3.3.

Tabuľka 3.1 Základné štatistické charakteristiky radu H

<i>Charakteristika</i>	<i>Hodnota</i>
Stredná hodnota	155.0500
Medián	157.4000
Maximum	183.9000
Minimum	120.0000
Štandardná odchýlka	17.69251
Šikmosť	-0.259871
Strmosť	1.987835
ADF test (5% kritická hodnota testu)	1.045919 (-1.9510)
ADF test diferencovaného radu (5% kritická hodnota testu)	-8.705080 (-1.9514)
Jarqueova-Berova štatistika	1.941915
P-hodnota JB štatistiky	0.378720

Tabuľka 3.2 Hodnoty autokorelačnej funkcie a parciálnej autokorelačnej funkcie nediferencovaného a diferencovaného radu H

<i>Posunutie</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>
ACF	0.812	0.665	0.653	0.682	0.507	0.371	0.363	0.402
ACF(d)	-0.170	-0.646	-0.049	0.805	-0.173	-0.544	0.019	0.667
PACF	0.812	0.018	0.320	0.206	-0.464	0.016	0.090	0.112
PACF(d)	-0.170	-0.695	-0.702	0.270	-0.022	0.122	0.048	0.162
<i>Posunutie</i>	<i>9</i>	<i>10</i>	<i>11</i>	<i>12</i>	<i>13</i>	<i>14</i>	<i>15</i>	<i>16</i>
ACF	0.240	0.132	0.135	0.136	-0.010	-0.097	-0.092	-0.106
ACF(d)	-0.202	-0.479	0.098	0.549	-0.256	-0.336	0.150	0.376
PACF	-0.304	0.098	-0.021	-0.164	-0.039	0.021	-0.070	-0.148
PACF(d)	0.023	-0.057	-0.011	-0.041	-0.174	0.130	0.143	0.016



Obrázok 3.2. Priebeh a histogram časového radu HDP Slovenska 1993-2001. Údaje sú v miliardách SKK v stálych cenách z roku 1995.

Na overenie, že proces definovaný modelom (3.26) je stacionárny a invertovateľný stačí ukázať, že korene charakteristických polynómov pre autoregresnú zložku, ako aj pre zložku klzavých priemerov ležia mimo jednotkového kruhu. Charakteristický polynóm autoregresnej zložky modelu je

$$(3.27) \phi_3(B) = 1 + 0.572498B + 0.752531B^2 + 0.532182B^3$$

Tabuľka 3.3 Štatistické vlastnosti parametrov modelu M_H a miery presnosti predikcie

Premenná	Koeficient	Štandardná chyba	t-štatistika	p-hodnota
μ	1.586889	0.416028	3.814377	0.0008
ϕ_1	-0.572498	0.176126	-3.250504	0.0033
ϕ_2	-0.752531	0.121894	-6.173642	0.0000
ϕ_3	-0.532182	0.177681	-2.995152	0.0061
θ_4	0.960389	0.000627	1532.221	0.0000
Θ_1	-0.566251	0.151260	-3.743558	0.0010
Θ_2	0.899576	0.059448	15.13209	0.0000
Parameter	Hodnota	Miera presnosti	Hodnota	
Koeficient determinácie Adjustovaný	0.927251	Odmocnina priemernej štvorcovej chyby	6.670892	
Štandardná chyba regresie	2.561224	Priemerná absolútna chyba	5.713983	
Súčet štvorcov rezíduí	163.9968	Priemerná absolútna percentuálna chyba	0.035611	
Logaritmická vierohodnosť	-71.55180			
Akaikeho kritérium	informačné 4.909488	Koeficient nerovnosti	Theilovej 0.021123	

a jeho korene sú $-1.51976, 0.052857 \pm 1.11069i$, pričom je zrejmé, že ležia mimo jednotkového kruhu, proces je teda stacionárny. Charakteristický polynóm zložky kľzavých priemerov má tvar

$$(3.28) \theta_{12}(B) = 1 + 0.394139B^4 + 0.355755B^8 + 0.863943B^{12}$$

a korene $\pm 0.962855 \pm 0.315788i, \pm 0.315788 \pm 0.962855i$ a $\pm 0.714288 \pm 0.714288i$. Je jasné, že všetky ležia mimo jednotkového kruhu. Proces je teda aj invertovateľný.

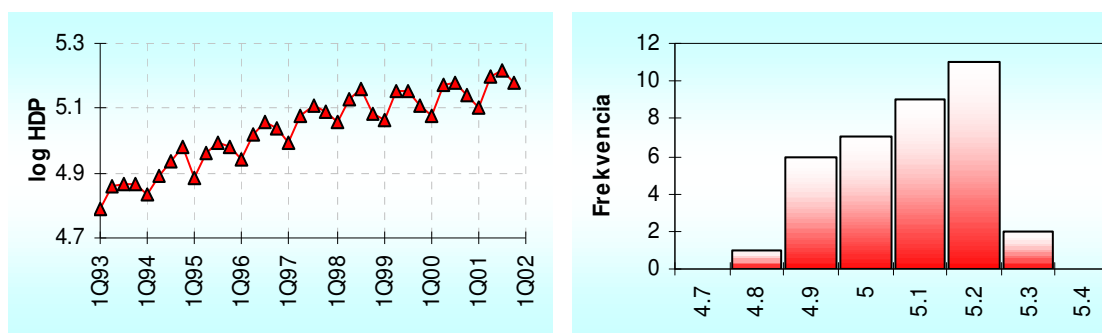
Pretože p-hodnota F-štatistiky testu seriálovej korelácie s parametrom 12 je 0.5818, nezamietame na hladine významnosti $\alpha = 0.05$ hypotézu, že v rade inovácií nie je seriálová závislosť až po rád 12, a teda môžeme predpokladať, že inovácie sú nezávislé. Pretože p-hodnota Jarqueho-Berovho testu je 0.7834, nezamietame na tej istej hladine významnosti hypotézu, že inovácie majú normálne rozdelenie. Test nulovej strednej hodnoty poskytuje p-hodnotu 0.6650, takže nezamietame ani hypotézu nulovej strednej hodnoty inovácií. Konečne, F-štatistika ARCH LM testu s parametrom 12 sa rovná 0.8394, takže môžeme nezamietnuť ani hypotézu, že v inováciách neexistuje podmienená autoregresná heteroskedasticita. Hodnoty testovacích štatistík a p-hodnoty testov radu inovácií sú uvedené v tabuľke 3.4.

Tabuľka 3.4 Výsledky testov radu inovácií modelu M_H

<i>Test</i>	<i>Hodnota testovacej štatistiky</i>	<i>p-hodnota</i>
LM test seriálovej korelácie	0.883498	0.581835
ARCH LM test	0.531709	0.839432
Test strednej hodnoty $\mu = 0$	-0.437070	0.664996
Jarqueov-Berov test	0.488169	0.783422

III.2.2 Rad LH

Teraz identifikujeme model v rade LH prirodzených logaritmov štvrtročných údajov HDP Slovenska 1993-2001. Na obrázku 3.3 je zobrazený priebeh časového radu a jeho histogram, pričom základné štatistické charakteristiky radu LH sú uvedené v tabuľke 3.5. Pretože Jarqueho-Berova štatistika umožňuje nezamietnuť hypotézu, že rad H má normálne rozdelenie, môžeme použiť náš matematický aparát.



Obrázok 3.3. Priebeh a histogram časového radu logaritmu HDP Slovenska 1993-2001. Údaje sú v logaritmoch miliárd SKK v stálych cenách z roku 1995.

Tabuľka 3.5 Základné štatistické charakteristiky radu LH

<i>Charakteristika</i>	<i>Hodnota</i>
Stredná hodnota	5.037209
Medián	5.058783
Maximum	5.214392
Minimum	4.787492
Štandardná odchýlka	0.116980
Šikmosť	-0.419824
Strmosť	1.959984
ADF test (5% kritická hodnota testu)	1.246701 (-1.9510)
ADF test diferencovaného radu (5% kritická hodnota testu)	-8.130708 (-1.9514)
Jarqueova-Berova štatistika	2.250482
P-hodnota JB štatistiky	0.324574

Hypotézu, že rad LH má nulovú strednú hodnotu môžeme na hladine významnosti $\alpha = 0.05$ zamietnuť. Skutočne, hodnota t-štatistiky pri testovaní hypotézy $H_0 : \mu = 0$ proti dvojstrannej alternatívnej hypotéze $H_A : \mu \neq 0$ je $t=2.58362$, pričom kritická hodnota Studentovho t-rozdelenia s 35 stupňami voľnosti na hladine významnosti $\alpha = 0.05$ je 2.03011, takže hypotézu môžeme zamietnuť. Toto nás vedie k tomu, že aj pre tento časový rad budeme hľadať model obsahujúci konštantný člen.

Rozšírený Dickeyov-Fullerov test pre nediferencovaný ako aj pre raz diferencovaný rad nám ukazuje, že proces je typu $I(1)$. PACF diferencovaného radu identifikuje rád autoregresnej zložky $p=4$ a ACF identifikuje rád zložky kľzavých priemerov $q=4$, ako aj sezónnosť $s=4$ a rád sezónnych kľzavých priemerov $Q=4$. Hodnoty prvých šestnástich ACF a PACF nediferencovaného, ako aj diferencovaného radu sú v tabuľke 3.6. Aj v tomto časovom rade p-hodnota Ljungovej-Boxovej Q-štatistiky rovná 0.246 vedie k nezamietnutiu hypotézy, že v diferencovanom rade nie je autokorelácia po prvý rád, nebudeme brať do úvahy tie modely, v ktorých je rád autoregresie rovný $p=1$.

Tabuľka 3.6 Hodnoty autokorelačnej funkcie a parciálnej autokorelačnej funkcie nediferencovaného a diferencovaného radu LH

Posunutie	1	2	3	4	5	6	7	8
ACF	0.810	0.675	0.655	0.675	0.499	0.370	0.356	0.394
ACF(d)	-0.188	-0.589	-0.077	0.802	-0.183	-0.492	-0.008	0.667
PACF	0.810	0.053	0.276	0.208	-0.452	-0.009	0.093	0.146
PACF(d)	-0.188	-0.647	-0.680	0.370	0.027	0.154	0.086	0.200
Posunutie	9	10	11	12	13	14	15	16
ACF	0.230	0.130	0.129	0.129	-0.017	-0.098	-0.094	-0.107
ACF(d)	-0.210	-0.450	0.078	0.552	-0.253	-0.329	0.133	0.388
PACF	-0.311	0.069	0.001	-0.152	-0.055	0.019	-0.044	-0.146
PACF(d)	0.052	-0.087	-0.019	-0.070	-0.159	0.109	0.133	0.001

Na základe štatistických vlastností pre časový rad LH identifikujeme model M_{LH} ako SARIMA (3,1,4) \times (0,0,2)₄ v tvare

$$(3.29) \quad y_t = 0.027755 + 0.448902y_{t-1} - 0.163701y_{t-2} + 0.214808y_{t-3} + 0.499991y_{t-4} + E_t + 0.419259E_{t-4} + 0.388542E_{t-8} + 0.872156E_{t-12}$$

Štatistické vlastnosti koeficientov modelu M_{LH} spolu s mierami presnosti predikcie

vnútri časového radu sú uvedené v tabuľke 3.7.

Ukážeme, že korene charakteristických polynómov pre autoregresnú zložku a pre zložku kľzavých priemerov modelu (3.29) ležia mimo jednotkového kruhu.

Charakteristický polynóm autoregresnej zložky modelu je

$$(3.30) \quad \phi_3(B) = 1 + 0.551098B + 0.714917B^2 + 0.499991B^3$$

pričom jeho korene sú -1.05562 a $0.060497 \pm 1.1341i$, ležia teda mimo jednotkového kruhu. Proces je stacionárny.

Tabuľka 3.7 Štatistické vlastnosti parametrov modelu M_{LH} a miery presnosti predikcie

<i>Premenná</i>	<i>Koeficient</i>	<i>Štandardná chyba</i>	<i>t-štatistika</i>	<i>p-hodnota</i>
μ	0.010034	0.002740	3.662553	0.0012
ϕ_1	-0.551098	0.178664	-3.084556	0.0049
ϕ_2	-0.714917	0.126378	-5.656968	0.0000
ϕ_3	-0.499991	0.173513	-2.881586	0.0080
θ_4	0.960344	0.000423	2269.161	0.0000
Θ_1	-0.541085	0.124137	-4.358761	0.0002
Θ_2	0.908170	0.055047	16.49820	0.0000
<i>Parameter</i>	<i>Hodnota</i>	<i>Miera presnosti</i>		<i>Hodnota</i>
Koeficient determinácie Adjustovaný	0.929053	Odmocnina	priemernej	0.052351
determinácie	koef. 0.912026	štvorcovej chyby		
Štandardná chyba regresie	0.016133	Priemerná chyba	absolútna	0.043726
Súčet štvorcov rezíduí	0.006507	Priemerná	absolútna	0.008608
Logaritmická vierohodnosť	90.60400	percentuálna chyba		
Akaikeho kritérium	informačné -5.225250	Koeficient nerovnosti	Theilovej	0.005188

Charakteristický polynóm zložky kľzavých priemerov má tvar

$$(3.31) \theta_{12}(B) = 1 + 0.419259B^4 + 0.388542B^8 + 0.872156B^{12}$$

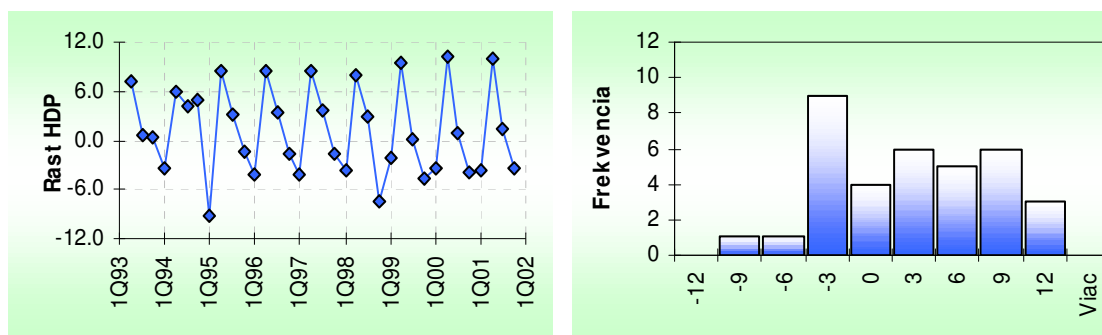
a korene $\pm 0.714296 \pm 0.714296i$, $\pm 0.960499 \pm 0.319805i$, a $\pm 0.319805 \pm 0.960499i$. Je jasné, že všetky ležia mimo jednotkového kruhu. Takže proces definovaný modelom je aj invertovateľný. Tabuľka 3.8 udáva hodnoty testovacích štatistík a p -hodnoty testov niektorých vlastností radu inovácií.

Tabuľka 3.8 Výsledky testov radu inovácií modelu M_{LH}

<i>Test</i>	<i>Hodnota testovacej štatistiky</i>	<i>p-hodnota</i>
LM test seriálovej korelácie	0.972775	0.516014
ARCH LM test	0.260097	0.979995
Test strednej hodnoty $\mu = 0$	-0.108476	0.914370
Jarqueov-Berov test	1.147254	0.563478

III.2.3 Rad RH

Tretím radom, pre ktorý budeme identifikovať SARIMA model, je časový rad percentuálneho tempa rastu HDP. Na obrázku 3.4 je zobrazený priebeh časového radu a jeho histogram. HDP Slovenska v uvažovanom období rástol v stálych cenách z roku 1995 priemerne o 1.26% štvrťročne, pričom najviac rástol v druhom štvrťroku 2000 o 10.26% a najmenej v prvom štvrťroku 1995, kedy HDP dokonca klesol o 9.27% v porovnaní s predošlým štvrťrokom. Základné štatistické charakteristiky radu sú uvedené v tabuľke 3.9. Pretože Jarqueho-Berova štatistika umožňuje nezamietnuť hypotézu, že rad RH má normálne rozdelenie, môžeme použiť Boxovu-Jenkinsovu metodológiu.



Obrázok 3.4. Priebeh a histogram časového radu tempa rastu HDP Slovenska 1993-2001. Údaje sú v percentách.

Tabuľka 3.9 Základné štatistické charakteristiky radu *RH*

Charakteristika	Hodnota
Stredná hodnota	1.260912
Medián	0.622084
Maximum	10.25641
Minimum	-9.271978
Štandardná odchýlka	5.365820
Šikmosť	0.131205
Strmosť	1.958902
ADF test (5% kritická hodnota testu)	-7.834016 (-1.9514)
Jarqueova-Berova štatistika	1.681085
P-hodnota JB štatistiky	0.431476

Tabuľka 3.10 Hodnoty autokorelačnej funkcie a parciálnej autokorelačnej funkcie radu *RH*

Posunutie	1	2	3	4	5	6	7	8
ACF	-0.190	-0.586	-0.083	0.807	-0.187	-0.490	-0.012	0.673
PACF	-0.190	-0.646	-0.693	0.363	0.011	0.149	0.091	0.208
Posunutie	9	10	11	12	13	14	15	16
ACF	-0.212	-0.448	0.072	0.557	-0.253	-0.328	0.122	0.397
PACF	0.073	-0.066	-0.002	-0.071	-0.166	0.098	0.095	-0.018

Hodnota štatistiky rozšíreného Dickeyovho-Fullerovho testu nám udáva typ procesu $I(0)$. Podobne, ako v dvoch predošlých prípadoch identifikujeme rád autoregresnej zložky $p=4$, rád kĺzavých priemerov $q=4$, sezónnosť $s=4$ a rád sezónnych kĺzavých priemerov $Q=4$. Ljungova-Boxova štatistika s p-hodnotou rovnajúcou sa 0.241 umožňuje nezamietnuť hypotézu, že v procese nie je autokorelačná závislosť prvého rádu. Tabuľka 3.10 udáva hodnoty prvých

šestnástich ACF a PACF radu RH . Hoci hypotézu, že rad RH má nulovú strednú hodnotu nemôžeme na hladine významnosti $\alpha = 0.05$ zamietnuť, pretože hodnota t -štatistiky pri testovaní nulovej hypotézy je $t=1.551526$, pričom kritická hodnota Studentovho t -rozdelenia s 35 stupňami voľnosti je 2.03011, pri dodržaní štandardných kritérií, ukázalo sa, že modely s konštantným členom majú lepšie štatistické charakteristiky.

Spomedzi viacerých vhodných modelov, na základe ich štatistických vlastností, pre časový rad RH identifikujeme model M_{RH} opätovne ako SARIMA $(3,0,4) \times (0,0,2)_4$ v tvare

$$(3.32) \quad g_t = 3.253921 - 0.576987g_{t-1} - 0.716153g_{t-2} - 0.535589g_{t-3} + E_t + 0.440336E_{t-4} + 0.409281E_{t-8} + 0.872622E_{t-12}$$

Tabuľka 3.11 Štatistické vlastnosti parametrov modelu M_{RH} a miery presnosti predikcie

<i>Premenná</i>	<i>Koeficient</i>	<i>Štandardná chyba</i>	<i>t-štatistika</i>	<i>p-hodnota</i>
μ	1.150312	0.264974	4.341234	0.0002
ϕ_1	-0.576987	0.173372	-3.328021	0.0027
ϕ_2	-0.716153	0.124271	-5.762849	0.0000
ϕ_3	-0.535589	0.168302	-3.182308	0.0039
θ_4	0.960339	0.000483	1989.340	0.0000
Θ_1	-0.520003	0.124571	-4.174356	0.0003
Θ_2	0.908660	0.055215	16.45681	0.0000
<i>Parameter</i>	<i>Hodnota</i>	<i>Miera presnosti</i>		<i>Hodnota</i>
Koeficient determinácie	0.933000	Odmocnina	priemernej	5.133633
Adjustovaný koef. determinácie	0.916920	štvorcovej chyby		
Štandardná chyba regresie	1.589213	Priemerná absolútna chyba		4.385025
Súčet štvorcov rezíduí	63.13992	Priemerná absolútna		1.122584
Logaritmickej vierohodnosť	-56.27991	percentuálna chyba		
Akaikeho kritérium	informačné 3.954994	Koeficient nerovnosti	Theilovej	0.744088

Štatistické vlastnosti koeficientov modelu M_{RH} ako aj predikčné schopnosti modelu sú uvedené v tabuľke 3.12.

Tabuľka 3.12 Výsledky testov radu inovácií modelu M_{RH}

<i>Test</i>	<i>Hodnota testovacej štatistiky</i>	<i>p-hodnota</i>
LM test seriálovej korelácie	0.919807	0.554484
ARCH LM test	0.257030	0.980819
Test strednej hodnoty $\mu = 0$	-0.064729	0.948806
Jarqueov-Berov test	0.846041	0.655065

Charakteristický polynóm autoregresnej zložky modelu (3.32) je

$$(3.33) \phi_3(B) = 1 + 0.576987X_{t-1} + 0.716153X_{t-2} + 0.535589X_{t-3}$$

kým charakteristický polynóm zložky kľzavých priemerov má tvar

$$(3.34) \theta_{12}(B) = 1 + 0.440336B^4 + 0.409281B^8 + 0.872622B^{12}$$

Riešením rovnice (3.33) dostaneme korene -1.469, a $0.065933 \pm 1.12546i$, kým riešením (3.34) dostaneme korene $\pm 0.714297 \pm 0.714297i$, $\pm 0.959505 \pm 0.321845i$, a $\pm 0.321845 \pm 0.959505i$. Je jasné, že všetky ležia mimo jednotkového kruhu. Proces je teda stacionárny ako aj invertovateľný. Tabuľka 3.12 udáva hodnoty testovacích štatistík a p-hodnoty testov niektorých vlastností radu inovácií.

III.3 Identifikácia trendov v radoch

Vo všetkých troch radoch, H , LH a RH , najskôr identifikujeme trendy a potom v radoch rezíduí identifikujeme Boxovou – Jenkinsovou metodológiou vhodný model. V modeloch budeme uvažovať nasledujúcich päť štandardných typov trendov:

- **konštantný trend** v tvare

$$(3.35) Tr_{C,t} = c,$$

kde c je konštanta

- **lineárny trend** v tvare

$$(3.36) Tr_{L,t} = a + bt$$

- **kvadratický trend** v tvare

$$(3.37) Tr_{Q,t} = a + bt + ct^2$$

- **exponenciálny trend** v tvare

$$(3.38) Tr_{E,t} = e^{a+bt}$$

- **s-krivkový trend** v tvare

$$(3.39) Tr_{S,t} = e^{a+b/t}$$

Vo všetkých trendoch t vyjadruje poradové číslo pozorovania. Získané trendové funkcie štatisticky vyhodnotíme a pre každý rad vyberieme taký trend, ktorého štatistické parametre budú najvýhodnejšie. Budeme pri tom brať do úvahy štandardné ukazovatele miery presnosti vyrovnania ako aj významnosť získaných parametrov modelu.

III.3.1 Identifikácia trendu v rade H

V rade H sme postupne identifikovali týchto päť rôznych trendov. Konštantný trend

$$(3.40) Tr_{HC,t} = 155.05,$$

lineárny trend

$$(3.41) Tr_{HL,t} = 125.948 + 1.57308t,$$

kvadratický trend

$$(3.42) Tr_{HQ,t} = 119.930 + 2.52323t - 0.02568t^2,$$

exponenciálny trend

$$(3.43) Tr_{HE,t} = e^{4.84554+0.01036t}$$

a s-krivkový trend

$$(3.44) Tr_{HS,t} = e^{5.08909-0.44742/t}.$$

Štatistické hodnoty parametrov modelu (odhad parametra, štandardná chyba, hodnota t-štatistiky a jej p-hodnota) sú uvedené v v tabuľke 3.13. Vidíme, že všetky odhady parametrov sú štatisticky významné. Miery presnosti vyrovnania trendových funkcií sú uvedené v tabuľke 3.14. Porovnaním modelov identifikujeme v rade H kvadratický trend (3.42). Rad rezíduí, získaný odstránením tohoto trendu z radu H budeme označovať HT .

Tabuľka 3.13 Štatistické vlastnosti parametrov trendových funkcií identifikovaných v rade H

<i>Premenná</i>	<i>Koeficient</i>	<i>Štandardná chyba</i>	<i>t-štatistika</i>	<i>p-hodnota</i>
Trend (3.40)				
c	155.05	2.94875	52.5816	0.000000
Trend (3.41)				
a	125.948	2.13873	58.8892	0.000000
b	1.57308	0.10080	15.6056	0.000000
Trend (3.42)				
a	119.930	3.08461	38.8803	0.000000
b	2.52323	0.38443	6.56362	0.000000
c	-0.02568	0.01008	-2.54818	0.015668
Trend (3.43)				
a	4.84554	0.01453	333.471	0.000000
b	0.01036	0.00068	15.1277	0.000000
Trend (3.44)				
a	5.08909	0.01714	296.868	0.000000
b	-0.44742	0.08088	-5.53238	0.000003

Tabuľka 3.14 Miere presnosti vyrovnania trendových funkcií identifikovaných v rade H

<i>Model</i>	<i>Priemerná štvorcová chyba</i>	<i>Priemerná absolútna chyba</i>	<i>Priemerná absolútna percentuálna chyba</i>	<i>Priemerná chyba</i>	<i>Priemerná percentuál na chyba</i>
(3.40)	313.025	14.8667	9.92101	1.65793E-14	-1.33797
(3.41)	39.4757	5.19797	3.35573	2.44742E-14	-0.16976
(3.42)	33.9849	4.68037	3.00666	1.50003E-14	-0.12636
(3.43)	44.4324	5.44876	3.52605	0.116802	-0.08628
(3.44)	169.739	10.6444	7.00076	0.568822	-0.35164

III.3.2 Identifikácia trendu v rade LH

Aj v rade LH sme postupne identifikovali päť rôznych trendov: konštantný trend

$$(3.45) Tr_{LHC,t} = 5.03721,$$

lineárny trend

$$(3.46) Tr_{LHL,t} = 4.84554 + 0.01036t,$$

kvadratický trend

$$(3.47) Tr_{LHQ,t} = 4.79367 + 0.01855t - 0.00022t^2,$$

exponenciálny trend

$$(3.48) Tr_{LHE,t} = e^{1.57338+0.00206t}$$

a s-krivkový trend

$$(3.49) Tr_{LHS,t} = e^{1.62703-0.09001/t}.$$

Štatistické hodnoty parametrov modelu sú uvedené v tabuľke 3.15. Vidíme, že aj v tomto prípade sú všetky odhady parametrov štatisticky významné. Miere presnosti vyrovnania trendových funkcií sú uvedené v tabuľke 3.16. Porovnaním

modelov identifikujeme v rade *LH* kvadratický trend (3.47). Rad rezíduí, získaný odstránením tohoto trendu z radu *LH* budeme označovať *LHT*.

Tabuľka 3.15 Štatistické vlastnosti parametrov trendových funkcií identifikovaných v rade *LH*

<i>Premenná</i>	<i>Koeficient</i>	<i>Štandardná chyba</i>	<i>t-štatistika</i>	<i>p-hodnota</i>
Trend (3.45)				
c	5.03721	0.019497	258.363	0.000000
Trend (3.46)				
a	4.84554	0.014531	333.471	0.000000
b	0.01036	0.000685	15.1277	0.000000
Trend (3.47)				
a	4.79367	0.019659	243.838	0.000000
b	0.01855	0.002450	7.57163	0.000000
c	-0.00022	0.000064	-3.44665	0.001567
Trend (3.48)				
a	1.57838	0.002723	540.024	0.000000
b	0.00206	0.000138	14.9908	0.000000
Trend (3.49)				
a	1.62703	0.003396	479.118	0.000000
b	-0.09001	0.016020	-5.61858	0.000003

Tabuľka 3.16 Miery presnosti vyrovnaní trendových funkcií identifikovaných v rade *LH*

<i>Model</i>	<i>Priemerná štvorcová chyba</i>	<i>Priemerná absolútna chyba</i>	<i>Priemerná absolútna percentuálna chyba</i>	<i>Priemerná chyba</i>	<i>Priemerná percentuálna na chybu</i>
(3.45)	0.013684	0.097932	1.95387	1.23358E-16	-0.052300
(3.46)	0.001822	0.035193	0.69930	-1.72701E-16	-0.006959
(3.47)	0.001380	0.030265	0.60038	2.71388E-16	-0.004978
(3.48)	0.001870	0.035519	0.70583	0.000171	-0.003483
(3.49)	0.007286	0.069260	1.38022	0.000700	-0.013749

III.3.3 Identifikácia trendu v rade *RH*

Pretože rad *RH* obsahuje aj záporné členy, nie je možné identifikovať v ňom exponenciálny ani s-krivkový trend. Ostávajúce tri trendy boli identifikované takto: konštantný trend

$$(3.50) Tr_{RHC,t} = 1.29541,$$

lineárny trend

$$(3.51) Tr_{RHL,t} = 2.31772 - 0.05526t$$

a kvadratický trend

$$(3.52) Tr_{RHQ,t} = 2.77903 - 0.12810t + 0.00197t^2.$$

Štatistické hodnoty parametrov modelu sú uvedené v tabuľke 3.17. Miery presnosti vyrovnania trendových funkcií sú uvedené v tabuľke 3.18. Bohužiaľ, všetky odhady parametrov sú štatisticky nevýznamné, preto z radu *RH* neodstránime žiadny z uvedených trendov.

Tabuľka 3.17 Štatistické vlastnosti parametrov trendových funkcií identifikovaných v rade *RH*

<i>Premenná</i>	<i>Koeficient</i>	<i>Štandardná chyba</i>	<i>t-štatistika</i>	<i>p-hodnota</i>
Trend (3.50)				
c	1.29541	0.88211	1.468530	0.15089
Trend (3.51)				
a	2.31772	1.81684	1.275690	0.21071
b	-0.05526	0.08563	-0.645332	0.52304
Trend (3.52)				
a	2.77903	2.86466	0.970105	0.33905
b	-0.12810	0.35880	-0.358802	0.72203
c	0.00197	0.00936	0.210338	0.83470

Tabuľka 3.18 Miery presnosti vyrovnania trendových funkcií identifikovaných v rade *RH*

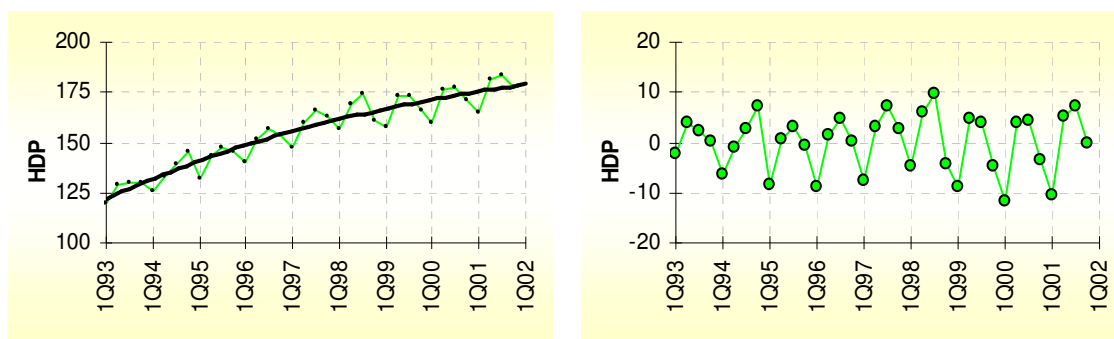
<i>Model</i>	<i>Priemerná štvorcová chyba</i>	<i>Priemerná absolútna chyba</i>	<i>Priemerná chyba</i>
(3.50)	28.0122	4.46611	4.93432E-16
(3.51)	28.4872	4.37694	5.67447E-16
(3.52)	29.3111	4.37587	1.4803E-16

III.4 Identifikácia modelov v radoch s odstráneným trendom

V tejto podkapitole sa zameriame na identifikáciu modelov v radoch H , a LH po odstránení kvadratického trendu, teda v radoch HT a LHT .

III.4.1 Rad HT

V rade H sme identifikovali kvadratický trend v tvare $Tr_{HQ,t} = 119.930 + 2.52323t - 0.02568t^2$, kde t je poradové číslo pozorovania. Na obrázku 3.5 je zobrazený priebeh trendu v časovom rade ako aj časový rad rezíduí. Štatistické vlastnosti trendu sú uvedené v tabuľke 3.13. Základné štatistické charakteristiky radu rezíduí HT sú uvedené v tabuľke 3.19.



a)

b)

Obrázok 3.5.

a) Priebeh kvadratického trendu v časovom rade HDP Slovenska 1993-2001.

b) Priebeh časového radu rezíduí po odstránení kvadratického trendu.

Údaje sú v miliardách SKK v stálych cenách z roku 1995.

Vidíme, že Jarqueho-Berova štatistika umožňuje nezamietnuť hypotézu, že rad rezíduí má normálne rozdelenie. Ľahko sa ukáže, že stredná hodnota rezíduí je s p -hodnotou 1 nulová. Rozšírený Dickeyov-Fullerov test ukazuje, že rad HT je typu $I(0)$. V tomto prípade PACF diferencovaného radu identifikuje rád autoregresnej zložky $p=4$ a ACF identifikuje rád zložky kĺzavých priemerov

$q=4$, ako aj sezónnosť $s=4$ a rád sezónnych kľzavých priemerov $Q=4$. Hodnoty prvých šestnástich ACF a PACF radu HL sú v tabuľke 3.20. Aj v tomto rade rezíduí p-hodnota Ljungovej-Boxovej štatistiky rovnajúca sa 0.880 vedie k nezamietnutiu hypotézy, že v diferencovanom rade nie je autokorelácia po prvý rád, nebudeme brať do úvahy tie modely, v ktorých je rád autoregresie rovný $p=1$.

Na základe štatistických vlastností pre časový rad HT identifikujeme model M_{HT} ako ARMA (4,4), teda bez sezónnej zložky, v tvare

$$(3.53) Y_t = 113.806 + 2.52703t - 0.023875t^2 + R_t$$

kde R_t sú rezíduá dané predpisom

$$(3.54) R_t = -0.156104R_{t-1} - 0.118101R_{t-2} + 0.840528R_{t-4} + E_t + 0.426568E_{t-1} - 0.458528E_{t-3} - 0.903491E_{t-4}$$

Štatistické vlastnosti koeficientov modelu M_{HT} ako aj miera presnosti schopnosti jeho predikcie sú uvedené v tabuľke 3.21.

Charakteristický polynóm autoregresnej zložky modelu (3.54) je

$$(3.55) \phi_4(B) = 1 + 0.156104B + 0.118101B^2 - 0.840528B^4$$

s dvomi reálnymi koreňami 1.12009 a -1.03512 a dvojicou komplexne združených koreňov $0.042488 \pm 1.01209i$ a charakteristický polynóm zložky kľzavých priemerov má tvar

$$(3.56) \theta_4(B) = 1 + 0.426568B - 0.458528B^3 - 0.903491B^4$$

s reálnymi koreňmi 1.01386 a -1.04502 a dvojicou komplexne združených koreňov $-0.238172 \pm 0.993948i$. Je jasné, že všetky ležia mimo jednotkového kruhu. Proces je stacionárny a invertovateľný.

Tabuľka 3.19 Základné štatistické charakteristiky radu rezíduí HT

<i>Charakteristika</i>	<i>Hodnota</i>
Stredná hodnota	6.63E-17
Medián	0.991402
Maximum	9.719891
Minimum	-11.60738
Štandardná odchýlka	5.660645
Šikmosť	-0.457203
Strmosť	2.171698
ADF test (5% kritická hodnota testu)	-9.754682 (-1.9510)
Jarqueova-Berova štatistika	2.283335
P-hodnota JB štatistiky	0.319286

Tabuľka 3.20 Hodnoty autokorelačnej funkcie a parciálnej autokorelačnej funkcie radu HT

<i>Posunutie</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>
ACF	-0.024	-0.685	-0.019	0.758	-0.119	-0.625	-0.005	0.595
PACF	-0.024	-0.686	-0.121	0.535	-0.282	-0.041	-0.175	-0.095
<i>Posunutie</i>	<i>9</i>	<i>10</i>	<i>11</i>	<i>12</i>	<i>13</i>	<i>14</i>	<i>15</i>	<i>16</i>
ACF	-0.196	-0.550	0.081	0.513	-0.189	-0.351	0.175	0.386
PACF	-0.273	-0.177	-0.114	-0.180	-0.114	0.133	-0.049	-0.106

Tabuľka 3.21 Štatistické vlastnosti parametrov modelu M_{HT} a miery presnosti predikcie

<i>Premenná</i>	<i>Koeficient</i>	<i>Štandardná chyba</i>	<i>t-štatistika</i>	<i>p-hodnota</i>
ϕ_1	-0.156104	0.053501	-2.917784	0.0072
ϕ_2	-0.118101	0.062248	-1.897271	0.0690
ϕ_4	0.840528	0.064470	13.03756	0.0000
θ_1	0.426568	0.076659	5.564506	0.0000
θ_3	-0.458528	0.051605	-8.885373	0.0000
θ_4	-0.903491	0.038008	-23.77087	0.0000
<i>Parameter</i>	<i>Hodnota</i>	<i>Miera presnosti</i>	<i>Hodnota</i>	
Koeficient determinácie	0.877067	Odmocnina priemernej	5.342063	
Adjustovaný koef. determinácie	0.853426	štvorcovej chyby		
Štandardná chyba regresie	2.277023	Priemerná absolútna chyba	4.426422	
Súčet štvorcov rezíduí	134.8056	Priemerná absolútna	1.526373	
Logaritmická vierohodnosť	-68.41560	percentuálna chyba		
Akaikeho informačné kritérium	4.650975	Koeficient Theilovej nerovnosti	0.701015	

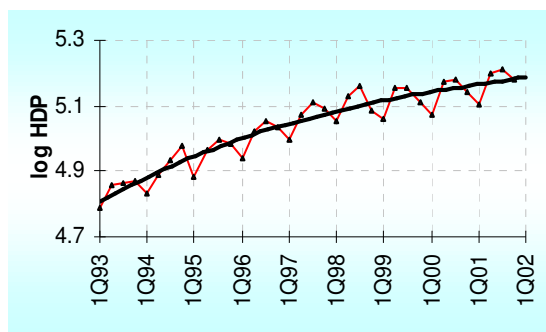
Podobne, ako pri predošlých modeloch, tabuľka 3.22 udáva hodnoty testovacích štatistík a p-hodnoty testov niektorých vlastností radu inovácií.

Tabuľka 3.22 Výsledky testov radu rezíduí modelu M_{HT}

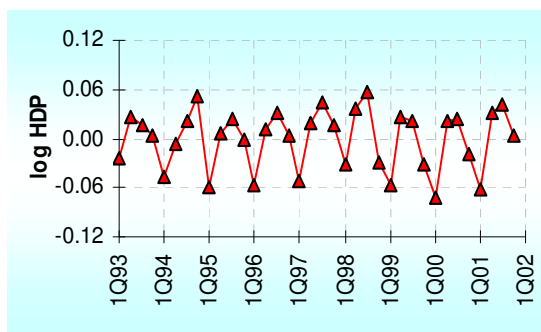
Test	Hodnota testovacej štatistiky	p-hodnota
LM test seriálovej korelácie	0.501036	0.735261
ARCH LM test	0.068729	0.990767
Test strednej hodnoty $\mu = 0$	-0.219028	0.828064
Jarqueov-Berov test	0.147249	0.929021

III.4.2 Rad LHT

Podobne, ako v rade H , aj v rade LH sme identifikovali kvadratický trend v tvare, $Tr_{LHQ,t} = 4.74296 + 0.019369t - 0.000221t^2$, kde t je poradové číslo pozorovania. Štatistické vlastnosti trendu sú uvedené v tabuľke 3.15. Na obrázku 3.6. je zobrazený priebeh kvadratického trendu v rade LH ako aj radu rezíduí po odstránení trendu.



a)



b)

Obrázok 3.6.

a) Priebeh kvadratického trendu v časovom rade logaritmov HDP Slovenska 1993-2001.

b) Priebeh časového radu rezíduí po odstránení kvadratického trendu.

Údaje sú v logaritmoch miliárd SKK v stálych cenách z roku 1995.

Základné štatistické charakteristiky radu rezíduí *LHT* sú uvedené v tabuľke 3.23. Vidíme, že Jarqueho-Berova štatistika umožňuje nezamietnuť hypotézu, že rad rezíduí má normálne rozdelenie. Ľahko sa ukáže, že stredná hodnota rezíduí je nulová. Rozšírený Dickeyov-Fullerov test jednotkového koreňa nám udáva, že rad rezíduí je typu $I(0)$. PACF identifikuje rád autoregresnej zložky $p=4$ a ACF identifikuje rád zložky kľzavých priemerov $q=4$, ako aj sezónnosť $s=4$ a rád sezónnych kľzavých priemerov $Q=4$. Hodnoty prvých šestnástich ACF a PACF radu sú v tabuľke 2.24. Aj v tomto rade rezíduí p-hodnota Ljungovej-Boxovej Q-štatistiky (0.799) vedie k nezamietnutiu hypotézy, že v diferencovanom rade nie je autokorelácia po prvý rád, nebudeme brať do úvahy tie modely, v ktorých je rád autoregresie rovný $p=1$.

Tabuľka 3.23 Základné štatistické charakteristiky radu rezíduí *LHT*

<i>Charakteristika</i>	<i>Hodnota</i>
Stredná hodnota	-1.97E-8
Medián	0.009225
Maximum	0.056393
Minimum	-0.070927
Štandardná odchýlka	0.036077
Šikmosť	-0.483134
Strmosť	2.059039
ADF test (5% kritická hodnota testu)	-9.380162 (-1.9510)
Jarqueova-Berova štatistika	2.728619
P-hodnota JB štatistiky	0.255557

Tabuľka 3.24 Hodnoty autokorelačnej funkcie a parciálnej autokorelačnej funkcie radu *LHT*

<i>Posunutie</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>
ACF	-0.041	-0.659	-0.045	0.757	-0.126	-0.597	-0.023	0.606
PACF	-0.041	-0.662	-0.207	0.547	-0.293	-0.040	-0.155	-0.072
<i>Posunutie</i>	<i>9</i>	<i>10</i>	<i>11</i>	<i>12</i>	<i>13</i>	<i>14</i>	<i>15</i>	<i>16</i>
ACF	-0.200	-0.534	0.076	0.529	-0.187	-0.355	0.166	0.402
PACF	-0.282	-0.192	-0.080	-0.191	-0.070	0.120	-0.021	-0.101

Na základe štatistických vlastností pre rad rezíduí LHT identifikujeme model M_{LHT} ako ARMA (4,4) v tvare

$$(3.57) \quad y_t = 4.74296 + 0.019369t - 0.000221t^2 + r_t$$

kde rezíduá R_t vyhovujú

$$(3.58) \quad r_t = -0.345487R_{t-1} - 0.324849r_{t-2} - 0.205044r_{t-3} + 0.631891r_{t-4} \\ + E_t + 0.742778E_{t-1} + 0.472305E_{t-2} - 0.606532E_{t-4}$$

Štatistické vlastnosti koeficientov modelu M_H sú uvedené v tabuľke 3.25.

Tabuľka 3.25 Štatistické vlastnosti parametrov modelu M_{LHT} a miery presnosti predikcie

<i>Premenná</i>	<i>Koeficient</i>	<i>Štandardná chyba</i>	<i>t-štatistika</i>	<i>p-hodnota</i>
ϕ_1	-0.345487	0.141447	-2.442511	0.0220
ϕ_2	-0.324849	0.147194	-2.206946	0.0367
ϕ_3	-0.205044	0.149472	-1.371785	0.1823
ϕ_4	0.631891	0.135288	4.670703	0.0001
θ_1	0.742778	0.046828	15.86170	0.0000
θ_2	0.472305	0.053315	8.858801	0.0000
θ_4	-0.606532	0.044977	-13.48528	0.0000
<i>Parameter</i>	<i>Hodnota</i>	<i>Miera presnosti</i>	<i>Hodnota</i>	
Koeficient determinácie	0.878095	Odmocnina priemernej	0.031055	
Adjustovaný koef. determinácie	0.848837	štvorcovej chyby		
Štandardná chyba regresie	0.014642	Priemerná absolútna chyba	0.025864	
Súčet štvorcov rezíduí	0.005360	Priemerná absolútna	1.122243	
Logaritmická vierohodnosť	93.70669	percentuálna chyba		
Akaikeho informačné kritérium	-5.419168	Koeficient Theilovej nerovnosti	0.611172	

Charakteristický polynóm autoregresnej zložky modelu (3.58) je

$$(3.59) \quad \phi_4(B) = 1 + 0.345487B + 0.324849B^2 + 0.205044B^3 - 0.631891B^4$$

a jeho korene sú 1.45266, -1.04657 a $-0.040795 \pm 1.01945i$. Ich absolútne hodnoty ležia mimo jednotkového kruhu, čiže proces je stacionárny. Charakteristický polynóm zložky kľzavých priemerov modelu má tvar

$$(3.60) \theta_4(B) = 1 + 0.742778B + 0.472305B^2 - 0.606532B^4$$

a má tieto dvojice koreňov: 1.51725, -1.05139 a $0.23293 \pm 0.989588i$. Je jasné, že všetky ležia mimo jednotkového kruhu. Proces je aj invertovateľný.

Aj v rade inovácií sme testovali niektoré jeho vlastnosti. Tabuľka 3.26 udáva hodnoty testovacích štatistík a p-hodnoty testov.

Tabuľka 3.26 Výsledky testov radu rezíduí modelu M_{LHT}

<i>Test</i>	<i>Hodnota testovacej štatistiky</i>	<i>p-hodnota</i>
LM test seriálovej korelácie	1.059590	0.400949
ARCH LM test	0.344588	0.845045
Test strednej hodnoty $\mu = 0$	-0.071441	0.943506
Jarqueov-Berov test	0.638491	0.726697

III.5 Identifikácia trendu pomocou Hodrickovho-Prescottovho filtra

Nelineárny Hodrickov-Prescottov filter je založený na minimalizácii penalizačnej funkcie,

$$(3.61) \min_{T_t} \left\{ \sum_{t=1}^T (X_t - T_t)^2 + \lambda \sum_{t=3}^T (\nabla^2 T_t)^2 \right\}$$

kde ∇^2 je operátor spätnej diferencie druhého rádu. Prvý člen funkcie (3.61) penalizuje veľké rezíduá, teda zlú zhodu modelu, kým druhý člen penalizuje nedostatočnú hladkosť trendu. Parameter λ reguluje vzájomnú váhu oboch

kritérií. Autori odporúčajú pre štvrtročné údaje použiť hodnotu $\lambda = 1600$. Postupne aplikujeme Hodrickov-Prescottov filter na všetky tri základné rady, t.j. H , LH a RH . Po odstránení trendu dostaneme rady rezíduí, ktoré budeme označovať HP , LHP a RHP .

III.5.1 Rad HP

Z radu štvrtročných hodnôt HDP Slovenska 1993-2001 sme pomocou Hodrickovho-Prescottovho filtra s parametrom 1600 odstránili trend. Pretože aj pomocou tohoto modelu budeme chcieť predikovať vývoj HDP v budúcich obdobiach, musíme trend vyjadriť v tvare predikčnej rovnice. Zdá sa najrozumnejšie aj trend modelovať ako autoregresný proces. Základné štatistické charakteristiky radu trendu sú uvedené v tabuľke 3.27. Najlepšie štatistické parametre (sú uvedené v tabuľke 3.28) vykazuje model AR(3). Takže Hodrickov-Prescottov trend v rade H budeme modelovať autoregresnou rovnicou

$$(3.62) \quad Tr_{HP,t} = 0.186813 + 2.900025Tr_{HP,t-1} - 2.845379Tr_{HP,t-2} + 0.944591Tr_{HP,t-3}$$

Vidíme, že autoregresná funkcia (3.62) dosahuje vysokú mieru presnosti vyrovnania (hodnota koeficientu determinácie ako aj adjustovaného koeficientu determinácie sa rovná 1).

Na obrázku 3.7. je zobrazený priebeh trendu radu HDP Slovenska získaného Hodrickovym-Prescottovym filtrom ako aj radu rezíduí po odstránení trendu. Podobne, základné štatistické charakteristiky radu rezíduí HP sú uvedené v tabuľke 3.29. Vidíme, že Jarqueho-Berova štatistika umožňuje nezamietnuť hypotézu, že rad rezíduí má normálne rozdelenie. Ľahko sa ukáže, že stredná

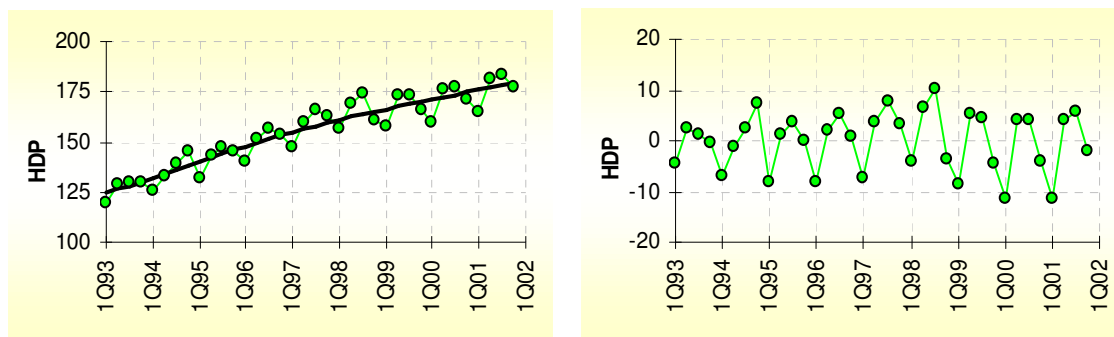
hodnota rezíduí je nulová. Rozšírený Dickeyov-Fullerov test jednotkového koreňa nám udáva, že rad rezíduí je typu $I(0)$. PACF identifikuje rád autoregresnej zložky $p=4$ a ACF identifikuje rád zložky kľzavých priemerov $q=4$, ako aj sezónnosť $s=4$ a rád sezónnych kľzavých priemerov $Q=4$.

Tabuľka 3.27 Základné štatistické charakteristiky Hodrickovho-Prescottovho trendu v rade H

<i>Charakteristika</i>	<i>Hodnota</i>
Stredná hodnota	155.0500
Medián	157.2282
Maximum	179.5177
Minimum	124.3084
Štandardná odchýlka	16.66579
Šikmosť	-0.277880
Strmosť	1.854870
Jarqueova-Berova štatistika	2.430290
P-hodnota JB štatistiky	0.296667

Tabuľka 3.28 Štatistické vlastnosti parametrov modelu $AR(3)$ v HP-trende radu H

<i>Premenná</i>	<i>Koeficient</i>	<i>Štandardná chyba</i>	<i>t-štatistika</i>	<i>p-hodnota</i>
ϕ_0	244.8302	4.811678	50.88251	0.0000
ϕ_1	2.900025	0.026874	107.9128	0.0000
ϕ_2	-2.845379	0.050920	-55.87955	0.0000
ϕ_3	0.944591	0.024512	38.53575	0.0000
<i>Parameter</i>	<i>Hodnota</i>	<i>Miera presnosti</i>	<i>Hodnota</i>	
Koeficient determinácie	1.000000	Odmocnina priemernej	0.072955	
Adjustovaný koef. determinácie	1.000000	štvorcovej chyby		
Štandardná chyba regresie	0.002753	Priemerná absolútna chyba	0.061417	
Súčet štvorcov rezíduí	0.000220	Priemerná absolútna	0.000386	
Logaritická vierohodnosť	149.8485	percentuálna chyba		
Akaikeho informačné kritérium	-8.839302	Koeficient Theilovej nerovnosti	0.000230	



a)

b)

Obrázok 3.7.

a) Priebeh Hodrickovho-Prescottovho trendu v časovom rade HDP Slovenska 1993-2001.

b) Priebeh časového radu rezíduí po odstránení Hodrickovho-Prescottovho trendu. Údaje sú v miliardách SKK v stálych cenách z roku 1995.

Tabuľka 3.29 Základné štatistické charakteristiky radu rezíduí HP

Charakteristika	Hodnota
Stredná hodnota	-1.16E-11
Medián	1.053190
Maximum	10.30967
Minimum	-11.32320
Štandardná odchýlka	5.673690
Šikmosť	-0.379133
Strmosť	2.168873
ADF test (5% kritická hodnota testu)	-9.318431 (-1.9510)
Jarqueova-Berova štatistika	1.898611
P-hodnota JB štatistiky	0.387010

Tabuľka 3.30 Hodnoty autokorelačnej funkcie a parciálnej autokorelačnej funkcie radu HP

Posunutie	1	2	3	4	5	6	7	8
ACF	-0.028	-0.665	0.016	0.774	-0.116	-0.612	0.020	0.611
PACF	-0.028	-0.666	-0.061	0.593	-0.171	-0.028	-0.174	-0.043
Posunutie	9	10	11	12	13	14	15	16
ACF	-0.203	-0.549	0.095	0.503	-0.229	-0.377	0.164	0.361
PACF	-0.233	-0.091	-0.013	-0.077	-0.034	0.176	-0.038	-0.126

Hodnoty prvých šesnástich ACF a PACF radu sú v tabuľke 3.30. Aj v tomto rade rezíduí p-hodnota Ljungovej-Boxovej Q-štatistiky (0.860) vedie k nezamietnutiu hypotézy, že v diferencovanom rade nie je autokorelácia po prvý rád, nebudeme brať do úvahy tie modely, v ktorých je rád autoregresie rovný $p=1$.

Na základe štatistických vlastností pre rad rezíduí *HP* identifikujeme model M_{HP} ako ARMA (4,4) v tvare

$$(3.63) Y_t = Tr_{HP,t} + R_t$$

kde predikcia Hodrickovho-Prescottovho trendu je daná vzťahom (3.62) a rezíduá vyhovujú modelu

$$(3.64) R_t = -0.135778R_{t-1} - 0.146305R_{t-2} + 0.851210R_{t-4} + E_t + 0.541371E_{t-1} + 0.300400E_{t-2} - 0.685483E_{t-4}$$

Ako vidíme, model neobsahuje sezónnu zložku, bola odstránená Hodrickovym-Prescottovym filtrom. Štatistické vlastnosti koeficientov modelu M_{HP} sú uvedené v tabuľke 3.31

Charakteristický polynóm autoregresnej zložky modelu (3.64) je

$$(3.65) \phi_4(B) = 1 + 0.135778B + 0.146305B^2 - 0.851210B^4$$

a jeho korene sú 1.11912, -1.04575 a $-0.036684 \pm 1.00124i$. Charakteristický polynóm zložky kľzavých priemerov má tvar

$$(3.66) \theta_4(B) = 1 + 0.541371B + 0.300400B^2 - 0.685483B^4$$

a tieto korene: 1.35028, -1.02641 a $-0.161935 \pm 1.0131i$. Je jasné, že všetky ležia mimo jednotkového kruhu. Proces (3.64) je stacionárny aj invertovateľný. Tabuľka 3.32 udáva hodnoty testovacích štatistík a p-hodnoty testov radu inovácií modelu.

Tabuľka 3.31 Štatistické vlastnosti parametrov modelu M_{HP} a miery presnosti predikcie

<i>Premenná</i>	<i>Koeficient</i>	<i>Štandardná chyba</i>	<i>t-štatistika</i>	<i>p-hodnota</i>
ϕ_1	-0.135778	0.043015	-3.156555	0.0040
ϕ_2	-0.146305	0.051359	-2.848667	0.0085
ϕ_4	0.851210	0.059598	14.28263	0.0000
θ_1	0.541371	0.178490	3.033056	0.0054
θ_2	0.300400	0.100483	2.989545	0.0060
θ_4	-0.685483	0.097608	-7.022811	0.0000
<i>Parameter</i>	<i>Hodnota</i>	<i>Miera presnosti</i>		<i>Hodnota</i>
Koeficient determinácie	0.869313	Odmocnina priemernej		4.894873
Adjustovaný koef. determinácie	0.844181	štvorcovej chyby		
Štandardná chyba regresie	2.353118	Priemerná absolútna chyba		3.954207
Súčet štvorcov rezíduí	143.9663	Priemerná absolútna		1.057756
Logaritmickej vierohodnosť	-69.46752	percentuálna chyba		
Akaikeho informačné kritérium	4.716720	Koeficient Theilovej nerovnosti		0.612444

Tabuľka 3.32 Výsledky testov radu rezíduí modelu M_{HP}

<i>Test</i>	<i>Hodnota testovacej štatistiky</i>	<i>p-hodnota</i>
LM test seriálovej korelácie	0.345034	0.844579
ARCH LM test	1.627846	0.803779
Test strednej hodnoty $\mu = 0$	0.187454	0.852564
Jarqueov-Berov test	0.700844	0.704391

III.5.2 Rad LHP

Podobne ako trend v rade H , aj trend získaný Hodrickovým-Prescottovým filtrom z radu LH budeme modelovať autoregresnou funkciou tretieho rádu v tvare

$$(3.67) \quad Tr_{LHP,t} = 0.004623 + 2.894149Tr_{LHP,t-1} - 2.828522Tr_{LHP,t-2} + 0.933488Tr_{LHP,t-3}$$

Štatistické vlastnosti trendu sú uvedené v tabuľke 3.33 a štatistické vlastnosti modelu sú v tabuľke 3.34. Vidíme, že autoregresná funkcia (3.67) dosahuje takisto vysokú mieru presnosti vyrovnania.

Na obrázku 3.8. je zobrazený priebeh trendu získaného Hodrickovym-Precottovym filtrom z radu logaritmov HDP Slovenska ako aj radu rezíduí po odstránení trendu. Podobne, v rade rezíduí *LHP*, ktorého základné štatistické charakteristiky sú uvedené v tabuľke 3.35, Jarqueho-Berova štatistika umožňuje nezamietnuť hypotézu, že rad rezíduí má normálne rozdelenie. Ľahko sa ukáže, že stredná hodnota rezíduí je nulová. Rozšírený Dickeyov-Fullerov test jednotkového koreňa nám udáva, že rad rezíduí je typu $I(0)$. PACF identifikuje rád autoregresnej zložky $p=4$ a ACF identifikuje rád zložky kľzavých priemerov $q=4$, ako aj sezónnosť $s=4$ a rád sezónnych kľzavých priemerov $Q=4$.

Hodnoty prvých šesnástich ACF a PACF radu sú v tabuľke 3.36. Aj v tomto rade rezíduí p -hodnota Ljungovej-Boxovej Q -štatistiky (0.823) vedie k nezamietnutiu hypotézy, že v diferencovanom rade nie je autokorelácia po prvý rád, nebudeme brať do úvahy tie modely, v ktorých je rád autoregresie rovný $p=1$.

Na základe štatistických vlastností pre rad rezíduí *LHP* identifikujeme model M_{LHP} opätovne ako ARMA (4,3) v tvare

$$(3.68) \quad y_t = Tr_{LHP,t} + r_t$$

kde predikcia Hodrickovho-Precottovho trendu je daná vzťahom (3.67) a rezíduá vyhovujú modelu

$$(3.69) \quad \begin{aligned} r_t = & -0.124453r_{t-1} - 0.143114r_{t-2} + 0.818064r_{t-4} \\ & + E_t + 0.515990E_{t-1} + 0.299832 - 0.713446E_{t-4} \end{aligned}$$

Aj v tomto prípade Hodrickov-Precottov filter odfiltroval sezónnu zložku. Štatistické vlastnosti koeficientov modelu M_{LHP} sú uvedené v tabuľke 3.37.

Tabuľka 3.33 Základné štatistické charakteristiky Hodrickovho-Prescottovho trendu v rade LH

<i>Charakteristika</i>	<i>Hodnota</i>
Stredná hodnota	5.037209
Medián	5.055519
Maximum	5.192489
Minimum	4.827775
Štandardná odchýlka	0.110170
Šikmosť	-0.358414
Strmosť	1.899961
Jarqueova-Berova štatistika	2.585893
P-hodnota JB štatistiky	0.274461

Tabuľka 3.34 Štatistické vlastnosti parametrov modelu AR(3) v HP-trende radu LH

<i>Premenná</i>	<i>Koeficient</i>	<i>Štandardná chyba</i>	<i>t-štatistika</i>	<i>p-hodnota</i>
ϕ_0	5.503692	0.025027	219.9081	0.0000
ϕ_1	2.894194	0.023522	123.0395	0.0000
ϕ_2	-2.828522	0.043970	-64.32831	0.0000
ϕ_3	0.933488	0.020826	44.82326	0.0000

<i>Parameter</i>	<i>Hodnota</i>	<i>Miera presnosti</i>	<i>Hodnota</i>
Koeficient determinácie	1.000000	Odmocnina priemernej	0.000401
Adjustovaný koef. determinácie	1.000000	štvorcovej chyby	
Štandardná chyba regresie	1.75E-05	Priemerná absolútna chyba	0.000336
Súčet štvorcov rezíduí	8.89E-09	Priemerná absolútna	0.000066
Logaritická vierohodnosť	316.7453	percentuálna chyba	
Akaikeho informačné kritérium	-18.95426	Koeficient Theilovej nerovnosti	3.96E-05

Tabuľka 3.35 Základné štatistické charakteristiky radu rezíduí LHP

<i>Charakteristika</i>	<i>Hodnota</i>
Stredná hodnota	-5.53E-13
Medián	0.009814
Maximum	0.062083
Minimum	-0.068585
Štandardná odchýlka	0.036433
Šikmosť	-0.375232
Strmosť	2.038801
ADF test (5% kritická hodnota testu)	-8.6152931 (-1.9510)
Jarqueova-Berova štatistika	2.230652
P-hodnota JB štatistiky	0.327808

Tabuľka 3.36 Hodnoty autokorelačnej funkcie a parciálnej autokorelačnej funkcie radu LHP

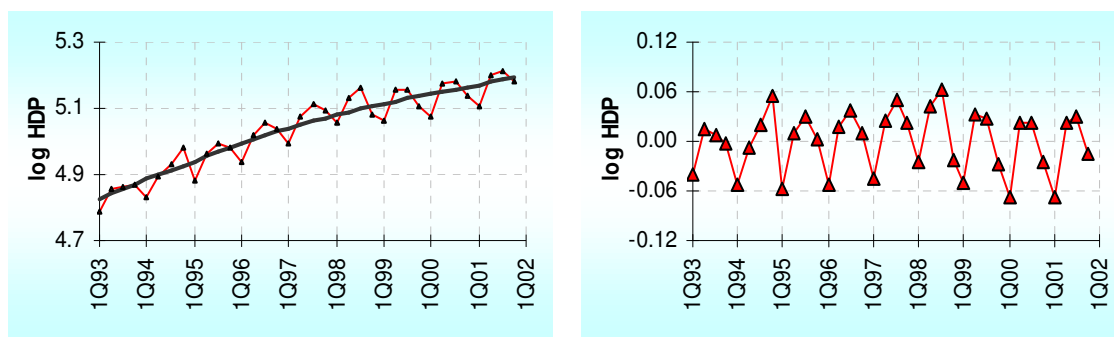
<i>Posunutie</i>	1	2	3	4	5	6	7	8
ACF	-0.036	-0.617	0.008	0.773	-0.119	-0.574	0.009	0.618
PACF	-0.036	-0.619	-0.081	0.631	-0.157	-0.029	-0.163	-0.004
<i>Posunutie</i>	9	10	11	12	13	14	15	16
ACF	-0.209	-0.529	0.090	0.507	-0.240	-0.386	0.147	0.362
PACF	-0.229	-0.084	0.039	-0.074	-0.003	0.129	-0.054	-0.169

Tabuľka 3.37 Štatistické vlastnosti parametrov modelu M_{LHP} a miery presnosti predikcie

<i>Premenná</i>	<i>Koeficient</i>	<i>Štandardná chyba</i>	<i>t-štatistika</i>	<i>p-hodnota</i>
ϕ_1	-0.124453	0.040376	-3.082326	0.0048
ϕ_2	-0.143114	0.049604	-2.885156	0.0078
ϕ_4	0.818064	0.056313	14.52721	0.0000
θ_1	0.515990	0.187903	2.746041	0.0108
θ_2	0.299832	0.090990	3.295230	0.0028
θ_4	-0.713446	0.111709	-6.386658	0.0000
<i>Parameter</i>	<i>Hodnota</i>	<i>Miera presnosti</i>	<i>Hodnota</i>	
Koeficient determinácie	0.874255	Odmocnina priemernej	0.029295	
Adjustovaný koef. determinácie	0.850073	štvorcovej chyby		
Štandardná chyba regresie	0.014679	Priemerná absolútna chyba	0.023535	
Súčet štvorcov rezíduí	0.005602	Priemerná absolútna	0.881213	
Logaritmická vierohodnosť	92.99887	percentuálna chyba		
Akaikeho informačné kritérium	-5.437429	Koeficient Theilovej nerovnosti	0.558661	

Tabuľka 3.38 Výsledky testov radu rezíduí modelu M_{LHP}

<i>Test</i>	<i>Hodnota testovacej štatistiky</i>	<i>p-hodnota</i>
LM test seriálovej korelácie	0.560256	0.693871
ARCH LM test	0.331432	0.853946
Test strednej hodnoty $\mu = 0$	0.461068	0.647330
Jarqueov-Berov test	0.388087	0.823622



a)

b)

Obrázok 3.8.

a) *Priebeh Hodrickovho-Prescottovho trendu v časovom rade logaritmov HDP Slovenska 1993-2001.*

b) *Priebeh časového radu rezíduí po odstránení Hodrickovho-Prescottovho trendu. Údaje sú v logaritmoch miliárd SKK v stálych cenách z roku 1995.*

Charakteristický polynóm autoregresnej zložky modelu (3.69) je

$$(3.70) \phi_4(B) = 1 + 0.124453B + 0.143114B^2 - 0.818064B^4$$

a jeho korene sú 1.12754, -1.05895 a $-0.034298 \pm 1.01124i$. Charakteristický polynóm zložky kľzavých priemerov modelu má tvar

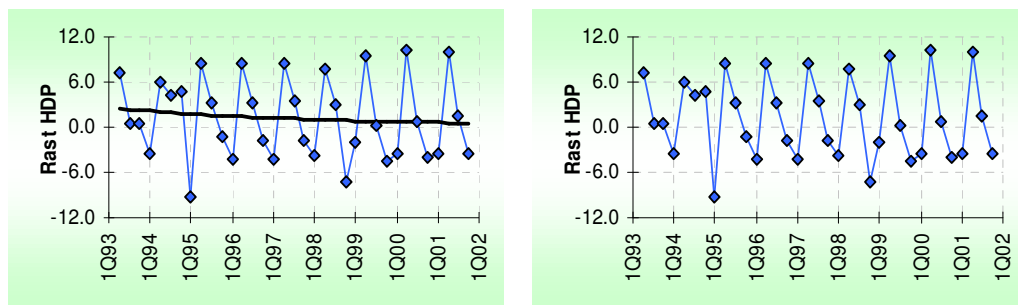
$$(3.71) \theta_4(B) = 1 + 0.515990B + 0.299832B^3 - 0.713446B^4$$

a má tieto korene: 1.32707, -1.02453 a $-0.151271 \pm 1.004i$. Je jasné, že všetky ležia mimo jednotkového kruhu. Proces (3.69) je stacionárny aj invertovateľný. Tabuľka 3.38 udáva hodnoty testovacích štatistík a p-hodnoty testov radu inovácií modelu.

III.5.3 Rad *RHP*

Nakoniec aj trend získaný Hodrickovým-Prescottovým filtrom z radu *RH* budeme modelovať autoregresnou funkciou tretieho rádu v tvare

$$(3.72) Tr_{RHP,t} = 2.328893Tr_{RHP,t-1} - 1.916242Tr_{RHP,t-2} + 0.577180Tr_{RHP,t-3}.$$



a)

b)

Obrázok 3.9.

a) Priebeh Hodrickovho-Prescottovho trendu v časovom rade tempa rastu HDP Slovenska 1993-2001.

b) Priebeh časového radu rezíduí po odstránení Hodrickovho-Prescottovho trendu. Údaje sú v percentách.

Štatistické vlastnosti trendu sú uvedené v tabuľke 3.39 a štatistické vlastnosti modelu sú v tabuľke 3.40. Vidíme, že autoregresná funkcia (3.72) dosahuje takisto vysokú mieru presnosti vyrovnania.

Na obrázku 3.9 je zobrazený priebeh trendu v časovom rade tempa rastu HDP Slovenska získaného Hodrickovým-Prescottovým filtrom ako aj rad rezíduí po odstránení trendu. Podobne, v rade rezíduí RHP , ktorého základné štatistické charakteristiky sú uvedené v tabuľke 3.41, Jarqueho-Berova štatistika umožňuje nezamietnuť hypotézu, že rad rezíduí má normálne rozdelenie. Ľahko sa ukáže, že stredná hodnota rezíduí je nulová. Rozšírený Dickeyov-Fullerov test jednotkového koreňa nám udáva, že rad rezíduí je typu $I(0)$. PACF identifikuje rád autoregresnej zložky $p=3$ a ACF identifikuje rád zložky kľzavých priemerov $q=4$, ako aj sezónnosť $s=4$ a rád sezónnych kľzavých priemerov $Q=4$. Hodnoty prvých šestnástich ACF a PACF radu sú v tabuľke 3.42. Aj v tomto rade rezíduí p-hodnota Ljungovej-Boxovej Q-štatistiky (0.231) vedie k nezamietnutiu hypotézy, že v diferencovanom rade nie je autokorelácia po prvý rád, nebudeme brať do úvahy tie modely, v ktorých je rád autoregresie rovný $p=1$.

Tabuľka 3.39 Základné štatistické charakteristiky Hodrickovho-Prescottovho trendu v rade *RH*

<i>Charakteristika</i>	<i>Hodnota</i>
Stredná hodnota	1.260912
Medián	1.140200
Maximum	2.452277
Minimum	0.536095
Štandardná odchýlka	0.566347
Šikmosť	0.563174
Strmosť	2.134428
Jarqueova-Berova štatistika	2.942732
P-hodnota JB štatistiky	0.229612

Tabuľka 3.40 Štatistické vlastnosti parametrov modelu *AR(3)* v HP-trende radu *RH*

<i>Premenná</i>	<i>Koeficient</i>	<i>Štandardná chyba</i>	<i>t-štatistika</i>	<i>p-hodnota</i>
ϕ_1	2.328893	0.165826	14.04415	0.0000
ϕ_2	-1.916242	0.314256	-6.097710	0.0000
ϕ_3	0.577180	0.164383	3.511182	0.0015

<i>Parameter</i>	<i>Hodnota</i>	<i>Miera presnosti</i>	<i>Hodnota</i>
Koeficient determinácie	0.999985	Odmocnina priemernej	0.010808
Adjustovaný koef. determinácie	0.999984	štvorcovej chyby	
Štandardná chyba regresie	0.001906	Priemerná absolútna chyba	0.007923
Súčet štvorcov rezíduí	0.000105	Priemerná absolútna	0.010317
Logaritmickej vierohodnosť	156.5834	percentuálna chyba	
Akaikeho informačné kritérium	-18.79039	Koeficient Theilovej nerovnosti	0.004325

Na základe štatistických vlastností pre rad rezíduí *RHP* identifikujeme model M_{RHP} ako SARIMA (3,0,4)×(0,0,1)₄ v tvare

$$(3.73) \quad g_t = Tr_{RHP,t} + h_t$$

kde predikcia Hodrickovho-Prescottovho trendu je daná vzťahom (3.72) a rezíduá vyhovujú modelu

$$(3.74) \quad h_t = -0.808031h_{t-1} - 0.602792h_{t-2} - 0.662096h_{t-3} \\ + E_t - 0.871068E_{t-2} + 0.825063E_{t-4} - 0.811467E_{t-6} + 0.099226E_{t-8}$$

Ako vidíme, v tomto prípade Hodrickov-Prescottov filter neodfiltroval sezónnu zložku. Štatistické vlastnosti koeficientov modelu M_{RHP} sú uvedené v tabuľke 3.43.

Charakteristický polynóm autoregresnej zložky modelu (3.74) je

$$(3.75) \quad \phi_3(B) = 1 + 0.808031B + 0.602792B^2 + 0.662096B^3$$

a jeho korene sú $-0.017941 \pm 1.044871i$ a -1.233369 . Charakteristický polynóm zložky kĺzavých priemerov má tvar

$$(3.76) \quad \theta_8 = 1 - 0.871068B^2 + 0.825063B^4 - 0.811467B^6 - 0.099226B^8$$

a má tieto korene: ± 1.01027 , $\pm 3.03292i$, a $\pm 0.719748 \pm 0.719748i$. Je jasné, že všetky ležia mimo jednotkového kruhu. Proces (3.74) je stacionárny aj invertovateľný. Tabuľka 3.44 udáva hodnoty testovacích štatistík a p-hodnoty niektorých testov radu inovácií.

Tabuľka 3.41 **Základné štatistické charakteristiky radu rezíduí RHP**

<i>Charakteristika</i>	<i>Hodnota</i>
Stredná hodnota	-8.54E-14
Medián	-0.615833
Maximum	9.547197
Minimum	-11.04925
Štandardná odchýlka	5.332424
Šikmosť	0.175087
Strmosť	2.167738
ADF test (5% kritická hodnota testu)	-9.694476 (-1.9514)
Jarqueova-Berova štatistika	1.188952
P-hodnota JB štatistiky	0.551852

Tabuľka 3.42 Hodnoty autokorelačnej funkcie a parciálnej autokorelačnej funkcie radu RHP

Posunutie	1	2	3	4	5	6	7	8
ACF	-0.194	-0.596	-0.095	0.803	-0.194	-0.497	-0.016	0.668
PACF	-0.194	-0.659	-0.763	0.159	-0.215	-0.094	-0.118	0.024
Posunutie	9	10	11	12	13	14	15	16
ACF	-0.215	-0.450	0.067	0.553	-0.251	-0.325	0.122	0.397
PACF	-0.041	-0.149	-0.092	-0.164	-0.317	-0.104	-0.092	-0.182

Tabuľka 3.43 Štatistické vlastnosti parametrov modelu M_{RHP} a miery presnosti predikcie

Premenná	Koeficient	Štandardná chyba	t-štatistika	p-hodnota
ϕ_1	-0.808031	0.087622	-9.221765	0.0000
ϕ_2	-0.602792	0.140001	-4.305620	0.0002
ϕ_3	-0.662096	0.097288	-6.805548	0.0000
θ_2	-0.871068	0.000416	-2091.634	0.0000
θ_4	-0.106514	0.030166	-3.530956	0.0016
Θ_1	0.931577	0.049945	18.65193	0.0000
Parameter	Hodnota	Miera presnosti	Hodnota	
Koeficient determinácie	0.919568	Odmocnina priemernej	5.147445	
Adjustovaný koef. determinácie	0.904101	štvorcovej chyby		
Štandardná chyba regresie	1.703801	Priemerná absolútna chyba	4.431145	
Súčet štvorcov rezíduí	75.47637	Priemerná absolútna	0.987690	
Logaritmickej vierohodnosť	-59.13537	percentuálna chyba		
Akaikeho informačné kritérium	4.070961	Koeficient Theilovej nerovnosti	0.845568	

Tabuľka 3.44 Výsledky testov radu rezíduí modelu M_{RHP}

Test	Hodnota testovacej štatistiky	p-hodnota
LM test seriálovej korelácie	1.140048	0.384645
ARCH LM test	0.484002	0.849099
Test strednej hodnoty $\mu = 0$	-1.505539	0.142354
Jarqueov-Berov test	0.679042	0.712112

III.6 Testovanie modelov (predikcia ex-post)

V tejto časti budeme testovať identifikované modely na údajoch pozorovaných v roku 2002, pričom použijeme dva spôsoby testovania – dynamickú predikciu ex-post, v ktorej sa údaje pre štyri štvrťroky roku 2002 namodelujú z údajov rokov 1993 až 2001, a adjustovanú statickú predikciu ex-post, v ktorej sa predikcie na jednotlivé štvrťroky 2002 namodelujú aj z nameraných údajov až po štvrťrok pred modelovaným. Je zaujímavé, že modelované hodnoty sú značne konzervatívne, modely nedokázali predikovať zvýšenú dynamiku tempa rastu HDP Slovenska v roku 2002.

III.6.1 Modelovanie hrubého domáceho produktu

V tejto časti otestujeme oboma spôsobmi modely M_H , M_{HT} a M_{HP} . Výsledky modelovania sú uvedené v tabuľkách 3.45 až 3.47. Tabuľky okrem nameraných a predikovaných hodnôt HDP pre jednotlivé štvrťroky roku 2002 udávajú aj 95% percentný interval spoľahlivosti jednotlivých predikcií, ako aj štyri základné miery presnosti, pomocou ktorých ohodnotíme výsledky predikcie. Grafické zobrazenie modelovaných údajov je na obrázku 3.10.

Porovnaním kritérií, najmä odmocniny priemernej štvorcovej chyby a priemernej absolútnej chyby zisťujeme, že model M_H má najlepšie štatistické vlastnosti. Všetky štyri namerané hodnoty HDP ležia v 95% intervale spoľahlivosti príslušných modelovaných údajov. Podobne, aj model M_{HP} má hodnoty porovnávacích kritérií zrovnateľné s hodnotami modelu M_H , no v dynamickej predikcii už nameraná hodnota zo štvrtého štvrťroku leží mimo namodelovaný interval spoľahlivosti. Najhoršie dopadol model M_{HT} , ktorého porovnávacie kritériá sú viac než dvojnásobne horšie, než pri predchádzajúcich modeloch. Navyše, s výnimkou prvého štvrťroku, sa modelované údaje značne rozchádzajú z nameranými.

Tabuľka 3.45 Výsledky modelovania HDP modelom M_H

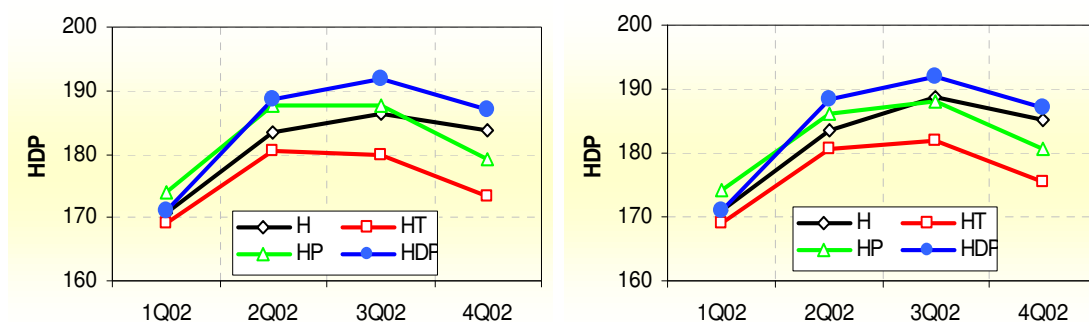
Štvrťrok	Nameraná hodnota	Dynamická predikcia		Adjustovaná statická predikcia	
		HDP	95% interval spoľahlivosti	HDP	95% interval spoľahlivosti
2002:1	171.1	170.9	(165.8, 176.0)	170.9	(164.1, 177.7)
2002:2	188.5	183.6	(178.1, 189.1)	183.7	(177.1, 190.2)
2002:3	191.8	186.5	(181.0, 192.0)	188.6	(181.7, 195.4)
2002:4	187.0	183.8	(178.2, 189.3)	185.2	(178.2, 192.1)
<i>Miera presnosti</i>					
Odmocnina priemernej štvorcovej chyby		3.975569		3.056245	
Priemerná absolútna chyba		3.426386		2.528291	
Priemerná absolútna percentuálna chyba		0.018118		0.013386	
Koeficient Theilovej nerovnosti		0.021931		0.008328	

Údaje v miliardiach SKK v stálych cenách z roku 1995.

Tabuľka 3.46 Výsledky modelovania HDP modelom M_{HT}

Štvrťrok	Nameraná hodnota	Dynamická predikcia		Adjustovaná statická predikcia	
		HDP	95% interval spoľahlivosti	HDP	95% interval spoľahlivosti
2002:1	171.1	169.0	(164.0, 174.1)	169.0	(164.3, 173.7)
2002:2	188.5	180.4	(174.9, 185.9)	180.8	(176.3, 185.3)
2002:3	191.8	179.9	(174.4, 185.4)	181.8	(176.9, 186.6)
2002:4	187.0	173.2	(167.7, 178.8)	175.6	(170.4, 180.7)
<i>Miera presnosti</i>					
Odmocnina priemernej štvorcovej chyby		10.02206		8.613000	
Priemerná absolútna chyba		8.961216		7.830533	
Priemerná absolútna percentuálna chyba		0.047692		0.041711	
Koeficient Theilovej nerovnosti		0.027802		0.023818	

Údaje v miliardiach SKK v stálych cenách z roku 1995.



a)

b)

Obrázok 3.10. Predikcia hodnoty HDP Slovenska na rok 2002 získaná modelmi M_H , M_{HT} a M_{HP} dynamickou predikciou (a) a adjustovanou statickou predikciou (b). Údaje sú v miliardách SKK v stálych cenách z roku 1995.

Tabuľka 3.47 Výsledky modelovania HDP modelom M_{HP}

Štvrťrok	Nameraná hodnota	Dynamická predikcia		Adjustovaná statická predikcia	
		HDP	95% interval spoľahlivosti	HDP	95% interval spoľahlivosti
2002:1	171.1	174.1	(169.4, 178.7)	174.1	(169.2, 179.0)
2002:2	188.5	187.5	(182.5, 192.5)	186.2	(181.5, 191.0)
2002:3	191.8	187.7	(182.7, 192.8)	188.2	(183.5, 192.9)
2002:4	187.0	179.0	(174.0, 184.1)	180.5	(175.5, 185.6)
<i>Miera presnosti</i>					
Odmocnina priemernej štvorcovej chyby		4.736755		4.158468	
Priemerná absolútna chyba		4.003920		3.835876	
Priemerná absolútna percentuálna chyba		0.021636		0.020739	
Koeficient Theilovej nerovnosti		0.026000		0.022255	

Údaje v miliardách SKK v stálych cenách z roku 1995.

III.6.2 Modelovanie logaritmu hrubého domáceho produktu

V tejto časti otestujeme oboma spôsobmi modely M_{LH} , M_{LHT} a M_{LHP} . Pomocou týchto modelov sme získali predikcie logaritmizovaného HDP. Výsledky modelovania sú v tabuľkách 3.48 až 3.50. Tabuľky okrem logaritmov hodnôt

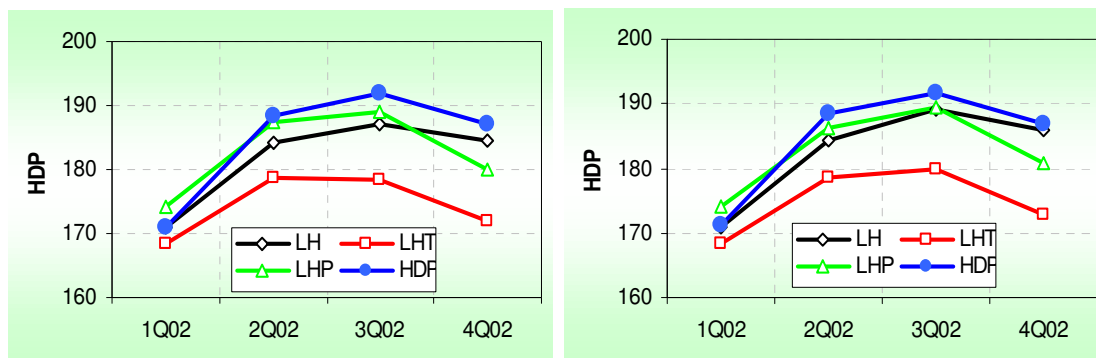
reálneho HDP a predikovaných hodnôt obsahujú pre porovnanie aj hodnoty HDP zodpovedajúce predikovaným logaritmom a príslušné miery presnosti pre oba údaje, modelované i transformované. Transformované údaje sú pre oba typy predikcie zobrazené na obrázku 3.11.

Podobne, ako pri predikcii modelmi HDP, aj pri modeloch logaritmovaného HDP, najlepšie parametre má model nedetrendovaných údajov M_{LH} a najhoršie model obsahujúci kvadratický trend M_{LHT} . Je zaujímavé, že kým miery presnosti predikcie HDP pomocou exponenciálnej transformácie predikcie logaritmizovaných údajov sú pre modely M_{LH} a M_{LHP} lepšie než miery presnosti predikcie pomocou modelov M_H a M_{HP} , pre rad M_{LHT} sú horšie než pre rad M_{HT} .

Tabuľka 3.48 Výsledky modelovania HDP modelom M_{LH}

Štvrťrok	Logaritmus nameranej hodnoty (HDP)	Dynamická predikcia		Adjustovaná statická predikcia	
		ln HDP (HDP)	95% interval spoľahlivosti	ln HDP (HDP)	95% interval spoľahlivosti
2002:1	5.1422 (171.1)	5.1410 (170.9)	(5.109, 5.173)	5.1410 (170.9)	(5.099, 5.183)
2002:2	5.2391 (188.5)	5.2155 (184.1)	(5.180, 5.251)	5.2160 (184.2)	(5.175, 5.257)
2002:3	5.2565 (191.8)	5.2314 (187.0)	(5.196, 5.267)	5.2418 (189.0)	(5.199, 5.284)
2002:4	5.2311 (187.0)	5.2175 (184.5)	(5.182, 5.253)	5.2251 (185.9)	(5.182, 5.267)
<i>Miera presnosti</i>					
Odmocnina priemernej štvorcovej chyby		0.018548 (3.480142)		0.014008 (2.625667)	
Priemerná absolútna chyba		0.015914 (2.977373)		0.011253 (2.106972)	
Priemerná absolútna percentuálna chyba		0.003036 (0.015743)		0.002147 (0.011155)	
Koeficient Theilovej nerovnosti		9.76E-05 (0.019150)		7.37E-05 (0.013978)	

Údaje v logaritmoch miliárd SKK v stálych cenách z roku 1995, v zátvorke v miliárdach SKK.



a)

b)

Obrázok 3.11. Predikcia hodnoty HDP Slovenska na rok 2002 získaná modelmi M_{LH} , M_{LHT} a M_{LHP} dynamickou predikciou (a) a adjustovanou statickou predikciou (b). Údaje sú v miliardách SKK v stálych cenách z roku 1995.

Tabuľka 3.49 Výsledky modelovania HDP modelom M_{LHT}

Štvrťrok	Logaritmus nameranej hodnoty (HDP)	Dynamická predikcia		Adjustovaná statická predikcia	
		ln HDP (HDP)	95% interval spoľahlivosti	ln HDP (HDP)	95% interval spoľahlivosti
2002:1	5.1422 (171.1)	5.1257 (168.3)	(5.097, 5.155)	5.1257 (168.3)	(5.097, 5.156)
2002:2	5.2391 (188.5)	5.1866 (178.9)	(5.155, 5.218)	5.1857 (178.7)	(5.152, 5.220)
2002:3	5.2565 (191.8)	5.1839 (178.4)	(5.153, 5.215)	5.1927 (179.9)	(5.151, 5.234)
2002:4	5.2311 (187.0)	5.1462 (171.8)	(5.113, 5.179)	5.1518 (172.7)	(5.098, 5.205)
<i>Miera presnosti</i>					
Odmocnina priemernej štvorcovej chyby		0.062256 (11.32171)		0.058056 (10.57905)	
Priemerná absolútna chyba		0.056625 (10.27322)		0.053256 (9.679233)	
Priemerná absolútna percentuálna chyba		0.010818 (0.054734)		0.010176 (0.051608)	
Koeficient Theilovej nerovnosti		0.000328 (0.064924)		0.000306 (0.060457)	

Údaje v logaritmoch miliárd SKK v stálych cenách z roku 1995, v zátvorke v miliardách SKK.

Tabuľka 3.50 Výsledky modelovania HDP modelom M_{LHP}

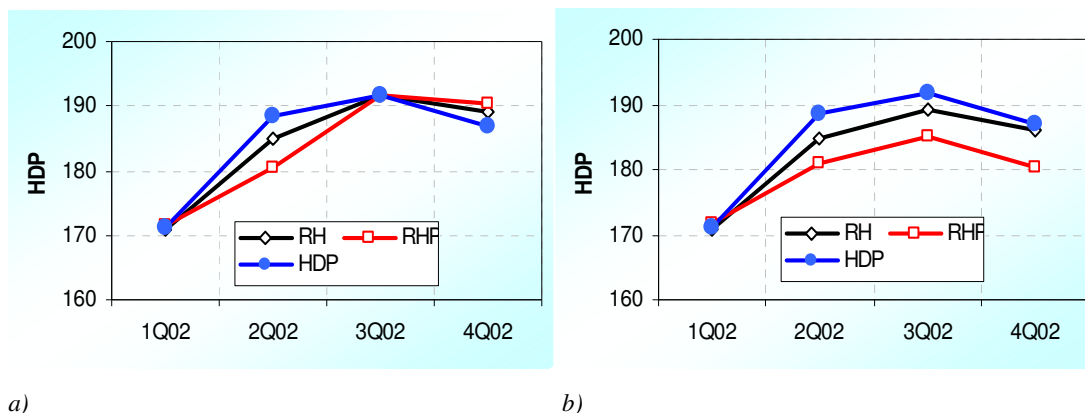
Štvrťrok	Logaritmus nameranej	Dynamická predikcia		Adjustovaná statická predikcia	
	hodnoty (HDP)	ln HDP (HDP)	95% interval spoľahlivosti	ln HDP (HDP)	95% interval spoľahlivosti
2002:1	5.1422 (171.1)	5.1595 (174.1)	(5.130, 5.184)	5.1595 (174.1)	(5.129, 5.190)
2002:2	5.2391 (188.5)	5.2338 (187.5)	(5.202, 5.265)	5.2271 (186.2)	(5.198, 5.257)
2002:3	5.2565 (191.8)	5.2414 (188.9)	(5.210, 5.273)	5.2434 (189.3)	(5.214, 5.273)
2002:4	5.2311 (187.0)	5.1926 (179.9)	(5.161, 5.224)	5.1970 (180.7)	(5.167, 5.227)
<i>Miera presnosti</i>					
Odmocnina priemernej štvorcovej chyby		0.022566 (4.123856)		0.021094 (3.859349)	
Priemerná absolútna chyba		0.019031 (3.476341)		0.019132 (3.501163)	
Priemerná absolútna percentuálna chyba		0.003648 (0.018854)		0.003668 (0.018986)	
Koeficient Theilovej nerovnosti		0.000119 (0.011295)		0.000111 (0.010571)	

Údaje v logaritmoch miliárd SKK v stálych cenách z roku 1995, v zátvorke v miliárdach SKK.

III.6.3 Modelovanie tempa rastu HDP

V tabuľkách 3.51 a 3.52 sú uvedené výsledky testovania modelov M_{RH} a M_{RHP} oboma typmi predikcie. Podobne, ako pri modelovaní logaritmizovaného HDP, aj v týchto tabuľkách sú okrem modelovaných údajov uvedené aj zodpovedajúce údaje HDP. Transformované výsledky modelovania získané oboma typmi predikcie sú zobrazené na obrázku 3.12.

Aj v tomto prípade miery presnosti predikcie sú lepšie v modeli M_{RH} než v modeli M_{LHP} , no v tomto prípade je druhý model podstatne horší. Navyše, ukazuje sa, že zo všetkých ôsmich analyzovaných modelov, model M_{RH} najlepšie predikuje hodnoty HDP v roku 2002.



Obrázok 3.12. Predikcia hodnoty HDP Slovenska na rok 2002 získaná modelmi M_{RH} , a M_{RHP} dynamickou predikciou (a) a adjustovanou statickou predikciou (b). Údaje sú v miliardách SKK v stálych cenách z roku 1995.

Tabuľka 3.51 Výsledky modelovania HDP modelom M_{RH}

Štvrťro k	Rast HDP	Dynamická predikcia		Adjustovaná statická predikcia	
	(HDP)	Rast HDP (HDP)	95% interval spoľahlivosti	Rast HDP (HDP)	95% interval spoľahlivosti
2002:1	-3.55 (171.1)	-3.70 (170.8)	(-6.82, -0.58)	-3.70 (170.8)	(-7.80, 0.40)
2002:2	10.17 (188.5)	8.11 (185.0)	(4.50, 11.71)	8.02 (184.8)	(4.01, 12.03)
2002:3	1.75 (191.8)	1.68 (191.7)	(-2.12, 5.47)	0.38 (189.2)	(-3.81, 4.57)
2002:4	-2.50 (187.0)	-1.45 (189.0)	(-5.26, 2.36)	-3.05 (185.9)	(-7.27, 1.17)
<i>Miera presnosti</i>					
	Odmocnina priemernej štvorcovej chyby	1.161916 (2.040314)		1.306804 (2.313392)	
	Priemerná absolútna chyba	0.835488 (1.489649)		1.054958 (1.895441)	
	Priemerná absolútna percentuálna chyba	0.177186 (0.007957)		0.314100 (0.01043)	
	Koeficient Theilovej nerovnosti	0.006359 (0.010753)		0.006898 (0.012286)	

Údaje v percentách, v zátvorke v miliardách SKK v stálych cenách z roku 1995.

Tabuľka 3.52 Výsledky modelovania HDP modelom M_{RHP}

Štvrťrok	Rast HDP	Dynamická predikcia		Adjustovaná statická predikcia	
	(HDP)	Rast HDP (HDP)	95% interval spoľahlivosti	Rast HDP (HDP)	95% interval spoľahlivosti
2002:1	-3.55 (171.1)	-3.27 (171.6)	(-3.31, -3.23)	-3.27 (171.6)	(-7.22, 0.69)
2002:2	10.17 (188.5)	5.42 (180.4)	(5.38, 5.46)	5.64 (180.8)	(1.94, 9.34)
2002:3	1.75 (191.8)	1.74 (191.8)	(1.69, 1.78)	-1.84 (185.0)	(-5.73, 2.05)
2002:4	-2.50 (187.0)	-0.69 (190.5)	(-0.74, -0.64)	-5.92 (180.4)	(-10.02, -1.84)
<i>Miera presnosti</i>					
Odmocnina priemernej štvorcovej chyby		2.548076 (4.430528)		3.359078 (6.103130)	
Priemerná absolútna chyba		1.716441 (3.035776)		2.954430 (5.392595)	
Priemerná absolútna percentuálna chyba		0.320069 (0.016209)		0.986484 (0.028591)	
Koeficient Theilovej nerovnosti		0.013549 (0.024113)		0.017747 (0.033996)	

Údaje v percentách, v zátvorke v miliardách SKK v stálych cenách z roku 1995.

III.7 Porovnanie modelov špecifikovaných Boxovou-Jenkinsovou metodológiou

Na záver porovnáme schopnosti predikcie HDP Slovenska modelov, ktoré sme špecifikovali Boxovou-Jenkinsovou metodológiou. V tabuľke 3.53 sú prehľadne uvedené miery presnosti odhadu HDP získaného dynamickou predikciou a v tabuľke 3.54 sú uvedené tie isté miery presnosti získané adjustovanou statickou predikciou.

Tabuľka 3.53 Miery presnosti predikcie modelov získané dynamickou predikciou

<i>Model</i>	<i>Odmocnina priemernej štvorcovej chyby</i>	<i>Priemerná absolútna chyba</i>	<i>Priemerná absolútna percentuálna chyba</i>	<i>Koeficient Theilovej nerovnosti</i>
M_H	3.975569	3.426386	0.018118	0.021931
M_{HT}	10.02206	8.961216	0.047692	0.027802
M_{HP}	4.736775	4.003920	0.021636	0.026000
M_{LH}	3.480142	2.977373	0.015743	0.019150
M_{LHT}	11.32171	10.27322	0.054734	0.064924
M_{LHP}	4.123856	3.476341	0.018854	0.011295
M_{RH}	2.040314	1.489649	0.007957	0.010753
M_{RHP}	4.430528	3.035776	0.016209	0.024113

Tabuľka 3.54 Miery presnosti predikcie modelov získané adjustovanou statickou predikciou

<i>Model</i>	<i>Odmocnina priemernej štvorcovej chyby</i>	<i>Priemerná absolútna chyba</i>	<i>Priemerná absolútna percentuálna chyba</i>	<i>Koeficient Theilovej nerovnosti</i>
M_H	3.056245	2.528291	0.013386	0.008328
M_{HT}	8.613000	7.830533	0.041711	0.023818
M_{HP}	4.158468	3.835876	0.020739	0.022255
M_{LH}	2.625667	2.106972	0.011155	0.013978
M_{LHT}	10.57905	9.679233	0.051608	0.060457
M_{LHP}	3.859349	3.501163	0.018986	0.010571
M_{RH}	2.313392	1.895441	0.010430	0.012286
M_{RHP}	6.103130	5.392595	0.028591	0.033996

Z oboch tabuliek vidíme, že najhoršie vlastnosti majú modely identifikované v časových radoch s odstráneným kvadratickým trendom, u ktorých odmocnina priemernej štvorcovej chyby sa pohybuje v rozpätí 8.613 až 11.322 mld SKK, priemerná absolútna chyba v rozpätí 7.831 až 10.273 mld SKK a priemerná absolútna percentuálna chyba od 4.17 do 5.47 percenta. Ako najlepší model z tohoto porovnania vychádza model identifikovaný v časovom rade trendu tempa rastu HDP, ktorého odmocnina priemernej štvorcovej chyby je 2.04 miliardy SKK u dynamickej predikcie a 2.313 mld SKK u adjustovanej statickej predikcie. Priemerná absolútna chyba predikcie tohoto modelu je 1.490

resp. 1.895 mld SKK a priemerná absolútna percentuálna chyba je 0.8 resp. 1.0%. Je zaujímavé, že podobne dobre obstáli aj modely identifikované v časových radoch HDP a logaritmu HDP bez odstráneného trendu, keď modely neodtrendovaných časových radoch majú lepšie predikčné schopnosti než modely radov s odstráneným trendom.

Presnosť vyrovnania nám vyjadruje koeficient Theilovej nerovnosti. Koeficient leží medzi nulou a jednotkou, pričom nula vyjadruje dokonalú vyrovnanosť. V dynamickej predikcii najlepšiu vyrovnanosť dosiahol model M_{RH} s hodnotou koeficientu 0.010753 a v adjustovanej statickej predikcii model M_{LHP} s hodnotou koeficientu 0.010571

IV. NELINEÁRNE MODELY

V tejto kapitole sa budeme zaoberať identifikáciou nelineárnych autoregresných modelov v časovom rade *RHP*. Tento časový rad sme zvolili preto, lebo v ostatných časových radoch sa nám podarilo najlepšie identifikovať nelinearitu.

Pre členy časového radu *RHP*, ktoré budeme označovať g_t^* platí

$$(4.1) \quad g_t^* = g_t - \bar{g}_t,$$

kde

$$(4.2) \quad g_t = 100 * (y_t - y_{t-1})$$

je percentuálny rast HDP (rad *HP*),

$$(4.3) \quad y_t = \ln(Y_t)$$

je (prirodzený) logaritmus hrubého domáceho produktu Y_t a \bar{g}_t je tzv. prirodzená úroveň (potenciál) rastu HDP, ktorú by mala ekonomika príslušnej krajiny dosahovať, a ktorú spravidla odhadujeme nejakým trendom. V našom prípade odhadneme trend potenciálu rastu HDP pomocou Hodrickovho-Prescottovho filtra.

IV.1 Test linearity

Centrováný stacionárny model časových radov môžeme v najvšeobecnejšom tvare zapísať ako

$$(4.4) \quad X_t = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \theta_i e_{t-i} + \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \theta_{ij} e_{t-i} e_{t-j} + \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \theta_{ijk} e_{t-i} e_{t-j} e_{t-k} + \dots,$$

kde $\{e_t, -\infty < t < \infty\}$ je ostro stacionárny proces nezávislých a identicky rozdelených náhodných premenných. Model v tvare (4.4) nazývame

Volterrovym rozvojom procesu. Je jasné, že x_t je nelineárny, ak nejaký z koeficientov vyššieho rádu $\{\theta_{ij}\}$, $\{\theta_{ijk}\}$, ..., je nenulový. V literatúre sa môžeme stretnúť s viacerými testami linearity. Niektoré z nich vychádzajú zo spektrálnej analýzy (Subra Rao a Gabr, 1980, Van Ness, 1966, Hinich 1982), kým iné (McLeod a Li, 1983) vychádzajú z autokorelačnej funkcie. My použijeme dva testy. V prvom z nich Keenan (1985) využil Tukeyovu myšlienku (1949) testu neaditivity s jedným stupňom voľnosti, založený na časovej štatistike. Keenanov test vychádza z podobnosti Volterrovho rozvoja do polynómu. Druhý test, odvodený R. S. Tsayom (1986), vychádza síce z Keenanovho, avšak je silnejší.

Oba použité testy sú založené na nasledujúcej úvahe: Predpokladajme, že napríklad koeficient θ_{ij} je nenulový. Potom táto nelinearita sa prejaví v diagnostike vyrovnaného lineárneho modelu, ak sú rezíduá vyrovnaného modelu korelované s nelineárnym (kvadratickým) členom $X_{t-i}X_{t-j}$. Tukeyov test neaditivity používa agregovanú veličinu \hat{X}_t^2 (druhú mocninu vyrovnanej hodnoty X_t uvažovaného lineárneho modelu) na získanie nelineárnych členov, s ktorými môžu byť rezíduá korelované. Táto jednoduchá idea je výhodná najmä v prípade malého počtu pozorovaní, čo nepochybne je náš prípad.

Uvažujme parciálnu realizáciu časového radu (X_1, X_2, \dots, X_n) a jej projekciu na predošlých p hodnôt. Keenan (1985) odporúča procedúru pozostávajúcu z týchto krokov:

Procedúra 4. 1.

(i) Spustiť lineárnu regresiu X_t na $\{1, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p}\}$ a pre $t=p+1, p+2, \dots, n$ vypočítať vyrovnané hodnoty $\{\hat{X}_t\}$ a rezíduá $\{\hat{e}_t\}$.

(ii) Spustiť lineárnu regresiu \hat{X}_t^2 na $\{1, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-M}\}$ a pre $t=p+1, p+2, \dots, n$ vypočítať rezíduá $\{\hat{\xi}_t\}$.

(iii) Spustiť lineárnu regresiu $\hat{e} = (\hat{e}_{p+1}, \hat{e}_{p+2}, \dots, \hat{e}_n)$ na $\hat{\xi} = (\hat{\xi}_{p+1}, \hat{\xi}_{p+2}, \dots, \hat{\xi}_n)$ a vypočítať štatistiky

$$(4.5) \quad \hat{\eta} = \hat{\eta}_0 \left(\sum_{t=p+1}^n \hat{\xi}_t^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

kde $\hat{\eta}_0$ je regresný koeficient a

$$(4.6) \quad \hat{F}_{1, n-2p-2} = \frac{\eta^2 (n-2p-2)}{\sum_{t=M+1}^n \hat{e}_t^2 - \eta^2}.$$

V uvedenej štatistike $n-2p-1$ stupňov voľnosti je spojených so sumou štvorcov rezíduí $\{\hat{e}_t\}$ a jeden stupeň voľnosti s neaditivitou. Pretože potrebné odhady sa dajú získať pri lineárnej regresii v prípade tak autoregresie ako aj kľzavých priemerov, tento test je ľahko implementovateľný. Teoretické overenie procedúry je dané nasledujúcou vetou, ktorú môžeme sformulovať (Keenan, 1985) (Dôsledok 3.1)

Veta 4. 2. Nech X_t je stacionárny invertibilný autoregresný proces rádu p s reprezentáciou

$$(4.7) \quad X_t = \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + e_t$$

kde e_t sú nezávislé náhodné premenné z rovnakého rozdelenia s nulovou strednou hodnotou, rozptylom σ_e^2 a konečným štvrtým momentom. Potom

$$(4.8) \quad \hat{F}_{1, n-2p-2} = \eta^2 \left(\left(\sum_{t=p+1}^n \hat{e}_t^2 - \eta^2 \right) / (n-2M-2) \right)^{-1} = \chi_1^2 + o_p(1).$$

Tsay (1986) rozvinul myšlienky Tukeya a Keenana a zaviedol do procedúry namiesto \hat{X}_t^2 nelineárne členy $X_{t-i}X_{t-j}$, $i, j = 1, 2, \dots, p$.

Procedúra 4. 3.

(i) Spustiť lineárnu regresiu X_t na $\{1, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p}\}$ a pre $t=p+1, p+2, \dots, n$ vypočítať rezíduá $\{\hat{e}_t\}$.

(ii) Spustiť lineárnu regresiu vektora Z_t na $\{1, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p}\}$ a pre $t=p+1, p+2, \dots, n$ vypočítať reziduálny vektor $\{\hat{\Xi}_t\}$, kde Z_t je $m = \frac{1}{2}p(p+1)$ rozmerný vektor zostrojený s diagonálnych a naddiagonálnych prvkov agregovanej matice U , kde

$$(4.9) \quad U_{ij} = \sum_{t=p+1}^n X_{t-i}X_{t-j}$$

a $\{\hat{\Xi}_t\}$ je m -rozmerný vektor rezíduí.

(iii) Spustiť lineárnu regresiu $\{\hat{e}_t\}$ na $\{\hat{\Xi}_t\}$ a vypočítať štatistiku

$$(4.10) \quad \hat{F} = \frac{\left(\sum_{t=M+1}^n \hat{\Xi}_t \hat{e}_t \right) \left(\sum_{t=M+1}^n \hat{\Xi}_t^T \hat{\Xi}_t \right)^{-1} \left(\sum_{t=M+1}^n \hat{\Xi}_t^T \hat{e}_t \right) / m}{\left(\sum_{t=M+1}^n \hat{e}_t^2 \right) / (n - p - m - 1)}.$$

Veta 4. 4. (Tsay, 1986) Nech proces X_t spĺňa predpoklady vety 4.2. Potom pre veľké n štatistika \hat{F} definovaná vzťahom (4.10) má približne F rozdelenie so stupňami voľnosti $\frac{1}{2}p(p+1)$ a $n - \frac{1}{2}p(p+3) - 1$.

Identifikujme v časovom rade RHP autoregresný model štvrtého rádu. Jeho tvar bude

$$(4.11) \quad g_t^* = -0.681303g_{t-1}^* - 0.735727g_{t-2}^* - 0.625761g_{t-3}^* + 0.252745g_{t-4}^* + E_t.$$

Štatistické vlastnosti modelu a jeho parametrov sú uvedené v tabuľke 4.1. Otestujeme, či daný proces je lineárny, pričom použijeme Tsayov test.

Najskôr analyzujeme proces (4.11) z pohľadu vety 4.4. Charakteristický polynóm procesu má tvar

$$(4.12) \phi_4 = 1 + 0.681303B + 0.735727B^2 + 0.625761B^3 - 0.252745B^4.$$

Jeho korene sú 3.5839, -1.07615 a $-0.01595 \pm 1.01272i$. Je evidentné, že všetky štyri ležia mimo jednotkového kruhu, uvedený proces je teda stacionárny. Analyzujeme rad rezíduí uvažovaného procesu. Nezávislosť rezíduí budeme testovať pomocou LM štatistiky s parametrom 4. LM štatistika nadobúda hodnotu 2.2454, čo vedie k p-hodnote 0.0955, takže, hoci aj na veľmi malej marginálnej hladine významnosti, nezamietame hypotézu, že v rade inovácií nie je seriálová závislosť až po rád 4, a teda môžeme predpokladať, že rezíduá sú nezávislé. Homoskedasticitu testujeme pomocou ARCH LM testu takisto s parametrom 4. V tomto teste je hodnota LM štatistiky rovná 1.275158 a p-hodnota rovná 0.3100, takže môžeme nezamietnuť ani hypotézu neexistencie podmienenej autoregresnej heteroskedasticity rezíduí. Empirický wavelet (pozri Gonçalves a Riedi, 2002) nám zaručil existenciu konečných momentov aspoň do rádu štyri. Ostáva nám ešte ukázať, že nezamietame hypotézu nulovej strednej hodnoty rezíduí. Test poskytuje p-hodnotu 0.9958, takže nezamietame ani túto hypotézu. Pretože p-hodnota Jarqueho-Berovho testu je 0.2703, nezamietame na hladine významnosti $\alpha = 0.05$ hypotézu, že inovácie majú normálne rozdelenie.

Vyslovíme nulovú hypotézu

H_0 : všetky koeficienty pri nelineárnych členoch Volterrovho rozvoja autoregresného procesu (4.11) sú nulové
proti alternatívnej hypotéze

H_A : opak H_0

Realizáciou procedúry 4.3 dostávame hodnotu štatistiky (4.10) $\hat{F} = 2.359442$. Zodpovedajúca kritická hodnota Fischerovho rozdelenia s parametrami 10 a 20 na hladine významnosti $\alpha = 0.05$ je rovná 2.347878, je teda nižšia, než hodnota \hat{F} štatistiky. Nulovú hypotézu H_0 môžeme na hladine významnosti $\alpha = 0.05$ zamietnuť.

Kvôli porovnaniu s nelineárnymi modelmi, ktoré budú identifikované v ďalšej časti práce, pomocou modelu (4.11) predikujeme hodnotu g_t^* v jednotlivých štvrtrokoch roku 2002. Trend je pri tom Hodrickov-Prescottov a je, samozrejme, predikovaný pomocou modelu (3.72). Súčtom predikcií trendu a produkčnej medzery dostaneme predikciu tempa rastu HDP, ktorú porovnáme s pozorovanými hodnotami. Výsledky predikcie sú v tabuľke 4.2.

Tabuľka 4.1 Štatistické vlastnosti parametrov modelu $AR(4)$ identifikovaného v rade RHP a miery presnosti predikcie

<i>Premenná</i>	<i>Koeficient</i>	<i>Štandardná chyba</i>	<i>t-štatistika</i>	<i>p-hodnota</i>
ϕ_1	-0.681303	0.174387	-3.906836	0.0006
ϕ_2	-0.735727	0.182656	-4.027949	0.0004
ϕ_3	-0.625761	0.190140	-3.291045	0.0028
ϕ_4	0.252745	0.181757	1.390567	0.1757
<i>Parameter</i>	<i>Hodnota</i>	<i>Miera presnosti</i>	<i>Hodnota</i>	
Koeficient determinácie	0.874079	Odmocnina priemernej štvorcovej chyby	2.937015	
Adjustovaný koef. determinácie	0.860088			
Štandardná chyba regresie	2.057079	Priemerná absolútna chyba	2.365300	
Súčet štvorcov rezíduí	114.2525	Priemerná absolútna chyba	0.638831	
Logaritmickej vierohodnosť	-64.20566	percentuálna chyba		
Akaikeho informačné kritérium	4.400365	Koeficient Theilovej nerovnosti	0.332837	

Tabuľka 4.2 Výsledky modelovania HDP modelom AR(4)

Štvrťrok	Rast HDP	Dynamická predikcia		Adjustovaná statická predikcia	
	(HDP)	Rast HDP (HDP)	95% interval spoľahlivosti	Rast HDP (HDP)	95% interval spoľahlivosti
2002:1	-3.55 (171.1)	-4.35 (169.7)	(-8.39, -0.31)	-4.35 (169.7)	(-8.39, -0.31)
2002:2	10.17 (188.5)	8.63 (184.3)	(3.75, 13.51)	8.09 (184.9)	(2.86, 12.63)
2002:3	1.75 (191.8)	1.23 (186.6)	(-3.78, 6.23)	-0.41 (187.7)	(-5.44, 3.24)
2002:4	-2.50 (187.0)	-4.10 (178.9)	(-9.11, 0.91)	-6.09 (180.1)	(-12.07, -2.04)
<i>Miera presnosti</i>					
Odmocnina priemernej štvorcovej chyby		1.206632 (5.279674)		2.371118 (4.431189)	
Priemerná absolútna chyba		1.114017 (4.715251)		2.156777 (3.982237)	
Priemerná absolútna percentuálna chyba		0.328061 (0.025173)		0.773938 (0.021297)	
Koeficient Theilovej nerovnosti		0.110876 (0.014474)		0.213426 (0.012123)	

Údaje v percentách, v zátvorke v miliardách SKK v stálych cenách z roku 1995 .

IV.2 Nelineárne modely

V tejto kapitole sa budeme zaoberať troma typmi modelov, ktoré sa najčastejšie používajú v nelineárnom modelovaní najmä produkcie a nezamestnanosti. Ich základom je myšlienka, že uvažovaný proces prebieha v rôznych režimoch (zodpovedajúcich napríklad jednotlivým fázam hospodárskeho cyklu), pričom v rôznych režimoch ho môžeme modelovať rôznymi lineárnymi autoregresnými modelmi. Všetky tri, samozrejme, predpokladajú, že inovácie sú gaussovským bielym šumom.

Základom modelovania viacrežimových modelov je systematický ekonometrický prístup k štatistickej analýze časových radov v prípade, že

mechanizmus, ktorý tieto časové rady generuje, podlieha zmenám režimu. Systematický prístup v sebe obsahuje (Krolzig, 2002):

- extrahovanie informácie z dát o zmenách režimov v minulosti;
- konzistentný odhad parametrov modelu;
- detekcia aktuálnych zmien režimu;
- korekcia autoregresného modelu;
- zahrnutie pravdepodobnosti budúcich zmien režimu do predikcie.

Azda najjednoduchším zovšeobecnením lineárneho autoregresného modelu je prahový autoregresný model, v ktorom indikátorom typu režimu je niektorá z endogénnych premenných modelu, spravidla je to d -te omeškanie samotného procesu, a jej vybrané hodnoty, zvané prahy. Ak poznáme hodnotu omeškania a prahov, potom môžeme odhadnúť model rozdelením dát do skupín podľa režimu a v každom režime odhadnúť parametre pomocou obyčajnej metódy najmenších štvorcov. Bohužiaľ, na simultánny odhad parametrov modelu nemôžeme použiť nelineárnu metódu najmenších štvorcov, pretože funkcia súčtu štvorcov nie je diferencovateľná.

V mnohých prípadoch však prudká zmena pri prechode medzi režimami nezodpovedá modelovanému javu. Tento nedostatok sa pokúša odstrániť autoregresný model hladkého prechodu, pre ktorý je charakteristický vážený prístup do jednotlivých režimov. Najčastejšie používanými váhovými funkciami sú logistická funkcia a exponenciálna funkcia. Podobne, ako v prahovom autoregresnom modeli, aj v autoregresnom modeli hladkého prechodu je indikátorom režimu niektorá endogénna premenná modelu, najčastejšie niektoré omeškanie samotného procesu.

Tretím uvažovaným modelom je Markovov model prepínania režimov. Model je súčtom diskrétného Markovovho reťazca a gaussovskej autoregresie. Formálne

je podobný prahovému autoregresnému modelu, avšak na rozdiel od neho, indikátorom režimu je exogénny stav nejakého Markovovho reťazca. Najväčším problémom pri modelovaní pomocou tohto modelu je praktická nemožnosť oddeleného pozorovania oboch zložiek modelu.

IV.3 Samobudiacie prahové autoregresné modely SETAR($p, d; r$)

Prahové autoregresné modely sú azda najjednoduchším zovšeobecnením lineárnej autoregresie a spájajú sa s menom Howella Tonga (1978). Vo všeobecnom tvare ich môžeme zapísať ako

$$(4.13) X_t = \sum_{j(t)=1}^J \left(\alpha^{(j(t))} + \sum_{i=1}^p \phi_i^{(j(t))} X_{t-i} + \sigma^{(j(t))} E_t \right)$$

kde

$$(4.14) j(t)=1, \text{ ak } g(u_t) < r_1, \quad j(t)=2, \text{ ak } r_1 \leq g(u_t) < r_2, \dots, \quad j(t)=J, \text{ ak } r_{J-1} \leq g(u_t)$$

a E_t je gaussovský biely šum. Premennú u_t voláme *prahová premenná*, parametre r_t voláme *prahy* a hodnoty $j(t)$ voláme *režimy*. Proces daný vzťahom (4.13) rozkladá časovú os na J režimov, pričom v každom z nich definuje iný lineárny proces. Celý proces X_t je nelineárny, ak sú v ňom aspoň dva rôzne režimy s rôznymi lineárnymi procesmi. Prahové autoregresné modely sú teda také viacrežimové modely, v ktorých k zmene režimu dochádza na základe pozorovateľnej režimovej premennej.

Napriek tomu, že identifikácia prahových premenných a odhad príslušných prahov sú pomerne obtiažne a neexistujú jednoduché výpočtové procedúry, prahové autoregresné modely, najmä však modely typu SETAR (pozri ďalej) sa stali pomerne populárne pri modelovaní rôznych nelineárnych ekonomických a

finančných časových radov. Napríklad, Kräger a Kugler (1993), Chappell a kol. (1996) modelovali valutový trh, Kuo a Mikkola (2000) a Johansson (2001) reálne výmenné kurzy, Lizieri a kol. (1998) trh nehnuteľností, Montgomery a kol. (1998), Rothman (1998) a Peel a Speight (2000) nezamestnanosť, de Gooijer a Vidiella-I-Anguera (2000) infláciu. Po prvýkrát bol tento typ modelu aplikovaný na časový rad hrubého domáceho produktu USA v prácach Tiao a Tsaya (1994) a Pottera (1995). V posledných rokoch časové rady hrubého domáceho produktu modelovali prahovým autoregresným modelom Clements a Franses (1999) USA.

Ak prahovou premennou je posunutá endogénna premenná X_{t-d} s omeškaním $d > 0$, tak dostávame samobudiaci prahový autoregresný model $SETAR(p, d, r)$ (*Self-Exciting Threshold Autoregressive Model*), kde p je maximálny rád autoregresie, d je omeškanie a r je vektor prahov. Procedúra modelovania modelov $SETAR$ pozostáva z nasledujúcich štyroch krokov:

- Voľba východzieho lineárneho AR procesu rádu p a množiny S možných hodnôt parametra omeškania d .
- Zbehnutie autoregresií na preusporiadanej bázevej základne východzieho $AR(p)$ procesu pre všetky prvky d z množiny S a vykonanie testu prahovej nelinearity $\hat{F}(p, d)$. V prípade odhalenia nelinearity určiť parameter omeškania d_p .
- Pre dané p a d_p určiť pomocou bodového grafu hodnoty prahov.
- V prípade potreby vylepšiť rád AR a hodnoty prahov v každom režime použitím metód lineárnej regresie.

Uvažujme východzí lineárny autoregresný proces rádu p , $AR(p)$, identifikovaný v uvažovanom rade $\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$. Potom $(p+2)$ -tice $(X_t, 1, X_{t-1}, \dots, X_{t-p})$

budeme nazývať *dátovou bázou* procesu $AR(p)$. Preusporiadajme bázovú základňu procesu $AR(p)$ vzostupne podľa hodnôt prahovej premennej modelu $SETAR$. Formálne môžeme takýto model teda zapísať v tvare

$$(4.15) X_{\pi_i} = \phi_0^{(j(t))} + \phi_1^{(j(t))} X_{\pi_{i-1}} + \dots + \phi_p^{(j(t))} X_{\pi_{i-p}} + \sigma^{(j(t))} E_t,$$

pričom režimy sú dané vzťahmi

$$(4.16) j(t)=1, \text{ ak } X_{t-d} < r_1, \quad j(t)=2, \text{ ak } r_1 \leq X_{t-d} < r_2, \quad \dots, \quad j(t)=J, \text{ ak } r_{J-1} \leq X_{t-d},$$

pričom rád autoregresie môže byť v rôznych režimoch rôzny.

IV.3.1 Test prahovej nelinearity (AR vs. $SETAR$)

Test, ktorý teraz opíšeme, slúži na detekciu, či v danom časovom rade je jeden alebo viac režimov. Testujeme nulovú hypotézu

H_0 : východzí autoregresný proces je lineárny (obsahuje len jeden režim)

proti alternatívnej hypotéze

H_A : opak H_0 .

Pre pevné p a d máme v preusporiadanej bázovej základni východzieho procesu $n - d - h + 1$ pozorovaní, kde $h = \max\{1, p + 1 - d\}$. Samotný test je založený na myšlienke, že kým v lineárnom procese sú reziduály preusporiadaného časového radu asymptoticky bielym šumom a ortogonálne k regresorom $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-d}$, v procese, v ktorom je viac režimov, dochádza pri zmene režimu k vychýleniu.

Procedúra 4.5.

1. Zvoliť $b > d + h - 1$.
2. Pre každé i , $i = b, b + 1, \dots, n$ zbehnúť lineárnu regresiu z prvých i preusporiadaných pozorovaní. Vypočítať príslušný počet prediktívnych rezíduí \hat{e}_{π_i} .
3. Zbehnúť lineárnu regresiu

$$(4.17) \hat{\varepsilon}_{\pi_i+d} = \omega_0 + \omega_1 X_{\pi_i+d-1} + \omega_2 X_{\pi_i+d-2} + \dots + \omega_p X_{\pi_i+d-p} + \varepsilon_{\pi_i+d}$$

pre $i = b + 1, \dots, n$ a vypočítať štatistiku

$$(4.18) \hat{F}(p, d) = \frac{\left(\sum_{t=b+1}^{n-d-h+1} \hat{\varepsilon}_t^2 - \sum_{t=b+1}^{n-d-h+1} \hat{\varepsilon}_t^2 \right) / (p+1)}{\sum_{t=b+1}^{n-d-h+1} \hat{\varepsilon}_t^2 / (n-d-b-p-h)}.$$

Argumenty p a d slúžia na zvýraznenie faktu, že príslušné Fischerovo F rozdelenie závisí od p a d .

Veta 4.6. (Tsay, 1989, Veta 3.1.) Predpokladajme, že X_t je lineárny stacionárny autoregresný proces rádu p , teda, že X_t môže byť vyjadrený v tvare (4.15) pre $J=1$. Potom, pre veľké n , štatistika $\hat{F}(p, d)$ definovaná vzťahom (4.18) má asymptoticky približne Fischerovo F rozdelenie s $p+1$ a $n-d-b-p-h$ stupňami voľnosti.

Pretože počet a umiestnenie prahov nevieme určiť presne, neexistuje globálny silný test prahovej nelinearity. Napriek tomu, vyššie opísaný test je relatívne silný, jednoduchý a vhodný, pretože jeho implementácia vyžaduje len procedúry usporiadania a lineárnej regresie.

IV.3.2 Špecifikácia parametra omeškania d

Najväčším problémom pri modelovaní prahových autoregresných modelov je špecifikácia prahovej premennej, ktorá zohráva kľúčovú úlohu v nelineárnom charaktere modelu. V literatúre sa odporúčajú dva protichodné spôsoby. Tong a Lim (1980) odporúčajú špecifikovať hodnotu parametra d pomocou Akaikeho informačného kritéria až po špecifikácii všetkých ostatných parametrov, kým Tsay (1989) odporúča parameter d špecifikovať ako prvý. Tsay súčasne navrhol

viac-menej heuristickú metódu špecifikácie parametra d , založenú na analýze reálnych dát.

Predpokladajme, že rád autoregresie p je daný. Pre daný proces TAR a proces AR rádu p zostrojme množinu S všetkých takých kladných celých čísiel, ktoré prichádzajú do úvahy ako parameter omeškania. Samotný parameter omeškania d_p (index vyjadruje, že parameter závisí na ráde autoregresie) potom špecifikujeme ako

$$(4.19) \quad d_p = \arg \max_{v \in S} \{\hat{F}(p, v)\},$$

kde $\hat{F}(p, v)$ je štatistika v tvare (4.18) získaná pri teste prahovej nelinearity východzieho autoregresného procesu. V podstate, parameter omeškania určíme tak, že pre každú jeho možnú hodnotu testujeme, či v uvažovanom procese dochádza k zmene režimu alebo nie, a v prípade detekcie prahovej nelinearity parameter špecifikujeme ako parameter toho procesu, pre ktorý je štatistika \hat{F} najväčšia.

Uvažujme autoregresný proces (4.11), ktorý je rádu $p=4$. Ako omeškanie pripadajú do úvahy hodnoty parametra posunutia jeden, dva, tri a štyri. Vytvoríme teda množinu $S = \{1,2,3,4\}$. Pre každú hodnotu $s \in S$ sme zbehli test nelinearity pre začiatočný počet pozorovaní $b = 6, 7, 8, 9, 10, 11$ a 12 . Hodnota $b=6$ je najmenšia možná hodnota, pre ktorú je možné zbehnúť lineárnu regresiu. Testovacia štatistika \hat{F} má Fischerovo F rozdelenie so stupňami voľnosti 5 a $31-b$. Získané testovacie štatistiky, ako aj príslušné kritické hodnoty na hladine významnosti $\alpha = 0.05$ sú v tabuľke 4.3. Z tabuľky vidíme, že vypočítaná štatistika prekračuje kritickú hodnotu len pre $d=3$. Súčasne sa potvrdila experimentálna skúsenosť, že pre krajné hodnoty b test zlyháva. Keďže sme testovali nulovú hypotézu jednorežimovosti procesu proti alternatívnej hypotéze

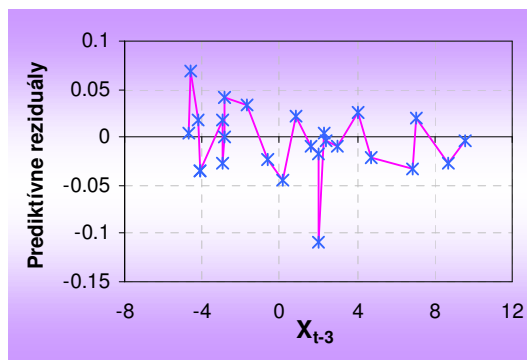
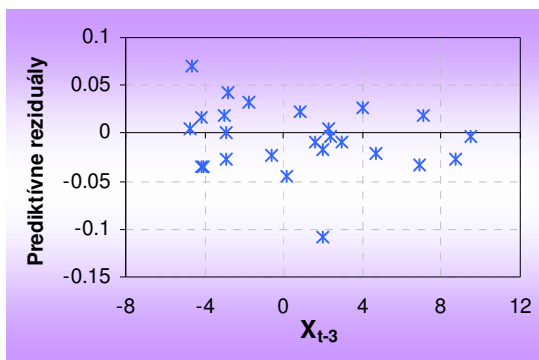
existencie viacerých režimov, hypotézu sme zamietli. Proces teda môže byť nelineárny len pre hodnotu $d=3$.

Tabuľka 4.3. Výsledky testovania nelinearity v modeli AR(4)

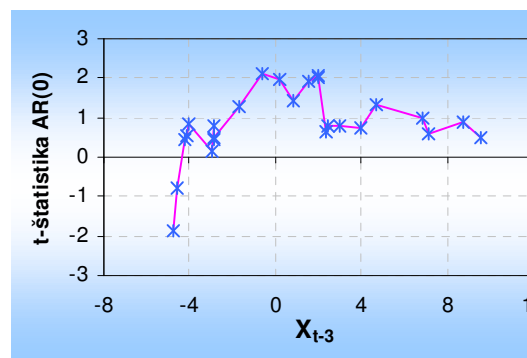
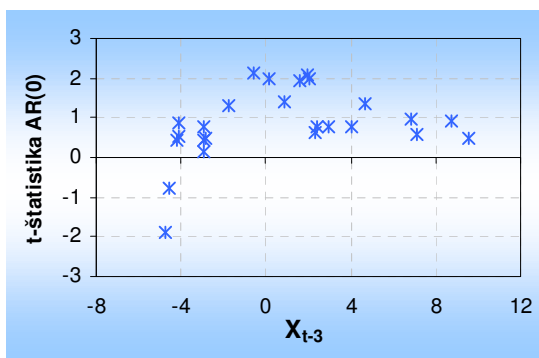
b	Kritická hodnota $F_{5,31-b}$	$d=1$	$d=2$	$d=3$	$d=4$
6	2.602987	1.748236	0.350168	1.125086	0.617476
7	2.620654	1.715263	0.424109	0.836917	0.581978
8	2.639999	1.569585	0.526299	2.385549	0.530677
9	2.661274	1.486788	0.599662	3.357983	0.563222
10	2.684781	1.362966	0.652269	3.659882	0.364056
11	2.710890	1.286059	0.628628	3.548439	0.341361
12	2.740058	0.743493	0.659206	3.448413	0.692805

IV.3.3 Určenie hodnoty prahov r

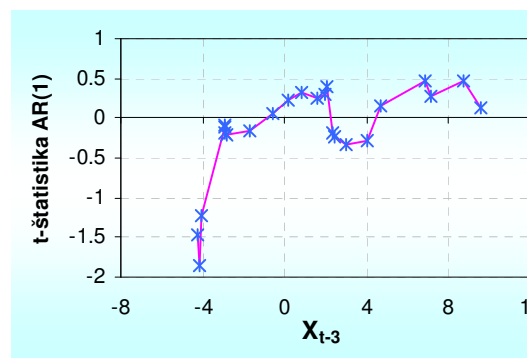
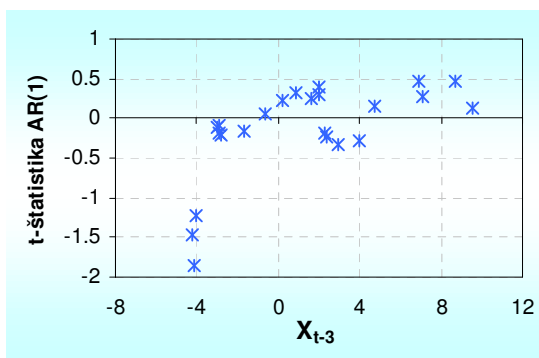
Určenie počtu a hodnôt prahov vyžaduje špeciálny prístup. Nech r_i je skutočná hodnota prahu taká, že $X_{\pi_i} < r_i < X_{\pi_{i+1}}$. Potom každé reálne číslo vyhovujúce rovnakej nerovnosti môže byť dobrým odhadom hodnoty prahu, pretože vedie k rovnakej špecifikácii modelu *SETAR*. V literatúre sa môžeme stretnúť s rôznymi spôsobmi intervalového alebo bodového odhadu hodnôt prahov. My použijeme metódy, ktoré na získanie bodových odhadov používajú výberové empirické percentily. Tieto metódy lokalizujú prahy pomocou analýzy bodového grafu rôznych štatistík verzus špecifikovaná prahová premenná. Nie sú to síce formalizované metódy, avšak poskytujú užitočné informácie o možnom umiestnení prahov. Štandardne sa používa metóda, ktorú navrhli ešte Tong a Lim (1980), a ktorá analyzuje bodový graf prediktívnych reziduálov získaných v rekurzívnych lineárnych regresiach pri teste nelinearity s príslušnou prahovou premennou. Tsay (1989) navrhol ako porovnávacie štatistiky t -štatistiky jednotlivých autoregresných koeficientov získaných pri rekurzívnych regresiach. Jednotlivé bodové grafy sú na obrázku 4.1.



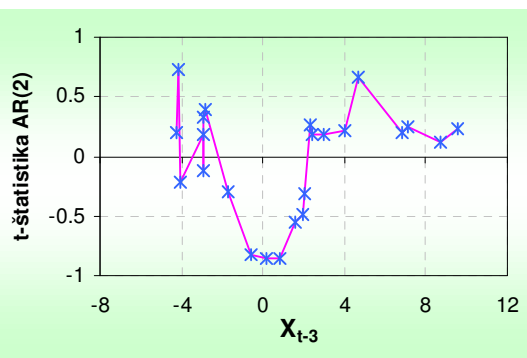
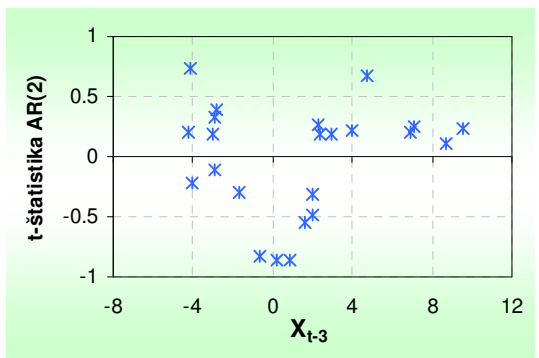
a)



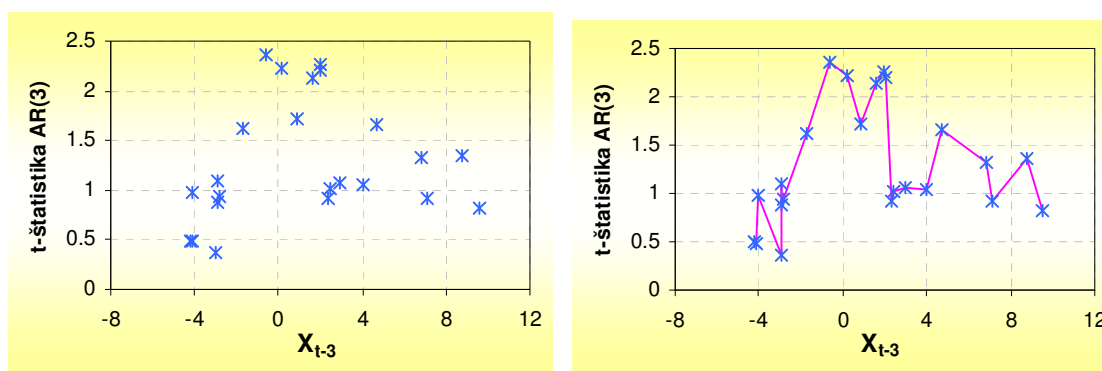
b)



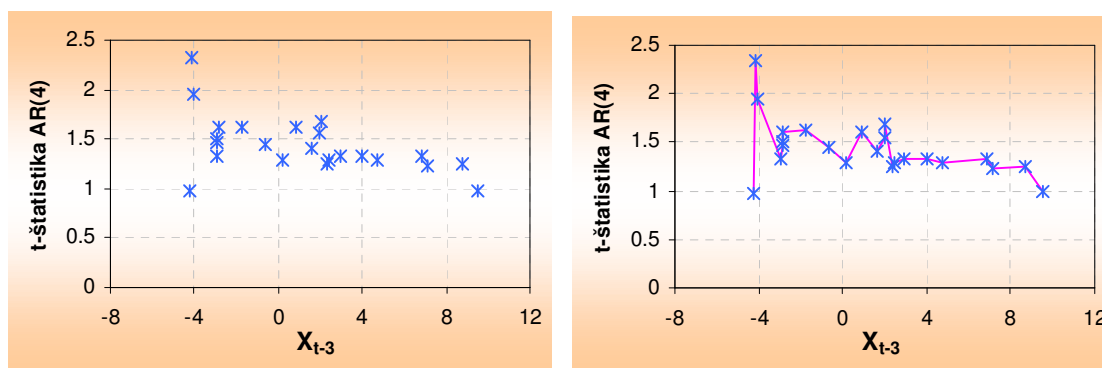
c)



d)



e)



f)

Obrázok 4.1. Bodový graf prediktívnych rezíduí vs. X_{t-3} (a), t -štatistik člena $AR(0)$ vs. X_{t-3} (b), t -štatistik člena $AR(1)$ vs. X_{t-3} (c), t -štatistik člena $AR(2)$ vs. X_{t-3} (d), t -štatistik člena $AR(3)$ vs. X_{t-3} (e) a t -štatistik člena $AR(4)$ vs. X_{t-3} (f).

Opätovne, vychádza sa z úvahy, že tak priebeh hodnôt prediktívnych rezíduí, ako aj t -štatistik sa vychýľuje z pôvodného smeru, keď hodnota prahovej premennej dosiahne prah. Kým graf prediktívnych rezíduí dokáže identifikovať len lokalizáciu prahov, grafy t -štatistik okrem lokalizácie prahov identifikujú aj významnosť príslušných koeficientov autorgresie. Z obrázkov b-e jasne vyplýva existencia prahu $r_1=0$, prípadne aj prahu $r_2=4$ (obrázky c a d). Bohužiaľ, graf prediktívnych rezíduí nedáva žiadnu užitočnú informáciu.

IV.3.4 Model s jedným prahom

Najskôr špecifikujeme samobudiaci autoregresný model s autoregresnou zložkou štvrtého rádu, rádom omeškania 3 a jedným prahom, $r=0$, t.j. model $SETAR(4,3;0)$. Štandardná Boxova-Jenkinsova metodológia v prvom režime ($g_{t-3}^* < 0$) vedie k autoregresnému modelu druhého rádu s konštantným členom, kým v druhom režime ($g_{t-3}^* \geq 0$) k autoregresnému procesu štvrtého rádu bez konštantného člena. Model potom môžeme zapísať v tvare

$$(4.20) \quad g_t^* = \begin{cases} 1.966834 - 0.465478g_{t-1}^* - 0.677309g_{t-2}^* + E_t & g_{t-3}^* < 0 \\ -0.87832g_{t-1}^* - 0.82192g_{t-2}^* - 0.82142g_{t-3}^* + \\ + 0.218425g_{t-4}^* + E_t & g_{t-3}^* \geq 0 \end{cases}$$

V tabuľke 4.4 sú uvedené štatistické vlastnosti parametrov odvodeného modelu. Porovnaním s modelom (4.11) vidíme, že model (4.20) má lepšie štatistické vlastnosti. Koeficient determinácie modeli $SETAR$ je 0.9155, kým vo východnom modeli AR len 0.8741. Podobne, adjustovaný koeficienta determinácie je vyšší (0.9098 vs. 0.8601). Model $SETAR$ má aj lepšiu hodnotu štandardnej chyby regresie (1.6521 vs. 2.0571) a len zhruba polovičný súčet štvorcov rezíduí (60.2714 vs. 114.2525). Model otestujeme piatimi testami. Najskôr otestujeme pomocou Chowovho testu zlomu existenciu štruktúrálnej zmeny v preusporiadanej báze základni v mieste prahu $c=0$. Hodnota F štatistiky (2.23) je 2.0116, čo vedie k p -hodnote 0.1186, takže môžeme nezamietnuť hypotézu existencie štruktúrného zlomu v mieste prahu. Jarqueho-Berova štatistika radu inovácií (pozri tabuľku 4.4) vedie k nezamietnutiu hypotézy normálnosti radu inovácií. Podobne test nám nezamieta hypotézu, že rad inovácií má nulovú strednú hodnotu. Ďalším testom je test existencie seriálovej korelácie v inováciách modelu až do rádu posunutia

4. Hodnota Breuschovej-Godfreyovej štatistiky je 28.3799, čo vedie k p-hodnote 0.999989, takže hypotézu neexistenciu autokorelácie až po rád 4 nezamietame s vysokou marginálnou hladinou významnosti. Podobne, v teste ARCH LM je hodnota Breuschovej-Godfreyovej štatistiky 9.8600, čo vedie pri ráde posunutia do 4 k p-hodnote 0.9571, takže nezamietame hypotézu neexistencie podmienenej autoregresnej heteroskedasticity až do rádu 4.

Tabuľka 4.4 Štatistické vlastnosti parametrov modelu SETAR(4,3;0)

<i>Premenná</i>	<i>Koeficient</i>	<i>Štandardná chyba</i>	<i>t-štatistika</i>	<i>p-hodnota</i>
<i>$X_{t-3} < 0$</i>				
ϕ_0	1.966834	0.687875	2.859287	0.0126
ϕ_1	-0.465478	0.129231	-3.601917	0.0029
ϕ_2	-0.677309	0.092028	-7.359809	0.0000
<i>$X_{t-3} \geq 0$</i>				
ϕ_1	-0.878317	0.147897	-5.938703	0.0001
ϕ_2	-0.821919	0.175520	-4.682770	0.0009
ϕ_3	-0.821424	0.167885	-4.892785	0.0006
ϕ_4	0.218425	0.153835	1.419869	0.1861
<i>Parameter</i>	<i>Hodnota</i>			
	<i>$X_{t-3} < 0$</i>	<i>$X_{t-3} \geq 0$</i>	<i>X_{t-3}</i>	
Počet pozorovaní	17	14	31	
Koeficient determinácie	0.795033	0.972905	0.915484	
Adjustovaný koef. determinácie	0.765752	0.964777	0.909759	
Štandardná chyba regresie	2.074874	1.281145	1.652062	
Súčet štvorcov rezíduí	60.27142	16.41331	76.68474	
Logaritická vierohodnosť	-34.87994	-20.97839	-33.96870	
Akaikeho informačné kritérium	4.456463	3.568341	2.378832	
Jarqueho-Berova štatistika	2.346891	0.224220	4.781638	
p-hodnota J-B štatistiky	0.309299	0.893946	0.091555	
t-štatistika testu $\mu=0$	0.600004	0.104238	0.595062	
p-hodnota testu $\mu=0$	0.556418	0.918572	0.556121	

Tabuľka 4.5 Výsledky modelovania HDP modelom $SETAR(4,3;0)$ a radu inovácií

Štvrťrok	Rast HDP	Dynamická predikcia		Adjustovaná statická predikcia	
	(HDP)	Rast HDP (HDP)	95% interval spoľahlivosti	Rast HDP (HDP)	95% interval spoľahlivosti
2002:1	-3.55 (171.1)	-5.33 (167.9)	(-8.09, -2.58)	-5.33 (167.9)	(-9.37, -1.20)
2002:2	10.17 (188.5)	10.31(185.2)	(7.62, 12.99)	8.27 (186.1)	(3.86, 13.62)
2002:3	1.75 (191.8)	1.79(188.6)	(-2.49, 6.08)	0.65 (189.7)	(-3.69, 4.99)
2002:4	-2.50 (187.0)	-4.89 (179.3)	(-9.27, -0.52)	-4.78 (182.6)	(-9.79, 0.23)
<i>Miera presnosti</i>					
Odmocnina priemernej štvorcovej chyby		1.491917 (4.735730)		1.704405 (3.137349)	
Priemerná absolútna chyba		0.998422 (4.327432)		1.647781 (3.013246)	
Priemerná absolútna percentuálna chyba		0.373271 (0.023391)		0.545568 (0.016411)	
Koeficient Theilovej nerovnosti		0.124761 (0.124761)		0.151401 (0.008559)	

Údaje v percentách, v zátvorke v miliardách SKK v stálych cenách z roku 1995

Pomocou modelu (4.20) sme modelovali hodnotu g_t^* v roku 2002. Podobne ako pri modeli $AR(4)$, sme dostali predikciu tempa rastu HDP. Výsledky predikcie spolu s príslušnými modelovanými hodnotami HDP sú uvedené v tabuľke 4.5. Porovnaním s predikciou pomocou východzieho $AR(4)$ modelu vidíme, že model $SETAR(4,3;0)$ má nižšiu odmocninu priemernej štvorcovej chyby predikcie (1.4919 vs. 1.2066 pri dynamickej predikcii a 1.7044 vs. 2.3711 pri adjustovanej statickej predikcii). Podobne, priemerná absolútna chyba, priemerná absolútna percentuálna chyba, ako aj koeficient Theilovej nerovnosti je v oboch spôsoboch predikcie modelom $SETAR$ nižšia než modelom AR .

IV.3.5 Model s dvoma prahmi

Pretože v skúmanom časovom rade produkčných medzier Slovenska môže okrem prahu $r_1=0$ existovať aj prah $r_2=4$, špecifikujme v ňom aj iný samobudiaci prahový autoregresný model rovnakého rádu autoregresie, s rovnakou prahovou premennou, avšak s tromi režimami a dvoma prahmi, nulou a štvorkou, t.j. model $SETAR(4,3;(0,4))$. Zbehnutím lineárnej regresie v jednotlivých režimoch dostávame model

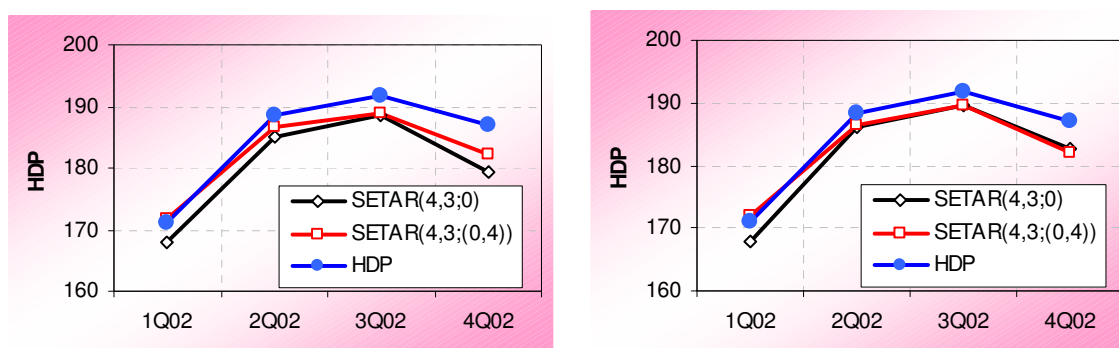
$$(4.21) \quad g_t^* = \begin{cases} 0.917886 - 0.465478g_{t-1}^* - 0.677309g_{t-2}^* + E_t & g_{t-3}^* < 0 \\ -0.68955g_{t-1}^* - 0.58585g_{t-2}^* - 0.41470g_{t-3}^* + \\ + 0.38950g_{t-4}^* + E_t & 0 \leq g_{t-3}^* < 4 \\ -13.78736 - 0.546126g_{t-1}^* + 0.620599g_{t-2}^* + \\ + 0.781355g_{t-3}^* + E_t & g_{t-3}^* \geq 4 \end{cases}$$

Štatistické vlastnosti parametrov modelu sú uvedené v tabuľke 4.6. Porovnaním s modelom (4.11) vidíme, že aj model (4.21) má lepšie štatistické vlastnosti nielen než východzí model (4.11), ale aj model $SETAR(4,3;0)$. Koeficient determinácie v modeli (4.21) je 0.9324, kým v modeli (4.20) je 0.9155 a vo východzom modeli AR len 0.8741. Podobne, adjustovaný koeficient determinácie je vyšší (0.9248 vs. 0.9098 resp. 0.8601). Trojrežimový model má aj lepšiu hodnotu štandardnej chyby regresie (1.5077 vs. 1.6520 resp. 2.0571) a rovnako zhruba polovičný súčet štvorcov rezíduí než východzí model, avšak mierne vyšší ako dvojrežimový model (61.3767 vs. 60.2714 resp. 114.252).

Model otestujme opäť piatimi testami. Hodnota F štatistiky (2.23) Chowovho testu pre dva zlomy v preusporiadanej bázevej základne, a to v miestach prahov $c_1=0$ a $c_2=4$ je 1.4669, čo vedie k p-hodnote 0.2385, takže môžeme akceptovať hypotézu existencie dvoch štrukturálnych zlomov v miestach prahov. Podobne,

Jarqueho-Berova štatistika a test nulovosti strednej hodnoty inovácií (pozri tabuľku 4.6) vedie k nezamietnutiu hypotézy, že rad inovácií má normálne rozdelenie s nulovou strednou hodnotou. Hodnota Breuschovej-Godfreyovej štatistiky v teste existencie seriálovej korelácie v inováciách modelu až do rádu posunutia 4 je 28.9030, čo vedie k p-hodnote 0.9999 a v teste ARCH LM je 9.4856, čo vedie k p-hodnote 0.9500, takže môžeme nezamietnuť neexistenciu autokorelácie a podmienenej autoregresnej heteroskedasticity až do rádu 4.

Aj pomocou modelu (4.21) sme modelovali hodnotu g_{t-3}^* v roku 2002 a následne sme predikovali tempo rastu HDP. Výsledky predikcie sú uvedené v tabuľke 4.7. Porovnaním s predikciou pomocou modelu $SETAR(4,3;0)$ ako aj pomocou východzieho $AR(4)$ modelu vidíme, že trojrežimový model má nižšiu odmocninu priemernej štvorcovej chyby predikcie (0.9707 vs 1.4919 resp. 1.2066 pri dynamickej predikcii a 1.4983 vs. 1.7044 resp. 2.3711 pri adjustovanej statickej predikcii). Podobne, priemerná absolútna chyba, priemerná absolútna percentuálna chyba, ako aj koeficient Theilovej nerovnosti je v oboch spôsoboch predikcie modelom $SETAR$ nižšia než modelom AR . Predikované hodnoty HDP v roku 2002 sú graficky zobrazené na obrázku 4.2.



Obrázok 4.2. Predikcia hodnoty HDP Slovenska na rok 2002 získaná modelmi $SETAR(4,3;0)$ a $SETAR(4,3;(0,4))$ dynamickou predikciou (a) a adjustovanou statickou predikciou (b). Údaje sú v miliardách SKK v stálych cenách z roku 1995.

Tabuľka 4.6 Štatistické vlastnosti parametrov modelu $SETAR(4,3;(0,4))$ a radu inovácií

<i>Premenná</i>	<i>Koeficient</i>	<i>Štandardná chyba</i>	<i>t-štatistika</i>	<i>p-hodnota</i>
$X_{t-3} < 0$				
ϕ_0	1.966834	0.687875	2.859287	0.0126
ϕ_1	-0.465478	0.129231	-3.601917	0.0029
ϕ_2	-0.677309	0.092028	-7.359809	0.0000
$0 \leq X_{t-3} < 4$				
ϕ_1	-0.689551	0.098738	-6.983615	0.0060
ϕ_2	-0.585854	0.109598	-5.345487	0.0128
ϕ_3	-0.414704	0.163419	-2.537675	0.0849
ϕ_4	0.389501	0.101337	3.843608	0.0311
$X_{t-3} \geq 4$				
ϕ_0	-13.78736	1.766664	-7.804177	0.0044
ϕ_1	-0.546126	0.082762	-6.598791	0.0071
ϕ_2	0.620599	0.265634	2.336294	0.1016
ϕ_3	0.781355	0.226740	3.446046	0.0411
<i>Hodnota</i>				
	$X_{t-3} < 0$	$0 \leq X_{t-3} < 4$	$X_{t-3} \geq 4$	X_{t-3}
Počet pozorovaní	17	7	7	31
Koeficient determinácie	0.795033	0.989194	0.983457	0.932355
Adjustovaný koef. determinácie	0.765752	0.978388	0.966913	0.924839
Štandardná chyba regresie	2.074874	0.371607	0.479931	1.507717
Súčet štvorcov rezíduí	60.27142	0.414275	0.691001	61.37670
Logaritmickej vierohodnosť	-34.87994	-0.037595	-1.828236	-32.46970
Akaikeho informačné kritérium	4.456463	1.153599	1.665210	1.023499
Jarqueho-Berova štatistika	2.346891	1.113250	0.659557	0.177487
p-hodnota J-B štatistiky	0.309299	0.573140	0.719083	0.084920
t-štatistika testu $\mu=0$	0.600004	0.039752	-1.36E-14	0.604199
p-hodnota testu $\mu=0$	0.556418	0.969580	1.000000	0.550108

Tabuľka 4.7 Výsledky modelovania HDP modelom $SETAR(4,3;(0,4))$

Štvrťrok	Rast HDP	Dynamická predikcia		Adjustovaná statická predikcia	
	(HDP)	Rast HDP (HDP)	95% interval spoľahlivosti	Rast HDP (HDP)	95% interval spoľahlivosti
2002:1	-3.55 (171.1)	-3.12 (171.9)	(-4.70, -1.54)	-3.12 (171.9)	(-4.70, -1.54)
2002:2	10.17 (188.5)	8.69 (186.8)	(7.11, 10.27)	8.99 (186.5)	(6.64, 11.33)
2002:3	1.75 (191.8)	1.04 (188.8)	(-0.54, 2.63)	0.65 (189.7)	(-1.70, 2.99)
2002:4	-2.50 (187.0)	-3.45 (182.2)	(-5.03, -1.87)	-4.99 (182.2)	(-7.33, -2.65)
<i>Miera presnosti</i>					
Odmocnina priemernej štvorcovej chyby		0.970711 (2.976010)		1.498299 (2.816551)	
Priemerná absolútna chyba		0.890749 (2.568444)		1.300516 (2.408586)	
Priemerná absolútna percentuálna chyba		0.262079 (0.013710)		0.465221 (0.012884)	
Koeficient Theilovej nerovnosti		0.091976 (0.008102)		0.136471 (0.007665)	

Údaje v percentách, v zátvorke v miliardách SKK v stálych cenách z roku 1995.

IV.4 Autoregresné modely hladkého prechodu STAR

Najväčším nedostatkom samobudiacich prahových autoregresných modelov *SETAR* je ostrý zlom modelu pri prechode prahom. Tento nedostatok sa snaží odstrániť autoregresný model hladkého prechodu *STAR* (*Smooth Transition Autoregressive Model*), o ktorého popularitu sa zaslúžili najmä Granger a Teräsvirta (1993, 1994, 1998). V tomto modeli uvažujeme dva režimy s váženým prístupom do režimov, ktorý závisí na realizácii nejakej premennej u_t . Vážený prístup do režimov nám zabezpečuje spojitá *prechodová funkcia* $G(u_t; \gamma, c)$, ktorá vyjadruje váhu druhého režimu, a definitorky jej hodnoty sú ohraničené medzi 0 a 1. Funkciu u_t voláme *prechodová premenná*.

Prechodovou premennou môže byť buď posunutá endogénna premenná, napríklad $u_t = y_{t-d}$ pre $d > 0$, exogénna premenná alebo aj funkcia niekoľkých posunutých endogénnych a exogénnych premenných. Prechodová funkcia obsahuje dva parametre. Prvý z nich, c , je *prah* a druhý, γ je *parameter hladkosti*.

Model môžeme vyjadriť v tvare

$$(4.22) \quad X_t = \left(\phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} \right) (1 - G(u_t; \gamma, c)) + \left(\varphi_0 + \sum_{i=1}^p \varphi_i X_{t-i} \right) G(u_t; \gamma, c) + E_t$$

kde E_t je gaussovský biely šum. Model (4.22) vykazuje prítomnosť dvoch režimov združených s extrémnymi hodnotami prechodovej funkcie $G(u_t; \gamma, c) = 0$ a $G(u_t; \gamma, c) = 1$, pričom prechod z jedného režimu do druhého je postupný. Tento model má aj inú interpretáciu, a to ako model s nekonečne veľa režimami (kontinuum režimov), každý spojený s jednou hodnotou prechodovej funkcie. Rovnako, ako aj v modeloch typu *SETAR*, aj v modeloch *STAR* je režim v čase t (pre dané hodnoty u_t , γ a c) pozorovateľný, a môže byť určený pomocou prechodovej funkcie.

V praxi sa najčastejšie používajú dva typy prechodovej funkcie, logistická funkcia, a exponenciálna funkcia. Logistická prechodová funkcia, ktorá má tvar

$$(4.23) \quad G(u_t; \gamma, c) = \frac{1}{1 + \exp(-\gamma(u_t - c))},$$

nám zabezpečuje rôzne správanie modelu v takých hodnotách prechodovej premennej u_t , ktoré neprekračujú a prekračujú hodnotu prahu c , čo znamená, že model sa mení monotónne vzhľadom na prechodovú premennú. Model s logistickou prechodovou funkciou budeme označovať *LSTAR*. Pre extrémne hodnoty parametra hladkosti model *LSTAR* prechádza do dvojrežimového

modelu *SETAR* (ak $\gamma \rightarrow \infty$) a do lineárneho *AR* modelu (ak $\gamma \rightarrow 0$). Dvojrežimový model typu *SETAR* je teda vnorený do modelu *LSTAR*. Tento typ modelov je obzvlášť vhodný na modelovanie asymetrie hospodárskych cyklov (pozri Teräsvirta a Anderson(1992) a Skalin a Teräsvirta (2002)).

Exponenciálna prechodová funkcia, ktorá má tvar

$$(4.24) G(u_t; \gamma, c) = 1 - \exp(-\gamma(u_t - c)^2),$$

nám zabezpečuje rôzne správanie modelu v malých a veľkých odchýlkach hodnoty prechodovej premennej u_t od hodnoty prahu c , čo znamená, že model sa mení “symetricky” k hodnote prahu. Model s exponenciálnou prechodovou funkciou budeme označovať *ESTAR*. Pre oboje extrémne hodnoty parametra hladkosti, t.j. pre $\gamma \rightarrow \infty$ ako aj pre $\gamma \rightarrow 0$, model *ESTAR* prechádza do lineárneho *AR* modelu. Teda, v tomto prípade nie je model typu *SETAR* vnorený do modelu *ESTAR*. Tento typ modelov bol použitý najmä v prípade modelovania výmenných kurzov (pozri Sarantis (1999) a Taylor a kol.(2001)).

IV.4.1 Test linearity (*AR* vs. *STAR*)

Uvažujme autoregresný model hladkého prechodu v tvare (4.22) s prechodovou premennou X_{t-d} , $d > 0$. Luukkonen, Saikkonen a Teräsvirta (1988) navrhli niekoľko testov, ktoré môžu byť použité v celej takej triede modelov *STAR* s neznámym d , v ktorej prechodová funkcia G splňuje nasledujúce dve podmienky:

Predpoklad 4.7.

1. Prechodová funkcia $G(u; \circ, \circ)$ je v svojej prvej premennej nepárna, rýdzo rastúca a pre nejaké $a > 0$ a $s \geq 0$ existuje na otvorenom intervale $(-a, a)$ nenulová derivácia rádu $2s + 1$.

2. $G(0; \circ, \circ) = 0$ a $\left[\partial^k G(u; \circ, \circ) / \partial u^k \right]_{u=0} \neq 0$ pre všetky také nepárne k , že $1 \leq k \leq 2s + 1$.

Navrhnuté testy testujú, či sa model (4.22) redukuje na lineárny v tvare

$$(4.25) \quad X_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + E_t.$$

Testovací problém komplikuje prítomnosť neidentifikovateľných parametrov za platnosti nulovej hypotézy. Uvedení autori tento identifikačný problém odstránili nahradením prechodovej funkcie $G(u; \circ, \circ)$ aproximáciou vhodným Taylorovým polynómom. Linearita je potom testovaná pomocou štatistiky Lagrangeovho multiplikátora so štandardným asymptotickým χ^2 rozdelením pri platnosti nulovej hypotézy. Takýto prístup má dve výhody. Prvú, že model pri platnosti alternatívnej hypotézy nemusí byť špecifikovaný, a druhú, že na získanie kritických hodnôt testu môže byť použitá štandardná asymptotická teória.

Z uvedených testov si všimnime test tretieho rádu. Ak je predpoklad 4.7 splnený pre $s = 1$, tak je možné funkciu $G(u; \circ, \circ)$ aproximovať pomocou Taylorovho polynómu tretieho rádu

$$(4.26) \quad T_3(u) = g_1 u + g_3 u^3,$$

kde

$$(4.27) \quad g_1 = \left[\partial G(u; \circ, \circ) / \partial u \right]_{u=0}$$

a

$$(4.28) \quad g_3 = \frac{1}{6} \left[\partial^3 G(u; \circ, \circ) / \partial u^3 \right]_{u=0}.$$

Dosadením

$$(4.29) u_t = X_{t-d}$$

a nahradením funkcie G funkciou T_3 dostaneme pomocný model

$$(4.30) \quad X_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i X_{t-i} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=i}^p \varphi_{ij} X_{t-i} X_{t-j} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \zeta_{ij} X_{t-i} X_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \xi_{ij} X_{t-i} X_{t-j}^3 + E_t,$$

Budeme testovať hypotézu

$$H_0^{(3)} : \quad \varphi_{ij} = 0 \text{ pre všetky } i = 1, \dots, p \text{ a } j = i, \dots, p, \quad \zeta_{ij} = 0 \text{ a } \xi_{ij} = 0 \text{ pre všetky } i, j = 1, \dots, p$$

proti alternatívnej hypotéze

$$H_A^{(3)} : \quad \text{aspoň jeden z koeficientov } \varphi_{ij}, \zeta_{ij}, \xi_{ij} \text{ je nenulový}$$

nasledujúcou procedúrou:

Procedúra 4.8.

1. Zbehnúť regresiu X_t na $\{1, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p}\}$, vypočítať rezíduá \hat{E}_t a súčet ich štvorcov.

$$(4.31) \quad SSR_0 = \sum_{t=n-p+1}^n \hat{E}_t^2$$

2. V prípade, že d nie je známe, zbehnúť regresiu \hat{E}_t na $\{1, X_{t-i}, i = 1, \dots, p,$

$$X_{t-i} X_{t-j}, i = 1, \dots, p, j = i, \dots, p, X_{t-i} X_{t-j}^k, i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, p, k = 2, 3\}$$

v prípade, že d je známe, zbehnúť regresiu \hat{E}_t na

$$\{1, X_{t-i}, i = 1, \dots, p, X_{t-i} X_{t-d}, i = 1, \dots, p, X_{t-i} X_{t-d}^k, i = 1, \dots, p, k = 2, 3\},$$

vypočítať rezíduá $\hat{\eta}_t$ a súčet ich štvorcov

$$(4.32) \quad SSR_3 = \sum_{t=n-p+1}^n \hat{\eta}_t^2.$$

3. Vypočítať štatistiku

$$(4.33) S_3 = (n - p) \frac{SSR_0 - SSR_3}{SSR_0}.$$

Veta 4.9. (Luukkonen, 1988) Nech proces X_t spĺňa predpoklady vety 4.2. Potom za platnosti hypotézy $H_0^{(3)}$ má S_3 asymptoticky χ^2 rozdelenie so stupňami voľnosti $\frac{1}{2}p(p+1) + 2p^2$ (ak nepoznáme d), resp. $3p$ (ak d poznáme).

Test daný procedúrou 4.8 je súčasne aj testom linearity modelu proti nelinearite typu *LSTAR* (pozri van Dijk, Teräsvirta, Franses (2002)). Saikkonen a Luukkonen (1988) navrhli test, ak ako alternatívu k lineárnemu *AR* modelu postavíme model typu *ESTAR*. Podľa ich návrhu, pomocný model nadobúda tvar

$$(4.34) X_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i X_{t-i} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=i}^p \varphi_{ij} X_{t-i} X_{t-j} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \zeta_{ij} X_{t-i} X_{t-j}^2 + E_t$$

Nulová hypotéza má tvar

$$H_0^{(2)} : \quad \varphi_{ij} = 0 \text{ pre všetky } i = 1, \dots, p \text{ a } j = i, \dots, p, \quad \zeta_{ij} = 0 \text{ pre všetky } i, j = 1, \dots, p$$

Hypotézu sme postavili proti alternatívnej hypotéze

$$H_A^{(2)} : \quad \text{aspoň jeden z koeficientov } \varphi_{ij}, \zeta_{ij} \text{ je nenulový}$$

Procedúra 4.10.

1. Realizovať krok 1 z procedúry 4.8.

2. V prípade, že d nie je známe, zbehnúť regresiu \hat{E}_t na

$$\{1, X_{t-i}, i = 1, \dots, p, X_{t-i} X_{t-j}, i = 1, \dots, p, j = i, \dots, p, X_{t-i} X_{t-j}^2, i, j = 1, \dots, p\}$$

prípade, že d je známe, zbehnúť regresiu \hat{E}_t na

$\{1, X_{t-i}, i = 1, \dots, p, X_{t-i}X_{t-d}, i = 1, \dots, p, X_{t-i}X_{t-d}^2, i = 1, \dots, p\}$, vypočítať reziduály $\hat{\eta}_t$ a súčet ich štvorcov

$$(4.35) \quad SSR_2 = \sum_{t=n-p+1}^n \hat{\eta}_t^2.$$

3. Vypočítať štatistiku

$$(4.36) \quad S_2 = (n - p) \frac{SSE_0 - SSR_2}{SSE_0}.$$

Veta 4.11. (Luukkonen, 1988) Nech proces X_t spĺňa predpoklady vety 4.2. Potom za platnosti hypotézy $H_0^{(2)}$ má S_3 asymptoticky χ^2 rozdelenie so stupňami voľnosti $\frac{1}{2}p(p+1) + p^2$ (ak nepoznáme d), resp. $2p$ (ak d poznáme).

Escribano a Jordá (1999) tvrdia, že aproximácia Taylorovým polynómom prvého rádu nedostatočne vystihuje charakteristickú vlastnosť exponenciálnej prechodovej funkcie, dva inflexné body. Preto navrhli aproximáciu prechodovej funkcie Taylorovým polynómom druhého rádu, ktorá vedie k pomocnej rovnici

$$(4.37) \quad \begin{aligned} X_t = & \beta_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i X_{t-i} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=i}^p \varphi_{ij} X_{t-i} X_{t-j} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \varsigma_{ij} X_{t-i} X_{t-j}^2 \\ & + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \xi_{ij} X_{t-i} X_{t-j}^3 + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \psi_{ij} X_{t-i} X_{t-j}^4 + E_t \end{aligned}$$

Nulová hypotéza tohoto testu má tvar

$$H_0^{(4)} : \quad \varphi_{ij} = 0 \text{ pre všetky } i = 1, \dots, p \text{ a } j = i, \dots, p, \quad \varsigma_{ij} = 0, \xi_{ij} = 0 \text{ a } \psi_{ij} = 0$$

pre všetky $i, j = 1, \dots, p$

Hypotézu sme postavili proti alternatívnej hypotéze

$$H_A^{(4)} : \quad \text{aspoň jeden z koeficientov } \varphi_{ij}, \varsigma_{ij}, \psi_{ij} \text{ a } \xi_{ij} \text{ je nenulový.}$$

Procedúra 4.12.

1. Realizovať krok 1 z procedúry 4.8.

2. V prípade, že d nie je známe, zbehnúť regresiu \hat{E}_t na

$$\{1, X_{t-i}, i = 1, \dots, p, X_{t-i} X_{t-j}, i = 1, \dots, p, j = i, \dots, p, X_{t-i} X_{t-j}^k, i, j = 1, \dots, p, k = 2, 3, 4\}$$

v prípade, že d je známe, zbehnúť regresiu $\hat{\varepsilon}_t$ na

$$\{1, X_{t-i}, i = 1, \dots, p, X_{t-i} X_{t-d}, i = 1, \dots, p, X_{t-i} X_{t-d}^k, i = 1, \dots, p, k = 2, 3, 4\},$$

vypočítať reziduály $\hat{\eta}_t$ a súčet ich štvorcov

$$(4.38) \text{SSR}_4 = \sum_{t=n-p+1}^n \hat{\eta}_t^2.$$

3. Vypočítať štatistiku

$$(4.39) S_4 = (n - p) \frac{\text{SSE}_0 - \text{SSR}_4}{\text{SSE}_0}.$$

Veta 4.13. (Luukkonen, 1988) Nech proces X_t spĺňa predpoklady vety 4.2. Potom za platnosti hypotézy $H_0^{(4)}$ má S_4 asymptoticky χ^2 rozdelenie so stupňami voľnosti $\frac{1}{2} p(p+1) + 3p^2$ (ak nepoznáme d), resp. $4p$ (ak d poznáme).

Pretože v prípade krátkych časových radov môže počet stupňov voľnosti rozdelenia χ^2 prevyšovať počet pozorovaní, môžeme pre známe d použiť namiesto LM testu verziu F testu, v ktorej namiesto štatistiky (4.33) počítame štatistiku

$$(4.40) F_3 = \frac{(\text{SSR}_0 - \text{SSR}_3)/3p}{\text{SSR}_3/(n-5p)},$$

ktorá má asymptoticky Fischerovo F rozdelenie so stupňami voľnosti $3p$ a $n - 5p$, namiesto štatistiky (4.36) štatistiku

$$(4.41) F_2 = \frac{(SSR_0 - SSR_2)/2p}{SSR_2/(n - 4p)},$$

ktorá má asymptoticky Fischerovo F rozdelenie so stupňami voľnosti $2p$ a $n - 4p$ a namiesto štatistiky (4.39) štatistiku

$$(4.42) F_4 = \frac{(SSR_0 - SSR_4)/4p}{SSR_4/(n - 6p)},$$

ktorá má asymptoticky Fischerovo F rozdelenie so stupňami voľnosti $4p$ a $n - 6p$.

IV.4.2 Špecifikácia modelu *STAR*

Ako je zrejmé z (4.22) a (4.25), lineárny $AR(p)$ model je vnorený do modelu *STAR*. Preto je prirodzené predpokladať, že prvým krokom v špecifikácii modelu je testovanie linearít modelu proti špecifikácii *STAR*. Ak nulová hypotéza linearít modelu je akceptovaná, musíme vysloviť záver, že daný časový rad môže byť adekvátne opísaný pomocou lineárneho AR modelu. Ak nulová hypotéza je zamietnutá, má zmysel sa zaoberať špecifikáciou nelineárneho modelu. Postupnosť krokov pri špecifikácii modelu *STAR* definoval Teräsvirta (1994) takto:

- Špecifikácia východzieho lineárneho AR modelu.
- Testovanie linearít pre rôzne hodnoty parametra omeškania d , a v prípade zamietnutia nulovej hypotézy linearít, špecifikovať d .
- Voľba typu modelu medzi *LSTAR* a *ESTAR* pomocou postupnosti testov vnorených hypotéz.

Aj v tomto prípade špecifikujeme východzí lineárny model $AR(4)$ daný vzťahom (4.11) a testujeme jeho linearitu vs. nelinearitu pre hodnoty $d \in \{1,2,3,4\}$ pomocou procedúry 4.8. Výsledky testovania sú v tabuľke 4.8. Vidíme, že obe štatistiky procedúry 4.8 vedú k identifikácii jedinej prechodovej premennej, a to g_{t-3}^* . Tento test súčasne vedie k nezamietnutiu hypotézy, že správnym modelom bude model typu $LSTAR$. Keďže aj procedúra 4.10 vedie k akceptácii alternatívnej hypotézy (model typu $ESTAR$), o vhodnejšom modeli musí rozhodnúť p-hodnota oboch testov. Tá je v prípade procedúry 4.8 rovná 0.0346 (štatistika S_3), resp. 0.0321 (štatistika F_3), kým v prípade procedúry 4.10 je rovná 0.0326 (štatistika S_2), resp. 0.0253 (štatistika F_2). Z uvedených hodnôt vyplýva, že napriek názorom, že hospodárske cykly lepšie modeluje logistický $STAR$ model, v našom prípade by mal byť vhodnejší exponenciálny. My v ďalšom identifikujeme modely oboch typov a porovnáme ich štatistické vlastnosti.

Etrheim a Teräsvirta (1996) tvrdia, že Ljungova-Boxova štatistika seriálovej korelácie nie je vhodným aparátom testovania seriálovej nezávislosti, pretože v prípade reziduálov modelov typu $STAR$ nie je známe asymptotické nulové rozdelenie. Sami navrhujú test typu LM, v ktorom uvažujú nelineárny autoregresný model rádu p

$$(4.43) X_t = F(w_t, \Psi) + E_t$$

Tabuľka 4.8. Výsledky testovania linearity modelu AR vs. $STAR$

Posunutie	Procedúra 3.9		Procedúra 3.11		Procedúra 3.13	
	Štatistika S_3	Štatistika F_3	Štatistika S_2	Štatistika F_2	Štatistika S_4	Štatistika F_4
d=1	14.24595	0.062874	7.930278	0.816413	21.80694	1.630824
d=2	16.96694	1.511336	6.196895	0.593378	22.46523	1.809639
d=3	22.26972	3.188576	16.77299	2.800017	23.36722	2.104733
d=4	18.92886	1.960135	12.88868	1.690136	20.97951	1.439391
Kritická hodnota	21.02607	2.787569	15.50731	2.640797	26.29623	3.494408

s autokorelovanými inováciami

$$(4.44) E_t = \alpha_0 + \sum_{i=0}^p \alpha_i X_{t-i} + e_t,$$

kde e_t je gaussovský biely šum. Testuje sa nulová hypotéza

$$H_0^{(S)} : \alpha_i = 0 \text{ pre všetky } i=1, 2, \dots, p$$

proti alternatívnej hypotéze

$$H_A^{(S)} : \text{aspoň jedno } \alpha_i \neq 0.$$

Ak označíme $\hat{v}_t = (\hat{E}_{t-1}, \dots, \hat{E}_{t-p})$, $w_t = (X_{t-1}, \dots, X_{t-p})$, $\hat{G}_{t-d} = \hat{G}(X_{t-d}; \hat{\gamma}, \hat{c})$,

$\hat{f}_\gamma = \partial \hat{F} / \partial \gamma$, $\hat{f}_{ct} = \partial \hat{F} / \partial c$, $\hat{\theta} = \hat{\phi}^{(2)} - \hat{\phi}^{(1)}$ a m je rozmer vektora gradientov

$\hat{z}_t = \partial F(w_t, \hat{\Psi}) / \partial \Psi$, príslušný test môžeme urobiť nasledujúcou procedúrou:

Procedúra 4.14

1. Nelineárnou metódou najmenších štvorcov odhadnúť model *STAR* za predpokladu nekorelovaných inovácií a vypočítať súčet štvorcov rezíduí SSR_0 .
2. Zbehnúť regresiu \hat{E}_t na $\{\hat{v}_t, w_t, w_t \hat{G}_{t-d}, \hat{\theta}_{w_t} \hat{f}_\gamma, \hat{\theta}_{w_t} \hat{f}_{ct}\}$ a vypočítať súčet štvorcov rezíduí SSR_S .
3. Vypočítať testovaciu štatistiku

$$(4.45) S_S = (n - p) \frac{SSR_0 - SSR_S}{SSR_0}$$

alebo

$$(4.46) F_S = \frac{(SSR_0 - SSR_S) / p}{SSR_S (n - m - p)}.$$

Na základe vety 4.25 z práce White (1984) a práce Eitrheim, Teräsvirta (1996) môžeme vysloviť vetu

Veta 4.15 Nech proces X_t daný vzťahom (4.43) spĺňa predpoklady vety 4.2. Potom za predpokladu platnosti nulovej hypotézy $H_0^{(S)}$ má štatistika S_S asymptoticky rozdelenie χ^2 s p stupňami voľnosti a štatistika F_S Fischerovo rozdelenie so stupňami voľnosti p a $n-m-p$.

Aj v tomto prípade je pre kratšie časové rady výhodnejšie používať F-štatistiku. V prípade, že model je obtiažne špecifikovať vzhľadom na malý počet pozorovaní, Eitrheim a Teräsvirta (1996) navrhujú upraviť v procedúre krok 1 nasledovne:

1'. Zbehnúť regresiu \hat{E}_t na $\{w_t, w_t \hat{G}_{t-d}, \hat{\theta}_{w_t} \hat{f}_\gamma, \hat{\theta}_{w_t} \hat{f}_{ct}\}$ a vypočítať rezíduá \tilde{E}_t a súčet ich štvorcov SSR_0 .

V krokoch 2. a 3. použiť namiesto rezíduí \hat{E}_t rezíduá \tilde{E}_t .

IV.4.3 Model LSTAR

Najskôr špecifikujme parametre logistického autoregresného modelu hladkého prechodu (4.22) s prechodovou funkciou (4.23). Zatiaľ sme špecifikovali len hodnotu parametra d a s ním prechodovú premennú g_{t-3}^* . Všetky ostatné parametre musíme špecifikovať pomocou série nelineárnych regresíí. Nakoniec sme zvolili špecifikáciu, ktorá určuje model v tvare

$$(4.47) \quad g_t^* = (-1.051882g_{t-1}^* - 1.054950g_{t-2}^* - 1.030401g_{t-3}^*) \exp(1.815208(g_{t-3}^* + 1.662396)) / (1 + \exp(1.815208(g_{t-3}^* + 1.662396))) + (0.311609g_{t-1}^* + 0.429456g_{t-3}^* + 0.511322g_{t-4}^*) / (1 + \exp(1.815208(g_{t-3}^* + 1.662396))) + E_t$$

Štatistické vlastnosti parametrov modelu *LSTAR* sú uvedené v tabuľke 4.9. Vidíme, že všetky parametre sú významné s výnimkou parametra hladkosti γ .

Viacerí autori tvrdia, že práve špecifikácia tohoto parametra je najproblematickejšia, pretože jeho presný odhad vyžaduje veľký počet pozorovaní v bezprostrednom okolí prahu c (Krolzig, 2002), no nevýznamnosť γ nemôže byť interpretovaná ako dôkaz neexistencie nelinearity typu *STAR* (Bates a Watts, 1988).

Tabuľka 4.9 Štatistické vlastnosti parametrov modelu *LSTAR* a radu inovácií

<i>Premenná</i>	<i>Koeficient</i>	<i>Štandardná chyba</i>	<i>t-štatistika</i>	<i>p-hodnota</i>
ϕ_1	-1.051882	0.116753	-9.009478	0.0000
ϕ_2	-1.054950	0.121709	-8.667778	0.0000
ϕ_3	-1.030401	0.115765	-8.900830	0.0000
φ_1	0.311609	0.138514	2.249654	0.0343
φ_3	0.429456	0.139111	3.087134	0.0052
φ_4	0.511322	0.163209	3.132935	0.0047
γ	-1.815208	2.124230	-0.854525	0.4016
c	-1.662396	0.425669	-3.905373	0.0007
<i>Parameter</i>	<i>Hodnota</i>	<i>Miera presnosti</i>	<i>Hodnota</i>	
Koeficient determinácie	0.909565	Odmocnina priemernej	1.626644	
Adjustovaný koef. determinácie	0.882041	štvorcovej chyby		
Štandardná chyba regresie	1.888816	Priemerná absolútna chyba	0.945972	
Súčet štvorcov rezíduí	82.05536	Priemerná absolútna	0.301734	
Logaritmická vierohodnosť	-59.07490	percentuálna chyba		
Akaikeho informačné kritérium	4.327413	Koeficient Theilovej nerovnosti	0.153872	
<i>Analýza radu inovácií</i>	<i>Štatistika</i>	<i>P-hodnota</i>		
Jarqueho-Berrov test normality	3.276842	0.198702		
Test $\mu=0$	0.142470	0.887661		
Upravený test seriálovej korelácie	2.508021	0.067049		
LM test seriálovej korelácie	0.334299	0.851432		
ARCH test heteroskedasticity	0.134466	0.967933		

Aj rad inovácií modelu (4.47) sme podrobili niekoľkým testom. Hodnota t-štatistiky testu nulovej strednej hodnoty inovácií je 0.1425, čo vedie k p-hodnote 0.8877, takže hypotézu, že rad inovácií má nulovú strednú hodnotu nezamietame. Hodnota F-štatistiky pri teste seriálovej korelácie danom upravenou procedúrou 4.17 je 2.5080, čo vedie k p-hodnote 0.0670. Podobne, hodnota F-štatistiky pri štandardnom teste seriálovej korelácie je 0.3343, čo dáva p-hodnotu 0.8514, takže hypotézu neexistencie seriálovej korelácie nezamietame. Hodnota F-štatistiky pri ARCH LM teste je 0.1345, čo vedie k p-hodnote 0.9679, takže hypotézu neexistenciu podmienenej autoregresnej heteroskedasticity môžeme nezamietnuť. Konečne, Jarqueho-Berrova štatistika (3.2768) vedie k p-hodnote 0.1987, takže nezamietame ani hypotézu normality radu inovácií.

Tabuľka 4.10 Výsledky modelovania HDP modelom LSTAR

Štvrťrok	Rast HDP	Dynamická predikcia		Adjustovaná statická predikcia	
	(HDP)	Rast HDP (HDP)	95% interval spoľahlivosti	Rast HDP (HDP)	95% interval spoľahlivosti
2002:1	-3.55 (171.1)	-5.89 (166.9)	(-8.59, -3.19)	-5.89 (166.9)	(-8.59, -3.19)
2002:2	10.17 (188.5)	10.53 (184.5)	(7.83, 13.23)	8.11 (185.0)	(5.59, 10.62)
2002:3	1.75 (191.8)	2.26 (188.7)	(-0.44, 4.96)	2.12 (192.5)	(-0.40, 4.64)
2002:4	-2.50 (187.0)	-3.84 (181.5)	(-6.54, -1.13)	-3.04 (186.0)	(-5.56, -0.52)
<i>Miera presnosti</i>					
Odmocnina priemernej štvorcovej chyby		1.382655 (4.277950)		1.594076 (2.795616)	
Priemerná absolútna chyba		1.136697 (4.187499)		1.328163 (2.353294)	
Priemerná absolútna percentuálna chyba		0.379471 (0.022763)		0.332256 (0.013039)	
Koefficient Theilovej nerovnosti		0.114929 (0.011709)		0.145710 (0.007605)	

Údaje v percentách, v zátvorke v miliardách SKK v stálych cenách z roku 1995.

Pomocou modelu *STAR* urobíme predikciu ex-post tempa rastu HDP Slovenska v roku 2002 oboma uvažovanými spôsobmi. Výsledky predikcie spolu s príslušnými modelovanými hodnotami HDP sú uvedené v tabuľke 4.10 ako aj na obrázku 4.3.

IV.4.4 Model ESTAR

Teraz špecifikujme parametre exponenciálneho autoregresného modelu hladkého prechodu (4.22) s prechodovou funkciou (4.24). Podobne, ako pri predošlom modeli, sme špecifikovali hodnotu parametra $d=3$ a s ním prechodovú premennú g_{t-3}^* . Všetky ostatné parametre musíme špecifikovať pomocou série nelineárnych regresíí. Nakoniec sme zvolili špecifikáciu, ktorá vedie k modelu

$$(4.48) \quad g_t^* = (-0.777481g_{t-3}^* + 1.413415g_{t-4}^*) \exp(-0.095060(g_{t-3}^* - 2.668559)^2) + (-0.471070g_{t-1}^* - 0.720133g_{t-2}^* - 0.465147g_{t-3}^*) \times (1 - \exp(-0.095060(g_{t-3}^* - 2.668559)^2)) + E_t$$

Štatistické vlastnosti parametrov modelu sú uvedené v tabuľke 4.11.

Porovnávajúc model *ESTAR* s modelom *LSTAR* vidíme, že oba majú približne zhodné štatistické vlastnosti, avšak v modeli *ESTAR* sa nám podarilo špecifikovať významný parameter hladkosti. Ostáva ešte ukázať, že model bol špecifikovaný korektne.

Analýza radu inovácií modelu (4.48) viedla k týmto výsledkom: Jarqueho-Berova štatistika má hodnotu 3.2318 (príslušná p-hodnota je 0.1987), takže môžeme nezamietnuť hypotézu, že inovácie majú normálne rozdelenie. Hodnota F-štatistiky pri teste seriálovej korelácie danom upravenou procedúrou 4.17 je

0.9650, čo vedie k p-hodnote 0.4440. Podobne, hodnota F-štatistiky pri štandardnom teste seriálovej korelácie je 0.6991, čo dáva p-hodnotu 0.6016, takže hypotézu neexistencie seriálovej korelácie nezamietame. Hodnota F-štatistiky pri ARCH LM teste je 0.4340, čo vedie k p-hodnote 0.7825. Takže nezamietame hypotézu neexistencie podmienenej autoregresnej heteroskedasticity.

Tabuľka 4.11 Štatistické vlastnosti parametrov modelu *ESTAR* a radu inovácií

<i>Premenná</i>	<i>Koeficient</i>	<i>Štandardná chyba</i>	<i>t-štatistika</i>	<i>p-hodnota</i>
ϕ_3	-0.777481	0.379698	-2.047633	0.0517
ϕ_4	1.413415	0.157844	8.954533	0.0000
ϕ_1	-0.471070	0.160721	-2.930987	0.0073
ϕ_2	-0.720133	0.116264	-6.193937	0.0000
ϕ_3	-0.465147	0.156981	-2.963079	0.0068
γ	0.095060	0.032414	2.932640	0.0073
<i>c</i>	2.668559	0.487889	5.469601	0.0000
<i>Parameter</i>	<i>Hodnota</i>	<i>Miera presnosti</i>	<i>Hodnota</i>	
Koeficient determinácie	0.907646	Odmocnina priemernej	1.644114	
Adjustovaný koef. determinácie	0.884557	štvorcovej chyby		
Štandardná chyba regresie	1.868560	Priemerná absolútna chyba	1.171880	
Súčet štvorcov rezíduí	83.79640	Priemerná absolútna	0.524530	
Logaritmická vierohodnosť	-59.40034	percentuálna chyba		
Akaikeho informačné kritérium	4.283893	Koeficient Theilovej nerovnosti	0.155576	
<i>Analýza radu inovácií</i>		<i>Štatistika</i>	<i>P-hodnota</i>	
Jarqueho-Berrov test normality		3.231896	0.198702	
Test $\mu=0$		-0.726815	0.472973	
Upravený test seriálovej korelácie		0.964988	0.443983	
LM test seriálovej korelácie		0.699078	0.601598	
ARCH test heteroskedasticity		0.434045	0.782546	

Špecifikácia parametrov oboch modelov je obtiažna. Vyplýva to z nelinearity funkcie maximálnej vierohodnosti, ktorá v našom prípade mala viacero lokálnych maxím. V dôsledku toho sme pre niektoré kombinácie parametrov našli viacero hodnôt, kým pre niektoré iné kombinácie parametrov software neskonvergoval k žiadnemu maximu.

Pri porovnaní výsledkov predikcie ex-post vidíme, že oba modely majú lepšie predikčné vlastnosti, než východzí lineárny model (4.11), čo sme však aj predpokladali. Zo vzájomného porovnania modelov *LSTAR* a *ESTAR* nám vychádza, na rozdiel od iných autorov, lepšie exponenciálny autoregresný model hladkého prechodu.

Tabuľka 4.12 Výsledky modelovania HDP modelom *ESTAR*

Štvrťrok	Rast HDP	Dynamická predikcia		Adjustovaná statická predikcia	
	(HDP)	Rast HDP (HDP)	95% interval spoľahlivosti	Rast HDP (HDP)	95% interval spoľahlivosti
2002:1	-3.55 (171.1)	-2.73 (172.6)	(-6.25, 0.80)	-2.73 (172.6)	(-6.25, 0.80)
2002:2	10.17 (188.5)	10.89 (191.3)	(7.35, 14.42)	10.45 (189.0)	(8.66, 12.25)
2002:3	1.75 (191.8)	- 0.17(191.0)	(-3.70, 3.371)	0.75 (189.9)	(-1.04, 2.54)
2002:4	-2.50 (187.0)	-5.19 (181.1)	(-8.72, -1.66)	-3.47 (185.2)	(-5.26, -1.67)
<i>Miera presnosti</i>					
Odmocnina priemernej štvorcovej chyby		1.737316 (3.371465)		0.818429 (1.525973)	
Priemerná absolútna chyba		3.688792 (2.739594)		0.766622 (1.417955)	
Priemerná absolútna percentuálna chyba		0.617230 (0.014774)		0.303748 (0.007694)	
Koeficient Theilovej nerovnosti		0.147450 (0.009138)		0.072527 (0.004135)	

Údaje v percentách, v zátvorke v miliardách SKK v stálych cenách z roku 1995.

IV.4.5 Viacrežimové autoregresné modely hladkého prechodu MRSTAR

Van Dijk a Franses (1999) opísali rozšírenie STAR modelu umožňujúce viac než dva režimy, pretože ako ukázali, základný STAR model umožňuje len dva režimy bez ohľadu na zvolenú prechodovú funkciu. Nedostatkom viacrežimového autoregresného modelu hladkého prechodu *MRSTAR* (*Multiregime Smooth Transition Autoregressive Model*) je to, že umožňuje použiť len logistickú prechodovú funkciu. Najjednoduchším modelom typu *MRSTAR* je model, ktorý vznikne spojením dvoch modelov typu *LSTAR*, ktorý môžeme zapísať v tvare

$$(4.49) \quad X_t = \left(\left(\phi_0^{(1)} + \sum_{i=1}^p \phi_i^{(1)} X_{t-i} \right) (1 - G_1(u_{1t}; \gamma_1, c_1)) + \left(\phi_0^{(2)} + \sum_{i=1}^p \phi_i^{(2)} X_{t-i} \right) G_1(u_{1t}; \gamma_1, c_1) \right) \times \\ (1 - G_2(u_{2t}; \gamma_2, c_2)) + \\ \left(\left(\phi_0^{(3)} + \sum_{i=1}^p \phi_i^{(3)} X_{t-i} \right) (1 - G_1(u_{1t}; \gamma_1, c_1)) + \left(\phi_0^{(4)} + \sum_{i=1}^p \phi_i^{(4)} X_{t-i} \right) G_1(u_{1t}; \gamma_1, c_1) \right) \times \\ G_2(u_{2t}; \gamma_2, c_2) + E_t$$

pričom obe prechodové funkcie musia byť v tvare (4.23). Podobným spôsobom môžeme model *MRSTAR* zovšeobecniť.

Model (4.49) sa dá prepísať do tvaru

$$(4.50) \quad X_t = \left(\theta_0^{(1)} + \sum_{i=1}^p \theta_i^{(1)} X_{t-i} \right) + \left(\theta_0^{(2)} + \sum_{i=1}^p \theta_i^{(2)} X_{t-i} \right) G_1(u_{1t}; \gamma_1, c_1) + \\ \left(\theta_0^{(3)} + \sum_{i=1}^p \theta_i^{(3)} X_{t-i} \right) G_2(u_{2t}; \gamma_2, c_2) + \\ \left(\theta_0^{(4)} + \sum_{i=1}^p \theta_i^{(4)} X_{t-i} \right) G_1(u_{1t}; \gamma_1, c_1) G_2(u_{2t}; \gamma_2, c_2) + E_t$$

V tej istej práci je návrh testu typu LM. Testovuje sa nulová hypotézu $H_0^{(M)}$ správnosti špecifikácie *LSTAR* proti alternatívnej hypotéze $H_A^{(M)}$ existencie viacerých režimov, teda

$$H_0^{(M)} : \theta_i^{(k)} = 0 \text{ pre všetky } i=0,1,\dots,p, k=3,4$$

proti

$$H_A^{(M)} : \text{aspoň jedno } \theta_i^{(k)} \neq 0.$$

Ak, podobne ako v procedúre 4.14, označíme $w_t = (X_{t-1}, \dots, X_{t-p})$, $\hat{G}_{t-d} = \hat{G}(X_{t-d}; \hat{\gamma}, \hat{c})$, $\hat{f}_\gamma = \partial \hat{F} / \partial \gamma$, $\hat{f}_{ct} = \partial \hat{F} / \partial c$ a $\hat{\theta}_2 = \hat{\phi}^{(2)} - \hat{\phi}^{(1)}$, testovacia procedúra má tvar:

Procedúra 4.16

1. Nelineárnou metódou najmenších štvorcov odhadnúť model *LSTAR* za predpokladu nekorelovaných inovácií a vypočítať súčet štvorcov rezíduí SSR_0 .
2. Zbehnúť regresiu \hat{E}_t na $\{w_t, w_t \hat{G}_{t-d}, \hat{\theta}_2 w_t \hat{f}_\gamma, \hat{\theta}_2 w_t \hat{f}_{ct}\}$ a vypočítať súčet štvorcov rezíduí SSR_M .
3. Vypočítať testovaciu štatistiku

$$(4.51) F_M = \frac{(SSR_0 - SSR_M)/(6p)}{SSR_S(n - 6p)}$$

Podobne, ako v procedúre 4.14, môžeme modifikovať krok 1

- 1'. Zbehnúť regresiu \hat{E}_t na $\{w_t, w_t \hat{G}_{t-d}\}$ a vypočítať rezíduá \tilde{E}_t a súčet ich štvorcov SSR_0 .

V krokoch 2. a 3. použiť namiesto rezíduí \hat{E}_t rezíduá \tilde{E}_t .

Po zbehnutí procedúry 4.16 dostávame hodnotu štatistiky $F_M = 9.686479$, čo vedie k p-hodnote 0.024, takže hypotézu $H_0^{(M)}$ na hladine významnosti $\alpha = 0.05$ zamietame.

Nelineárnou metódou najmenších štvorcov sme špecifikovali nasledujúci model *MRSTAR*:

$$(4.52) \quad g_t^* = 0.829413g_{t-1}^* + \\ - (0.946177g_{t-1}^* - 0.483135g_{t-2}^*) / (1 + \exp(6.423843(g_{t-3}^* - 7.023063))) - \\ 0.603773g_{t-2}^* / (1 + \exp(-2.108751(g_{t-3}^* + 1.258383))) - (1.974660g_{t-1}^* + 1.307780g_{t-3}^*) / \\ ((1 + \exp(6.423843(g_{t-3}^* - 7.023063))) (1 + \exp(-2.108751(g_{t-3}^* + 1.258383)))) + E_t$$

Podobne, ako pri dvojurežimových modeloch typu *STAR*, aj pri viacrežimovom modeli najväčším problémom bola existencia viacerých lokálnych extrémov funkcie maximálnej vierohodnosti. Navyše výpočty boli silne nestabilné. Štatistické vlastnosti parametrov modelu (4.52) sú v tabuľke 4.13.

Ak porovnáваме modely *LSTAR* a *MRSTAR* vidíme, že viacrežimový model má lepšie štatistické vlastnosti - vyšší koeficient determinácie vrátane adjustovaného (0.923853 a 0.892701 proti 0.909565 a 0.882041) a nižšiu štandardnú chybu regresie (1.802223 proti 1.888816) a súčet štvorcov rezíduí (71.45618 proti 82.05536). Pretože model *LSTAR* je vnorený do modelu *MRSTAR*, má zmysel porovnať aj Akaikeho informačné kritérium. Vidíme, že aj v tomto ukazovateli je viacrežimový model lepší (4.266226 proti 4.327413).

Analýza radu inovácií modelu (4.52) vedie k týmto záverom: Jarqueho-Berrova štatistika má hodnotu 1.4280 (p-hodnota je 0.4897), teda nezamietame hypotézu, že rad inovácií má normálne rozdelenie. Test nulovej strednej hodnoty dáva t-štatistiku 0.0379 s príslušnou p-hodnotou 0.9700. F-štatistika LM testu seriálovej

korelácie až do rádu 4 je 0.0962 (s p-hodnotou 0.9824) a ARCH testu 0.044389 (p-hodnota 0.9660).

Aj modelom *MRSTAR* sme urobili predikciu ex-post tempo rastu HDP Slovenska v roku 2002. Výsledky predikcie sú v tabuľke 4.14 a na obrázku 4.3. Z nich je vidieť, že hoci model *MRSTAR* dosahoval lepšie výsledky než model *LSTAR*, v porovnaní s modelom *ESTAR* však bol horší.

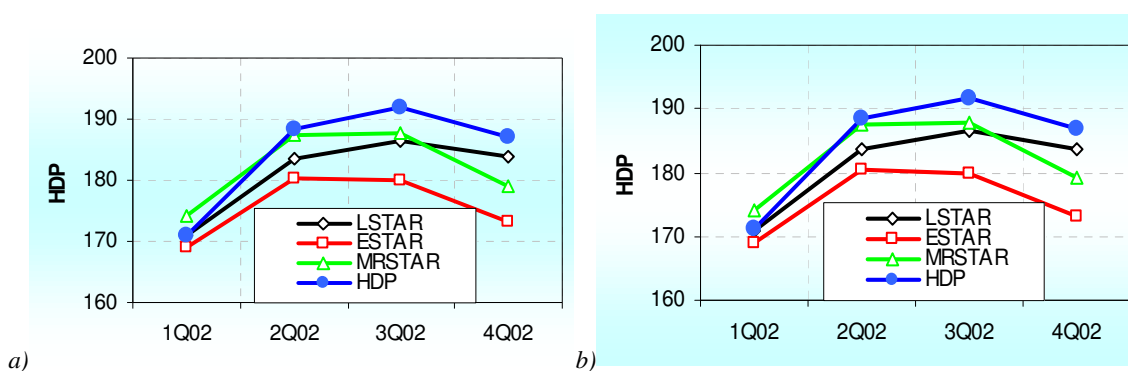
Tabuľka 4.13 Štatistické vlastnosti parametrov modelu *MRSTAR* a radu inovácií

<i>Premenná</i>	<i>Koeficient</i>	<i>Štandardná chyba</i>	<i>t-štatistika</i>	<i>p-hodnota</i>
$\theta_1^{(1)}$	0.829413	0.253355	3.273719	0.0035
$\theta_1^{(2)}$	-0.946177	0.268638	-3.522120	0.0019
$\theta_2^{(2)}$	-0.483135	0.077234	-6.255516	0.0000
$\theta_2^{(3)}$	-0.603773	0.144405	-4.181107	0.0004
$\theta_1^{(4)}$	-1.028484	0.149345	-6.886618	0.0000
$\theta_3^{(4)}$	-1.307780	0.180275	-7.254362	0.0000
γ_1	-6.423843	6.902018	-0.930720	0.3621
γ_2	2.108751	1.520035	1.387305	0.1792
c_1	7.023063	0.155900	45.04864	0.0000
c_2	-1.258383	0.419768	-2.997806	0.0066
<i>Parameter</i>	<i>Hodnota</i>	<i>Miera presnosti</i>	<i>Hodnota</i>	
Koeficient determinácie	0.923853	Odmocnina priemernej	1.494325	
Adjustovaný koef. determinácie	0.892701	štvorcovej chyby		
Štandardná chyba regresie	1.802223	Priemerná absolútna chyba	0.867002	
Súčet štvorcov rezíduí	71.45618	Priemerná absolútna	0.386330	
Logaritmickej vierohodnosť	-58.25961	percentuálna chyba		
Akaikeho informačné kritérium	4.266226	Koeficient Theilovej nerovnosti	0.140702	
<i>Analýza radu inovácií</i>		<i>Štatistika</i>	<i>P-hodnota</i>	
Jarqueho-Berrov test normality		1.428043	0.489671	
Test $\mu=0$		0.037866	0.970037	
LM test seriálovej korelácie		0.096180	0.982377	
ARCH test heteroskedasticity		0.044389	0.996002	

Tabuľka 4.14 Výsledky modelovania HDP modelom MRSTAR

Štvrťrok	Rast HDP	Dynamická predikcia		Adjustovaná statická predikcia	
	(HDP)	Rast HDP (HDP)	95% interval spoľahlivosti	Rast HDP (HDP)	95% interval spoľahlivosti
2002:1	-3.55 (171.1)	-3.39 (171.4)	(-5.22, 1.57)	-3.39 (171.4)	(-5.22, 1.57)
2002:2	10.17 (188.5)	8.17 (185.4)	(6.35, 9.99)	8.35 (185.4)	(6.39, 10.31)
2002:3	1.75 (191.8)	1.43 (188.0)	(-0.38, 3.26)	1.27 (190.1)	(-0.69, 3.23)
2002:4	-2.50 (187.0)	-3.41 (181.6)	(-5.23, -1.58)	-4.42 (183.3)	(-6.37, -2.46)
<i>Miera presnosti</i>					
Odmocnina priemernej štvorcovej chyby		1.111193 (3.634294)		1.344009 (2.452064)	
Priemerná absolútna chyba		0.845053 (3.132974)		1.092642 (1.991896)	
Priemerná absolútna percentuálna chyba		0.196293 (0.016629)		0.315589 (0.010623)	
Koeficient Theilovej nerovnosti		0.106912 (0.009917)		0.126122 (0.006699)	

Údaje v percentách, v zátvorke v miliardiach SKK v stálych cenách z roku 1995.



Obrázok 4.3. Predikcia hodnoty HDP Slovenska na rok 2002 získaná modelmi LSTAR, ESTAR a MRSTAR dynamickou predikciou (a) a adjustovanou statickou predikciou (b). Údaje sú v miliardiach SKK v stálych cenách z roku 1995

IV.5 Markovove modely prepínania režimov

Dvojrežimový Hamiltonov Markovov model prepínania režimov (Kuan, 2002) môžeme zapísať v tvare

$$(4.53) X_t = \begin{cases} \alpha_0 + \sum_{i=1}^k \varphi_i X_{t-i} + E_t & S_t = 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \sum_{i=1}^k \varphi_i X_{t-i} + E_t & S_t = 1 \end{cases},$$

alebo

$$(4.54) X_t = \alpha_0 + \alpha_1 S_t + \sum_{i=1}^k \varphi_i X_{t-i} + E_t$$

kde S_t je binárna stavová premenná. Vidíme, že je formálne podobný samobudiacemu prahovému autoregresnému modelu, no medzi nimi je podstatný rozdiel. Kým v modeli *SETAR* (a aj v modeli *STAR*) je prahová premenná, teda premenná, pomocou ktorej sa určuje aktuálny režim, endogénnou pozorovateľnou premennou modelu, v Markovovom modeli je aktuálny režim určený hodnotou exogénneho nepozorovateľného Markovovho reťazca S . Predpoklad binarity stavovej premennej nie je nevyhnutný; väčší počet hodnôt S vedie k modelu s viac než dvoma režimami. Markovov model tak vzniká kombináciou dvoch (alebo viacerých) dynamických modelov pomocou markovovského mechanizmu prepínania.

Výhodou Markovovho modelu prepínania režimov je, že nevyžaduje ad hoc odhad hodnôt prahov, teda bodov, v ktorých dochádza k zmene režimov. Namiesto toho model len odhaduje pravdepodobnosť s akou sa ekonomika nachádza v každom z identifikovaných režimov. Umožňuje to algoritmus, ktorý plne využíva vlastnosti Markovovho procesu ako aj predpoklady o rozdelení pravdepodobností vysvetľovanej premennej, *Hamiltonov filter*. Inými slovami,

pri odhade Markovovho modelu nás zaujíma časovanie prepínania režimov, teda štrukturálne zmeny modelu.

Markovov model prepínania režimov, tak ako ho zaviedol v svojej zárodočnej práci Hamilton (1989), je zameraný na správanie sa strednej hodnoty premenných, pričom môže byť použitý na modelovanie širokého rozpätia ekonomických a finančných časových radov, napr. hospodárskych cyklov (Kim a Nelson (1998), Huang (1999), Krolzig a Sensier (2000), Kim a kol. (2002)), reálnej úrokovej miery (Garcia a Perron (1996)), výnosov z cenných papierov (Scheller a van Norden (1997)), výmenného kurzu (Frömmel, MacDonald, Menkhoff (2002)). Tento typ Markovovho modelu voláme aj modelom podmienenej strednej hodnoty. Pretože sa model podmienenej strednej hodnoty ukázal byť úspešným, v literatúre sa môžeme stretnúť aj s jeho prirodzenými modifikáciami, Markovovými modelmi prepínania režimov podmienenej variancie *ARCH* (*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Model*) a *GARCH* (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Model*). Týmito modelmi sa v našej práci nebudeme zaoberať.

Vzniká otázka, akú informáciu máme o stavovej premennej v modeli (4.53), keďže nie je pozorovateľná. Predpokladáme, že prechod medzi stavmi je riadený Markovovym procesom prvého rádu

$$(4.55) \quad \begin{aligned} \Pr[S_t = 1 | S_{t-1} = 1] &= p \\ \Pr[S_t = 0 | S_{t-1} = 1] &= 1 - p \\ \Pr[S_t = 0 | S_{t-1} = 0] &= q \\ \Pr[S_t = 1 | S_{t-1} = 0] &= 1 - q \end{aligned} ,$$

čo môžeme vyjadriť aj maticou prechodu

$$(4.56) \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \Pr[S_t = 1 | S_{t-1} = 1] & \Pr[S_t = 1 | S_{t-1} = 0] \\ \Pr[S_t = 0 | S_{t-1} = 1] & \Pr[S_t = 0 | S_{t-1} = 0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{10} \\ p_{01} & p_{00} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix}.$$

Je jasné, že pre pravdepodobnosti prechodu platí $p_{i0} + p_{i1} = 1$. Matica prechodu určuje náhodné správanie stavovej premennej S , pričom obsahuje dve premenné, p_{11} a p_{00} .

V Markovovom modeli prepínania režimov sú vlastnosti X_t určené spoločne náhodnými charakteristikami inovácií E_t a stavovej premennej S_t . Presnejšie, markovovská stavová premenná poskytuje náhodné a časté zmeny štruktúry modelu a pravdepodobnosti prechodu určujú trvanie každého režimu. Hoci prahové modely majú podobné vlastnosti, Markovov model sa implementuje relatívne jednoduchšie, pretože nie je potrebné vopred poznať hodnotu prahu. Namiesto toho, určenie režimu je náhodné a určené dátami. Problémy však môžu vzniknúť pri interpretácii, pretože stavová premenná nie je pozorovateľná.

IV.5.1 Odhad parametrov modelu

Je niekoľko spôsobov, ako sa dajú parametre Markovovho modelu zmeny režimu odhadnúť. Hamilton (1989, 1990, 1994), Kim (1994) a Kim a Nelson (1999) odhadujú parametre pomocou kvázi maximálnej vierohodnosti, kým Albert a Chib (1993), McCulloch a Tsay (1994) a Kim a Nelson (1999) pomocou Gibbových výberov, čo nie je nič iné len simulácia Markovovho reťazca metódou Monte Carlo. My zvolíme prvú, klasickú, metódu.

Označme vektor parametrov modelu (4.53) ako θ , t.j. $\theta = (\alpha_0, \alpha_1, \varphi_1, \dots, \varphi_k, \sigma_E^2, p, q)^T$. Nech $X^t = \{X_t, X_{t-1}, \dots, X_1\}$ označuje množinu všetkých pozorovaných premenných až do času t , ktorá reprezentuje informačnú

množinu, ktorú máme v čase t . Potom X^N označuje informačnú množinu založenú na celom výbere. Funkcia kvázi logaritmickej vierohodnosti má tvar

$$(4.57) L_N(\theta) = \frac{1}{N-k} \sum_{t=k+1}^N \ln f(X_t | X^{t-1}; \theta),$$

kde

$$(4.58) f(X_t | X^{t-1}; \theta) = \Pr[S_t = 0 | X^{t-1}; \theta] f(X_t | S_t = 0, X^{t-1}; \theta) + \Pr[S_t = 1 | X^{t-1}; \theta] f(X_t | S_t = 1, X^{t-1}; \theta)$$

pričom za predpokladu normality má hustota rozdelenia X_t podmienené vzhľadom na X^{t-1} tvar

$$(4.59) f(X_t | S_t = i, X^{t-1}; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_E^2}} \exp\left(-\frac{(X_t - \alpha_0 - \alpha_1 i - \varphi_1 X_{t-1} - \dots - \varphi_k X_{t-k})^2}{2\sigma_E^2}\right)$$

pre $i = 0, 1$. Filtrujúce pravdepodobnosti S_t sú z Bayesovej vety dané rekurentným vzťahom

$$(4.60) \Pr[S_t = i | X^t; \theta] = \frac{\Pr[S_t = i | X^{t-1}; \theta] f(X_t | S_t = i, X^{t-1}; \theta)}{f(X_t | X^{t-1}; \theta)}$$

a, konečne, predikčné pravdepodobnosti vzťahom

$$(4.61) \Pr[S_{t+1} = i | X^t; \theta] = p_{0i} \Pr[S_{t+1} = 0 | X^t; \theta] + p_{1i} \Pr[S_{t+1} = 1 | X^t; \theta].$$

Pri vhodnej voľbe začiatocnej iterácie, môžeme vzťahy (4.57) až (4.61) iteratívne odvodiť pre $t = k, k+1, \dots, N$. Hamilton v práci (1989) navrhuje začiatocnú iteráciu pravdepodobnosti $\Pr[S_k = i | X^{k-1}; \theta]$, vypočítať pomocou limitnej pravdepodobnosti Markovovho procesu S rovnej $\pi = \frac{1-q}{1-p+1-q}$, kým

v učebnici (1994) navrhuje vziať tretí stĺpec matice $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$, kde matica $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{P} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$. V tomto prípade je \mathbf{I} jednotková matica typu 2x2, \mathbf{P} je matica prechodu a $\mathbf{1}$ je vektor dvoch jednotiek. Po skonštruovaní funkcie kvázi maximálnej vierohodnosti (4.57) nájdeme jej maximum nejakou numerickou metódou.

IV.5.2 Špecifikácia Markovovho modelu tempa rastu HDP

Pretože Hamiltonov Markovov model uvažuje zmenu režimu len v konštantnom člene autoregresnej rovnice, budeme hľadať Markovov model tempa rastu HDP Slovenska v časovom rade RH , pričom v modeli (4.54) budeme uvažovať $k=4$:

$$(4.62) \quad g_t = \alpha_0 + \alpha_1 S_t + \varphi_1 g_{t-1} + \varphi_2 g_{t-2} + \varphi_3 g_{t-3} + \varphi_4 g_{t-4} + E_t.$$

Funkciu $f(X_t | X^{t-1}; \theta)$ potom môžeme vyjadriť v tvare

$$(4.63) \quad f(X_t | X^{t-1}; \theta) = \sum_{s_t=0}^1 \sum_{s_{t-1}=0}^1 \sum_{s_{t-2}=0}^1 \sum_{s_{t-3}=0}^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_E^2}} \exp \left[- \frac{\left(\left(X_t - \sum_{i=1}^4 \varphi_i X_{t-i} \right) - \alpha_0 \left(1 - \sum_{i=1}^4 \varphi_i \right) - \alpha_1 \left(1 - \sum_{i=1}^4 \varphi_i s_{t-i} \right) \right)^2}{2\sigma_E^2} \right] \\ \times \Pr[S_t = s_t, S_{t-1} = s_{t-1}, S_{t-2} = s_{t-2}, S_{t-3} = s_{t-3}]$$

Po dosadení do (4.57) dostaneme funkciu kvázi maximálnej vierohodnosti modelu (4.62). Jej extrém sme hľadali Newtonovou metódou, pričom sme dostali vektor parametrov θ , ktorý je uvedený v tabuľke (4.15). V tej istej tabuľke uvádzame na porovnanie aj hodnoty zodpovedajúceho $AR(4)$ modelu. Vidíme, že hodnoty autoregresných parametrov v oboch modeloch sú takmer zhodné a parameter α_1 je veľmi malý, takže môžeme predpokladať, že je nulový. Podobne, hodnota pravdepodobnosti prechodu z oboch stavov, nula i

jedna, do stavu jedna je 0.000001, teda blízka nule, a do stavu nula je 0.999999, teda blízka jednotke. Môžeme konštatovať, že v časovom rade tempa rastu HDP sa nám nepodarilo identifikovať Hamiltonov Markovov model.

Tabuľka 4.15 Parametre Hamiltonovho Markovovho modelu prepínania režimov

<i>Parameter</i>	<i>Hodnota parametra v Markovovom modeli</i>	<i>Hodnota parametra v modeli AR(4)</i>
α_0	1.188390	1.188413
α_1	-0.000008	*
φ_1	-0.482157	-0.482185
φ_2	-0.542543	-0.524561
φ_3	-0.400291	-0.400307
φ_4	0.471846	0.471834
σ^2	2.503356	*
p	0.000001	*
q	0.999999	*
Koeficient determinácie	0.809801	0.851355
Adjustovaný koef. determinácie	0.740637	0.828487
Štandardná chyba regresie	2.822430	2.295189
Súčet štvorcov rezíduí	175.2545	136.9652

* - parameter nie je špecifikovaný

IV.6 Porovnanie predikčných schopností modelov

V závere porovnáme štatistické vlastnosti predikčných schopností odvodených nelineárnych modelov pri predikcii ex-post HDP Slovenska v roku 2002. Hodnoty štyroch základných charakteristík (odmocniny priemernej štvorcovej chyby, priemernej absolútnej chyby, priemernej absolútnej percentuálnej chyby a koeficientu Theilovej nerovnosti) sú uvedené v tabuľke 4.16 pre dynamickú predikciu a v tabuľke 4.17 pre adjustovanú statickú predikciu. Kvôli porovnaniu, v oboch tabuľkách sú uvedené aj hodnoty charakteristík získané pri predikcii východným modelom $AR(4)$, modelom *SARIMA* identifikovanom v časovom rade *RHP* a najlepším modelom identifikovaným Boxovou-Jenkinsovou metodológiou, M_{RH} .

Tabuľka 4.16 Miery presnosti predikcie modelov získané dynamickou predikciou

<i>Model</i>	<i>Odmocnina priemernej štvorcovej chyby</i>	<i>Priemerná absolútna chyba</i>	<i>Priemerná absolútna percentuálna chyba</i>	<i>Koeficient Theilovej nerovnosti</i>
<i>SETAR(4,3;0)</i>	4.735730	4.327432	0.023391	0.012341
<i>SETAR(4,3;(0,4))</i>	2.976010	2.568444	0.013710	0.008102
<i>LSTAR</i>	4.277950	4.187499	0.022763	0.011709
<i>ESTAR</i>	3.371465	2.739594	0.014774	0.009138
<i>MRSTAR</i>	3.634294	3.132974	0.016629	0.009917
<i>AR(4)</i>	5.279674	4.715251	0.025173	0.014474
<i>SARIMA</i>	4.430528	3.035776	0.016209	0.024113
<i>M_{RH}</i>	2.040314	1.489649	0.007957	0.010753

Tabuľka 4.17 Miery presnosti predikcie modelov získané adjustovanou statickou predikciou

<i>Model</i>	<i>Odmocnina priemernej štvorcovej chyby</i>	<i>Priemerná absolútna chyba</i>	<i>Priemerná absolútna percentuálna chyba</i>	<i>Koeficient Theilovej nerovnosti</i>
<i>SETAR(4,3;0)</i>	3.137349	3.013246	0.016411	0.008559
<i>SETAR(4,3;(0,4))</i>	2.816551	2.408586	0.012884	0.007665
<i>LSTAR</i>	2.795616	2.353294	0.013039	0.007605
<i>ESTAR</i>	1.525973	1.417955	0.007694	0.004135
<i>MRSTAR</i>	2.452064	1.991896	0.010623	0.006699
<i>AR(4)</i>	4.431189	3.982237	0.021297	0.012123
<i>SARIMA</i>	6.103130	5.392595	0.028591	0.033996
<i>M_{RH}</i>	2.313392	1.895441	0.010430	0.012286

Výsledky predikcie ukazujú, že nelineárne modely poskytujú vo všeobecnosti lepšiu predikciu, než nielen východzí model *AR(4)*, ale aj lepšiu predikciu než model *SARIMA* identifikovaný v spoločnom časovom rade *RHP*. Zrovnateľné výsledky, v prípade adjustovanej statickej predikcie dokonca najlepšie dáva

Boxov-Jenkinsov model M_{RH} . V literatúre sa uvádza, že na modelovanie produkcie a hospodárskych cyklov sú výhodnejšie modely *LSTAR* než *ESTAR*. U nás sa táto hypotéza nepotvrdila. Spomedzi troch špecifikovaných autoregresných modelov hladkého prechodu dvojrežimový model *LSTAR* sa ukázal byť najhorším, kým najlepšie predikoval štvorrežimový model *MRSTAR*.

ZÁVER

V práci sme sa zaoberali modernými spôsobmi modelovania ekonomických a finančných časových radov, Boxovými-Jenkinsovými modelmi *SARIMA* a tromi základnými nelineárnymi modelmi, *SETAR*, *STAR* a Hamiltonovym Markovovým modelom prepínania režimov z pohľadu použiteľnosti v časovom rade HDP Slovenska 1993–2001. Identifikovali a špecifikovali štrnásť rôznych modelov, ktoré sme následne testovali predikciou ex-post HDP Slovenska v roku 2002. Ukázalo sa, že s výnimkou Markovovho modelu, ktorý vzhľadom na svoju špeciálnu štruktúru nevedol k úspešnej špecifikácii modelu, všetky špecifikované modely sú zo štatistického ako aj predikčného hľadiska lepšie než príslušný lineárny autoregresný model. Práca ukázala, že aj napriek krátkemu časovému radu existuje štatistický aparát umožňujúci relatívne kvalitné modelovanie. Najväčším nedostatkom získaných modelov v ich prediktívnej schopnosti je konzervatívne podhodnotenie ex-post predikovaného HDP v roku 2002. Ako zdroj nepresnosti prichádzajú do úvahy tri možné príčiny:

- dynamika vývoja HDP v minulosti neposkytuje dostatočnú informáciu o budúcom vývoji– je potrebné zobrať iný typ modelu, napríklad vektorový autoregresný model (*VAR*) alebo klasický lineárny či nelineárny regresný model;
- malý počet pozorovaní – nedostatok sa časom odstráni sám;
- zvýšený rast HDP je prejavom exogénnych vplyvov, v našom prípade úspešnou makroekonomickou politikou vlády.

V práci sme sa venovali len vybraným typom nelineárnych modelov. Väčšiu pozornosť z pohľadu možnosti modelovania slovenských ekonomických

časových radov by si zaslúžili aj iné typy nelineárnych modelov, napríklad autoregresné modely podmienenej heteroskedasticity či modely priesotorov stavov. Hoci naša pozornosť bola zameraná na jednorozmerné časové rady, uvedené nelineárne modely môžu byť zovšeobecnené aj do viacrozmerných (vektorových) časových radov.

Časové rady HDP Slovenska 1993-2001

V tabuľke A1 sú uvedené údaje, s ktorými boli realizované výpočty. Tabuľka obsahuje pôvodný časový rad, časový rad logaritmov HDP a tempa rastu HDP, ako aj časové rady získané z nich odstránením jednotlivých typov trendov. Jednotlivé časové rady sú v tabuľkách označené takto:

<i>H</i>	časový rad HDP
<i>HT</i>	časový rad HDP po odstránení kvadratického trendu
<i>HP</i>	časový rad HDP po odstránení trendu Hodrickovym-Precottovym filtrom
<i>LH</i>	časový rad logaritmov HDP
<i>LHQ</i>	časový rad logaritmov HDP po odstránení kvadratického trendu
<i>LHHP</i>	časový rad logaritmov HDP po odstránení trendu Hodrickovym-Precottovym filtrom
<i>RH</i>	časový rad tempa rastu HDP
<i>RHP</i>	časový rad tempa rastu HDP po odstránení trendu Hodrickovym-Precottovym filtrom

Tabuľka A.1. Časový rad HDP Slovenska 1993-2001

Obdobie	<i>H</i>	<i>HT</i>	<i>HP</i>	<i>LH</i>	<i>LHT</i>	<i>LHP</i>	<i>RH</i>	<i>RHP</i>
Q1.1993	120	-2.428	-4.308	4.787	-0.025	-0.040	*	*
Q2.1993	128.6	3.726	2.279	4.857	0.027	0.015	7.167	4.714
Q3.1993	129.4	2.131	1.070	4.863	0.016	0.007	0.622	-1.722
Q4.1993	130	0.388	-0.335	4.868	0.003	-0.003	0.464	-1.775
Q1.1994	125.6	-6.305	-6.736	4.833	-0.048	-0.052	-3.385	-5.523
Q2.1994	133.2	-0.945	-1.132	4.892	-0.005	-0.007	6.051	4.007
Q3.1994	138.9	2.565	2.583	4.934	0.021	0.021	4.279	2.328
Q4.1994	145.6	7.127	7.314	4.981	0.053	0.054	4.824	2.961
Q1.1995	132.1	-8.459	-8.135	4.884	-0.059	-0.057	-9.272	-11.05
Q2.1995	143.2	0.605	1.036	4.964	0.007	0.010	8.403	6.704
Q3.1995	147.8	3.221	3.732	4.996	0.025	0.029	3.212	1.588
Q4.1995	145.8	-0.711	-0.145	4.982	-0.002	0.002	-1.353	-2.906
Q1.1996	139.7	-8.693	-8.091	4.939	-0.058	-0.053	-4.184	-5.671
Q2.1996	151.6	1.378	1.995	5.021	0.011	0.016	8.518	7.093
Q3.1996	156.7	4.699	5.319	5.054	0.032	0.038	3.364	1.999
Q4.1996	154.1	0.372	0.987	5.038	0.004	0.009	-1.659	-2.965
Q1.1997	147.6	-7.804	-7.199	4.995	-0.051	-0.045	-4.218	-5.467
Q2.1997	160	2.972	3.564	5.075	0.019	0.025	8.401	7.206
Q3.1997	165.7	7.099	7.680	5.110	0.044	0.049	3.563	2.422
Q4.1997	162.8	2.677	3.254	5.093	0.016	0.022	-1.750	-2.836
Q1.1998	156.8	-4.793	-4.214	5.055	-0.031	-0.025	-3.686	-4.719
Q2.1998	169.1	6.088	6.671	5.130	0.036	0.042	7.844	6.859
Q3.1998	174.1	9.720	10.310	5.160	0.056	0.062	2.957	2.019
Q4.1998	161.3	-4.396	-3.802	5.083	-0.028	-0.022	-7.352	-8.245
Q1.1999	158	-8.961	-8.376	5.063	-0.056	-0.051	-2.046	-2.901
Q2.1999	173.1	4.925	5.480	5.154	0.028	0.033	9.557	8.735
Q3.1999	173.4	4.063	4.563	5.156	0.022	0.027	0.173	-0.616
Q4.1999	165.5	-4.948	-4.535	5.109	-0.031	-0.027	-4.556	-5.315
Q1.2000	159.9	-11.61	-11.32	5.075	-0.071	-0.069	-3.384	-4.117
Q2.2000	176.3	3.785	3.892	5.172	0.021	0.022	10.256	9.547
Q3.2000	177.8	4.328	4.211	5.181	0.025	0.023	0.851	0.168
Q4.2000	170.8	-3.578	-3.969	5.140	-0.020	-0.024	-3.937	-4.593
Q1.2001	164.7	-10.53	-11.25	5.104	-0.061	-0.067	-3.571	-4.201
Q2.2001	181.3	5.266	4.160	5.200	0.032	0.022	10.079	9.477
Q3.2001	183.9	7.114	5.570	5.214	0.043	0.029	1.434	0.864
Q4.2001	177.4	-0.086	-2.118	5.178	0.004	-0.014	-3.535	-4.071

Údaje sú v miliardách SKK, v stálych cenách z roku 1995.

Zdroj: NBS Bratislava, vlastné výpočty

Literatúra

- [1] Albert, J., Chib, S. (1993): Bayesian Inference via Gibbs Sampling of Autoregressive Time Series Subject to Markov Mean and Variance Shifts. *Journal of Business and Economic Statistics*, 11, 1–15.
- [2] Anděl, J. (1976): *Statistická analýza časových řad*. SNTL - Nakladatelství technické literatury, Praha, 1976.
- [3] Arby, M. F. (2001): Long-Run Trend, Business Cycles and Short-Run Shocks in Real GDP. State Bank of Pakistan Working Paper 1/01.
- [4] Batters, D. M., Watts, D. G. (1988): *Nonlinear Regression and Its Application*. John Wiley, New York.
- [5] Baxter, M., King, R. G. (1995): Measuring Business Cycles Approximate Band-Pass Filters for Economic Time Series. National Bureau of Economic Research Working Papers 5022.
- [6] Beveridge, S., Nelson, C. R. (1981): A New Approach to Decomposition of Economic Time Series into Permanent and Transitory Components with Particular Attention to Measurement of the 'Business Cycle'. *Journal of Monetary Economics*, 7, 151–174.
- [7] Box, G. E. P., Jenkins, G. M. (1976): *Time Series Analysis, Forecasting and Control*. Revised Edition. Holden Day, San Francisco.
- [8] Brock, W., Chamberlain, G. (1984): Spectral Analysis Cannot Tell a Macroeconometrician Whether His Time Series Came from a Stochastic Economy or a Deterministic Economy. SSRI Working Paper 8419.
- [9] Campbell, J. Y., Deaton A. (1987): Is Consumption Too Smooth? National Bureau of Economic Research Working Papers 2134.
- [10] Campbell, J. Y., Mankiw, N. G. (1987a): Permanent and Transitory Components in Macroeconomic Fluctuations. *American Economic Review Papers and Proceedings*, 77, 111–117.
- [11] Campbell, J. Y., Mankiw, N. G. (1987b): Are Output Fluctuations Transitory? *Quarterly Journal of Economics*, 102, 857–880.
- [12] Chappel, D., Padmore, J., Mistry, P., Ellis, C (1996): A Threshold Model for the French Franc/Deutschmark Exchange Rate. *Journal of Forecasting*, 15, 155–164.

-
- [13] Clark, P. K.(1987): The Cyclical Component of U.S. Economic Activity. *Quarterly Journal of Economics*, 102, 797–814.
- [14] Clements, M. P., Franses, Ph. H. B. F. (1999): On SETAR Non-linearity and Forecasting. Econometric Institute Report No.141, Erasmus University Rotterdam.
- [15] de Gooijer, J. G., Vidiella-I-Anguera, A. (2000): Modeling Seasonalities in Nonlinear Inflation Rates Using SEASETAR. Tinbergen Institute Discussion Papers 00-098/4.
- [16] Eitrheim, O., Teräsvirta, T. (1996): Testing the Adequacy of Smooth Transition Autoregressive Models. *Journal of Econometrics*, 74, 59–76.
- [17] *Eviews User Help Guide.*
<http://www.eviews.com/eviews3/eviews31/help31.html>
- [18] Enders W. (1995): *Applied Econometric Time Series*. John Wiley and Sons.
- [19] Frömmel, M., MacDonald, R., Menkhoff, L. (2002): Markov Switching Regimes in a Monetary Exchange Rate Model. *Diskussionpapier 266*, Universität Hannover.
- [20] Garcia, R., Perron, P. (1996): An Analysis of the Real Interest Rate Under Regime Shifts. *Review of Economics and Statistics*, 78, 111–125.
- [21] Gonçalves, P., Riedi, R. (2002): Diverging Moments and Parameter Estimation. *Research Report 4647*, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique (INRIA).
- [22] Granger, C. W. J., Teräsvirta, T. (1993): *Modeling Nonlinear Economic Relationships*. Oxford University Press, Oxford.
- [23] Hamilton, J. D. (1990): Analysis of Time Series Subject to Changes in Regime. *Journal of Econometrics*, 45, 39–70.
- [24] Hamilton, J. D. (1989): A New Approach to the Economic Analysis of Non-stationary Time Series and the Business Cycle. *Econometrica*, 57, 357–384.
- [25] Hamilton, J. D. (1994): *Time Series Analysis*. Princeton University Press, Princeton.
- [26] Harvey, A. C. (1985): Trends and Cycles in Macroeconomic Time Series. *Journal of Business and Economic Statistics*, 3, 216–227.
- [27] Hinich, M. J. (1982): Testing For Gaussianity and Linearity of a Stationary Time Series. *Journal of Time Series Analysis*, 3(1982), 169–176.

-
- [28] Hodrick, R. J., Prescott, E. C. (1997): Postwar U.S. Business Cycles: an Empirical Investigation. *Journal of Money, Credit and Banking*, 29, 1–16; Carnegie-Mellon University Working Paper, Pittsburgh, 1980.
- [29] Huang, C.H. (1999): Phases and Characteristics of Taiwan Business Cycles: A Markov Switching Analysis. *Taiwan Economic Review*, 27, 185–214.
- [30] Johansson, M. (2001): TAR Models and Real Exchange Rates. Working Paper, Lund University.
- [31] Kano, S., Ohta, M. (2002): An Empirical Matching Function with Regime Switching: The Japanese Case. Working Paper, University of Tsukuba.
- [32] Keenan, D. M. (1985): A Tukey Nonadditivity-type Test for Time Series Nonlinearity. *Biometrika*, 72, 39–44.
- [33] Kim, C. J. (1994): Dynamic Linear Models with Markov-Switching. *Journal of Econometrics*, 60, 1–22
- [34] Kim, C. J., Morley, J., Piger, J. (2002): A Markov-Switching Model Of Business Cycle Dynamics with a Post-Recession „Bounce-Back“ Effect. Working Paper.
- [35] Kim, C. J., Nelson, C. R. (1998): Business Cycle Turning Points, a New Coincident Index, and Tests of Duration Dependence Based on a Dynamic Factor Model with Regime Switching. *Review of Economics and Statistics*, 80, 188–201.
- [36] Kim, C. J., Nelson, C. R. (1999): *State Space Models with Regime Switching, Classical and Gibbs Sampling Approaches with Applications*. MIT Press, Cambridge.
- [37] King, R., Plosser, C., Stock, J., Watson, M. (1987): Stochastic Trends and Economic Fluctuations. National Bureau of Economic Research Working Paper 2229.
- [38] Kräger, H., Kugler, P. (1993): Non-linearities in Foreign Exchange Markets: A Different Perspective. *Journal of International Money and Finance*, 12, 195–208
- [39] Krolzig, H.-M. (2002): *Regime-Switching Models*. University of Oxford.
- [40] Krolzig, H.-M., Sensier, M. (2000): A Disaggregated Markov-Switching Model of the Business Cycles in UK Manufacturing. *Manchester School*, 68, 442–460.
- [41] Kuan C.-M. (2002): *Lecture on the Markov Switching Model*. Academia Sinica Peking.
-

-
- [42] Kuo, B.-S., Mikkola, A. (2000): Forecasting the Real US/DEM Exchange Rate: TAR vs. AR. Discussion Papers Bank of Finland.
- [43] Lizieri, C., Satchell S., Worzala, E. (1998): Real Interest Regimes and Real Estate Performance: A comparison of UK and US Markets. *Journal of Real Estate Research*, 16, 339–356.
- [44] Luukkonen, R., Saikkonen, P., Teräsvirta, T. (1988): Testing Linearity Against Smooth Transition Autoregressive Model. *Biometrika*, 75, 491–499
- [45] Marcišin A., Beblavý M. (2000): *Hospodárska politika na Slovensku 1990–1999*. INEKO-SFPA – Spoločnosť pre spoločenskú a mediálnu analýzu.
- [46] Marcišin A. (2002): *Hospodárska politika na Slovensku 2000–2001*. INEKO-SFPA – Spoločnosť pre spoločenskú a mediálnu analýzu.
- [47] Marvall, A., del Río, A. (2001): Time Aggregation and the Hodrick-Prescott Filter. Documento de Trabajo, Banco de España - Servicio de Estudios 0108.
- [48] McCulloch, R. E., Tsay, R. S. (1994): Statistical Analysis of Economic Time Series via Markov Switching Models. *Journal of Time Series Analysis*, 15, 523–539.
- [49] McLeod, A.I., Li, W.K. (1983): Diagnostic Checking ARMA Time Series Models Using Squared-residual Autocorrelations. *Journal of Time Series Analysis*, 4(1983), 269–273.
- [50] Montgomery, A.L., Zarnowitz, V., Tsay, R.S., Tiao, G.C. (1998): Forecasting the U.S. Unemployment Rate. *Journal of the American Statistical Association*, 93(1998), 478–493.
- [51] Nelson, C. R., Plosser, C. I. (1982): Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series: Some Evidence and Implications. *Journal of Monetary Economics*, 10, 139–162.
- [52] Peel, D. A., Speight E. A. H. (2000): Threshold Nonlinearities in Unemployment Rates: Further Evidence for the UK and G3 Economies. *Applied Economics*, 32, 705–715.
- [53] Potter, S. M. (1995): A Nonlinear Approach to the U.S. GNP. *Journal of Applied Econometrics*, 10, 109–125.
- [54] Potter, S. M. (1999): Nonlinear Time Series Modeling: An Introduction. *Federal Reserve Bank of New York Staff Reports*, No.87.
- [55] Rotemberg, J. J. (1999): A Heuristic Method for Extracting Smooth Trends from Economic Time Series. National Bureau of Economic Research Working Paper 7439.
-

-
- [56] Rothman P. (1998): Forecasting Asymmetric Unemployment Rates. *The Review of Econometrics and Statistics*, 80, 164–168.
- [57] Rublíková E., Artl J., Artlová M., Libičová L. (2001): *Analýza časových radov. Zbierka príkladov*. Vydavateľstvo Ekonóm, Bratislava.
- [58] Saikkonen, P., Luukkonen, R. (1988): Lagrange Multiplier Test for Testing Non-linearities in Time Series Models. *Scandinavian Journal of Statistics*, 15, 55–68.
- [59] Sarantis, N. (1999): Modeling Non-linearities in Real Effective Exchange Rates. *Journal of International Money and Finance*, 18, 27–45.
- [60] Schaller, H., van Norden, S. (1997): Regime Switching in Stock Market Returns. *Applied Financial Economics*, 7, 177–191.
- [61] Skalin, J., Teräsvirta, T. (2002): Modeling Asymmetries And Moving Equilibria in Unemployment Rates. *Macroeconomic Dynamics*, 6, 202–241.
- [62] Subra Rao, T., Gabr, M. M. (1980): A Test For Linearity of Stationary Time Series. *Journal of Time Series Analysis*, 1, 145–158.
- [63] Štekláčová, L. (2003): Meranie produkčnej medzery SR. Diplomová práca. Univerzita Komenského Bratislava, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky.
- [64] Štulajter, F. (2001): *Random Processes and Time Series*. Comenius University, Bratislava.
- [65] Taylor, M. P., Peel, D. A., Sarno, L. (2001): Nonlinear Mean-Reversion in Exchange Rate Rates: Towards a Solution to the Purchase Power Parity Puzzles. *International Economic Review*, 42, 1015–1042.
- [66] Teräsvirta, T. (1998): Modeling Economic Relationship With Smooth Transition Regressions. In: Ullah, A., Giles, D. (Editors): *Handbook of Applied Economic Statistics*. Marcel Dekker, New York, 507–555.
- [67] Teräsvirta, T. (1994): Specification, Estimation, and Evaluation of Smooth Transition Autoregressive Models. *Journal of the American Statistical Association*, 89, 208–218.
- [68] Teräsvirta, T., Anderson, H. M. (1992): Characterizing Nonlinearities in Business Cycles Using Smooth Transition Autoregressive Models. *Journal of Applied Econometrics*, 7, S119–S136.
- [69] Tiao, G. C., Tsay, R. S. (1994): Some Advances in Non-linear and Adaptive Modelling in Time Series. *Journal of Forecasting*, 13, 109–131.

-
- [70] Tong, H.(1978): On a Threshold Model. Pattern Recognition and Signal Processing, Ed. C.H.Chen, Amsterdam, Sijhoff&Noordhof.
- [71] Tong, H., Lim, K. S. (1980): Threshold Autoregression, Limit Cycles and Cyclical Data. *Journal of the Royal Statistical Society, Ser.B*, 42, 245–292.
- [72] Tsay, R. S. (1985): Nonlinearity Tests for Time Series. *Biometrika*, 73, 461–466.
- [73] Tsay R. S. (1989) Testing and Modeling Threshold Autoregressive Processes. *Journal of the American Statistical Association*, 84, 231–240.
- [74] Tsay R. S. (1998) Testing and Modeling Multivariate Threshold Models. *Journal of the American Statistical Association*, 93, 1188–1202.
- [75] Tukey, J. W.(1949): One Degree of Freedom for Non-additivity. *Biometrika*, 5, 232–242.
- [76] van Dijk, D., Franses, P. H. (1999): Modeling Multiple Regimes in the Business Cycle. *Macroeconomic Dynamics*, 3, 311–340.
- [77] van Dijk, D., Teräsvirta, T., Franses, P. H. (2002): Smooth Transition Autoregressive Models – A Survey of Recent Developments. *Econometric Reviews*, 21, 1–47.
- [78] van Ness, J. W. (1966): Asymptotic Normality of Bispectral Estimates. *Annals of Mathematical Statistics*,. 37, 1257–1275.
- [79] Watson, M. W.(1986): Univariate Detrending Methods with Stochastic Trends. *Journal of Monetary Economics*, 18, 49–75.
- [80] White, H. (1984): *Asymptotic Theory for Econometricians*. Academic Press, Orlando.

AUTOREGRESNÉ MODELY HRUBÉHO DOMÁCEHO PRODUKTU SLOVENSKA

doc. RNDr. Ján Pekár, PhD.

Prvé vydanie. Vydala Univerzita Komenského, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky v Bratislave v roku 2004. Rozsah 148 strán. Náklad 100 ks. Neprešlo jazykovou korektúrou.

ISBN: 89186-04-1