

---

# Časové rady

Ján Pekár  
Prednáška 1

*Úvod do časových radov*

# Obsah prednášky

---

- Organizačné záležitosti
- Účel analýzy časových radov
- Obsah kurzu
- Modely časových radov
- Modelovanie časovým radmi



# Obsah prednášky

---

- Stacionarita
- Autokovariancia, autokorelácia
- Lineárne procesy MA a AR
- Výberová autokorelačná funkcia



# Organizačné záležitosti

---

- Prednáška – doc. RNDr. Ján Pekár, PhD, M237, 8krát za semester
- Cvičenia – RNDr. Beáta Stehlíková, PhD, M266, 4krát za semester M208 po skupinách
- Webstránka kurzu:  
[http://www.defm.fmph.uniba.sk/~pekar/Time\\_series/series10.htm](http://www.defm.fmph.uniba.sk/~pekar/Time_series/series10.htm)
- Konzultačné hodiny – podľa dohody –  
[pekar@fmph.uniba.sk](mailto:pekar@fmph.uniba.sk)
- Modelovanie časovým radmi



# Organizačné záležitosti

---

## Literatúra:

- Shumway and Stoffer: Time Series Analysis and its Applications. With R Examples, 2006
- Hamilton: Time Series Analysis, 1994
- Pekár: Autoregresné modely hrubého domáceho produktu Slovenska, 2004



# Organizačné záležitosti

---

## Hodnotenie:

- Hodnotenie priebežnej práce v podobe predikčného modelu (50%)
- Semestrálna skúška (50%)



# Organizačné záležitosti

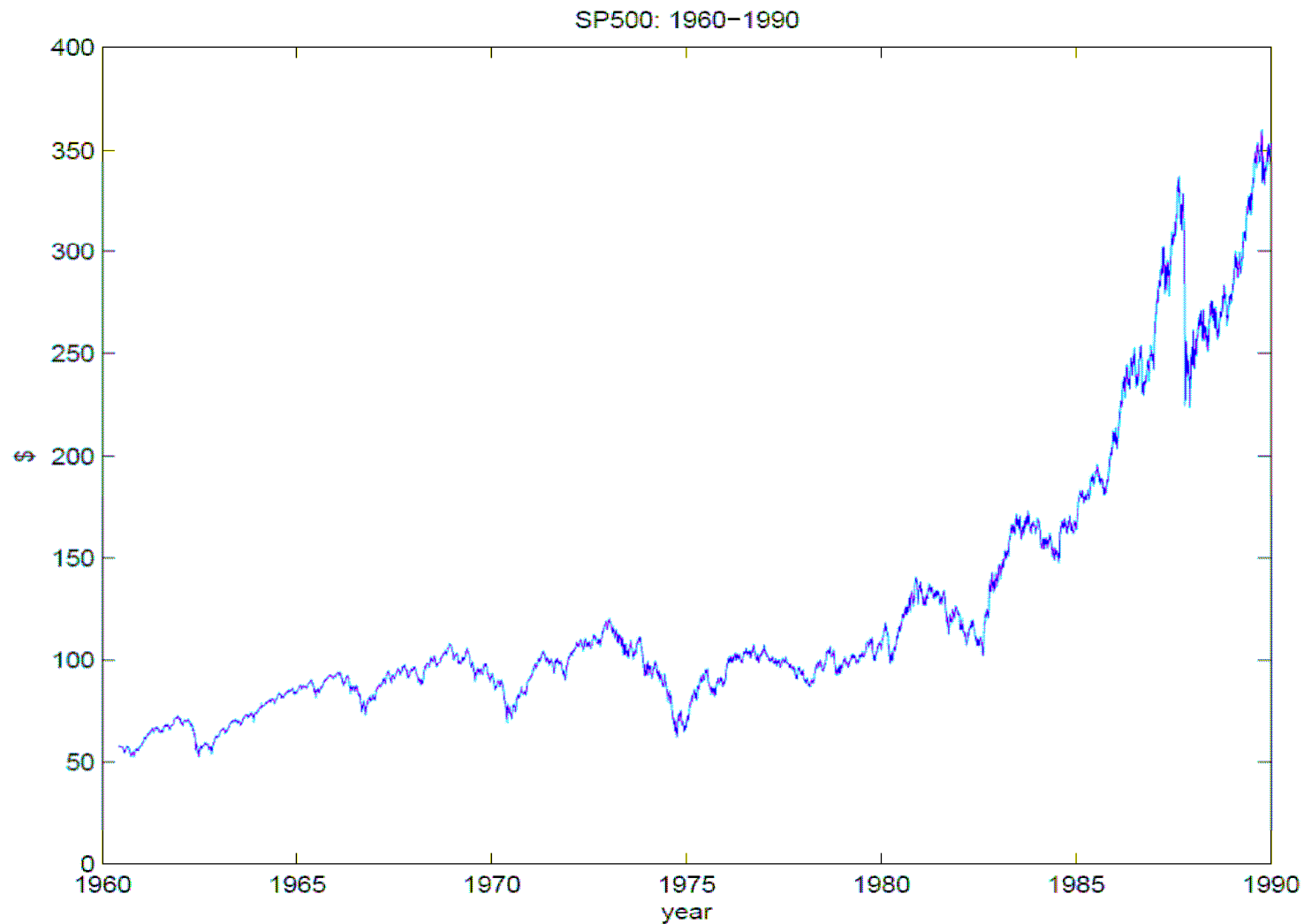
---

## Projekt predikčného modelu:

- Nájdienie na internete aspoň jedného časového radu s ekonomickou alebo hospodárskou interpretáciou
- Časový rad musí obsahovať aspoň 50 pozorovaní (ročné, štvrťročné údaje) alebo 100 pozorovaní (mesačné údaje)
- 10% údajov odložiť na porovnanie presnosti predikcie
- 10 až 15 strán 7 dní pred ústnou skúškou
- Hodnotenie:
  - 40% originalita údajov a zdôvodnenie ich výberu
  - 40% analýza údajov a voľba modelu
  - 20% jasná a presná interpretácia výsledkov

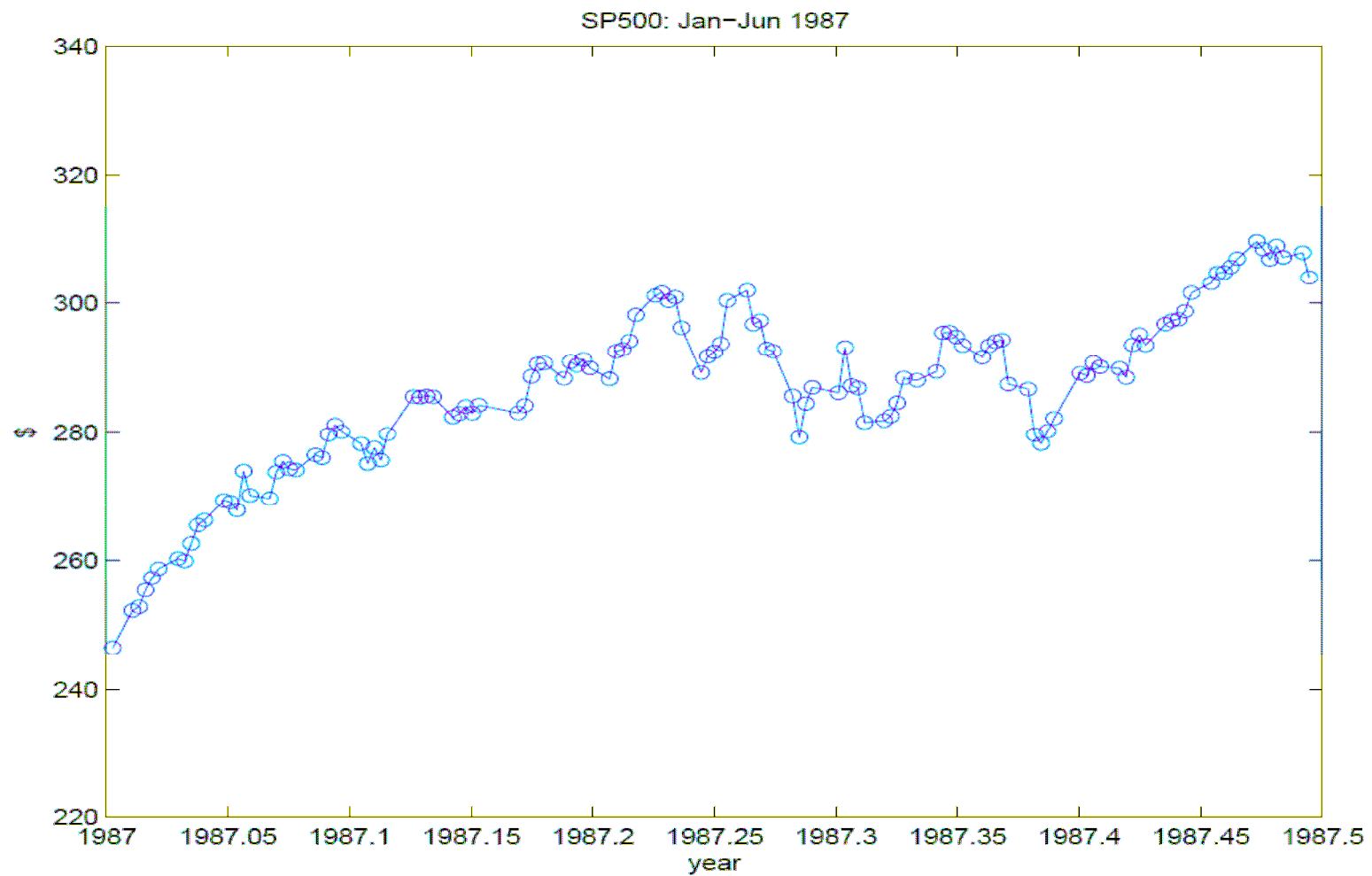


# Účel analýzy časových radov

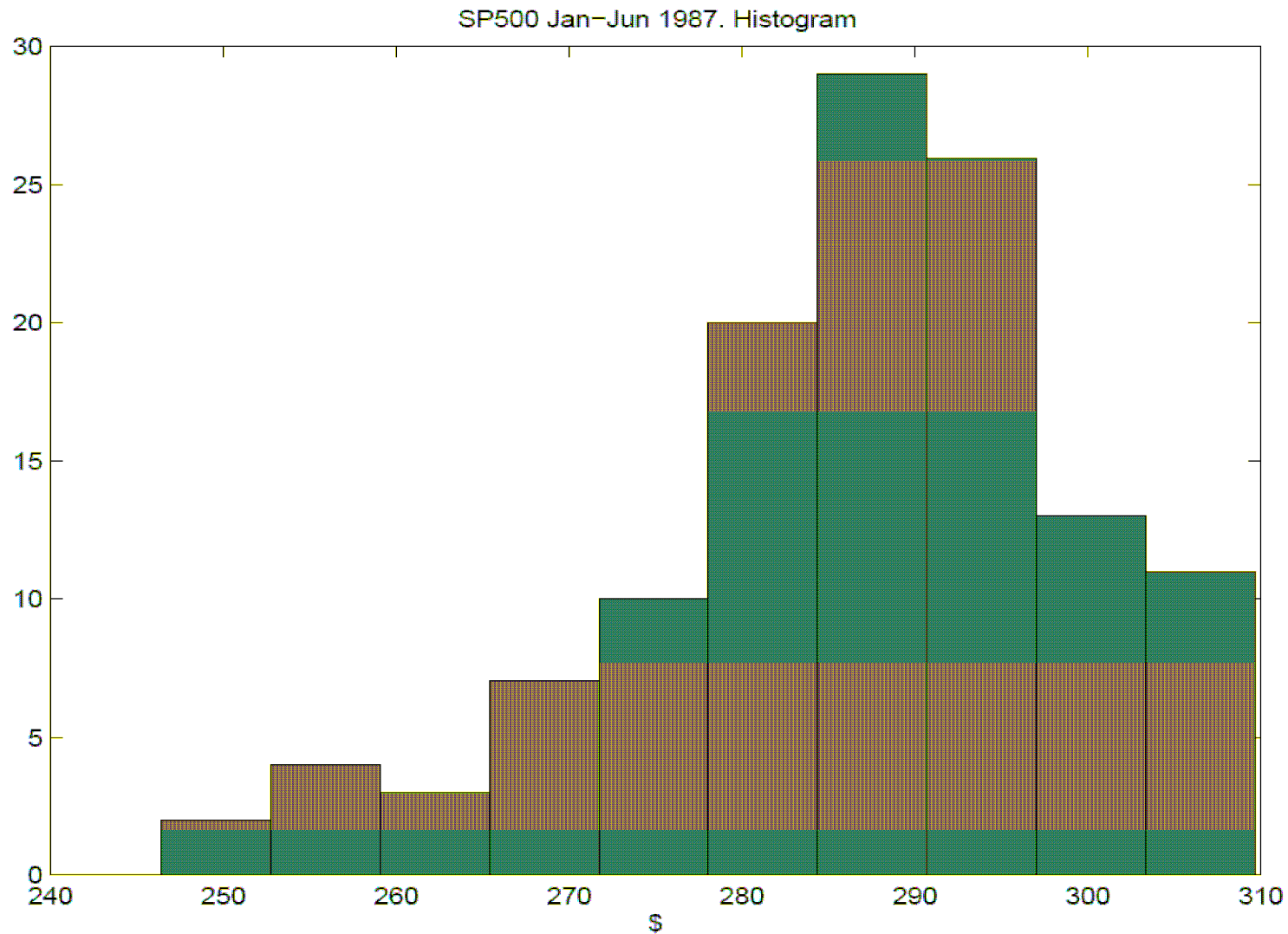




# Účel analýzy časových radov



# Účel analýzy časových radov



# Účel analýzy časových radov

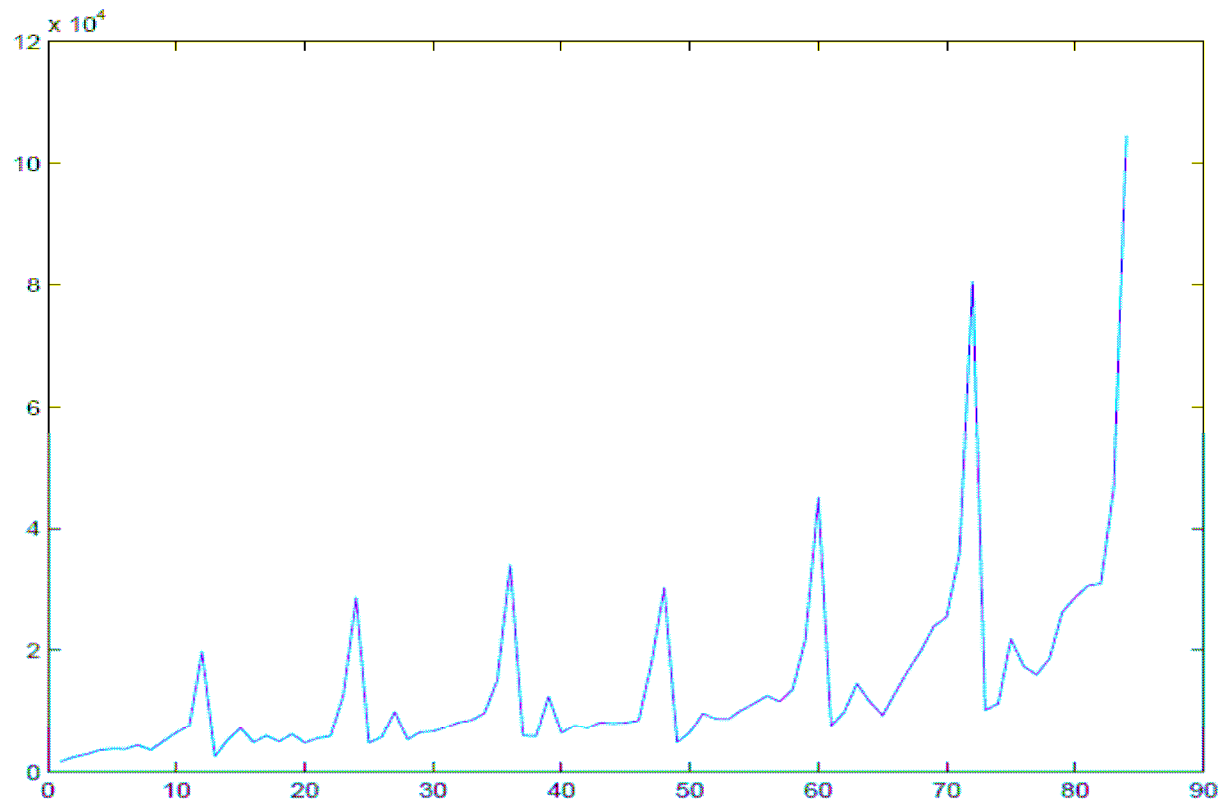
---

- Kompaktný opis údajov
- Interpretácia
- Krátkodobá predpoveď
- Riadenie
- Testovanie hypotéz
- Simulácie



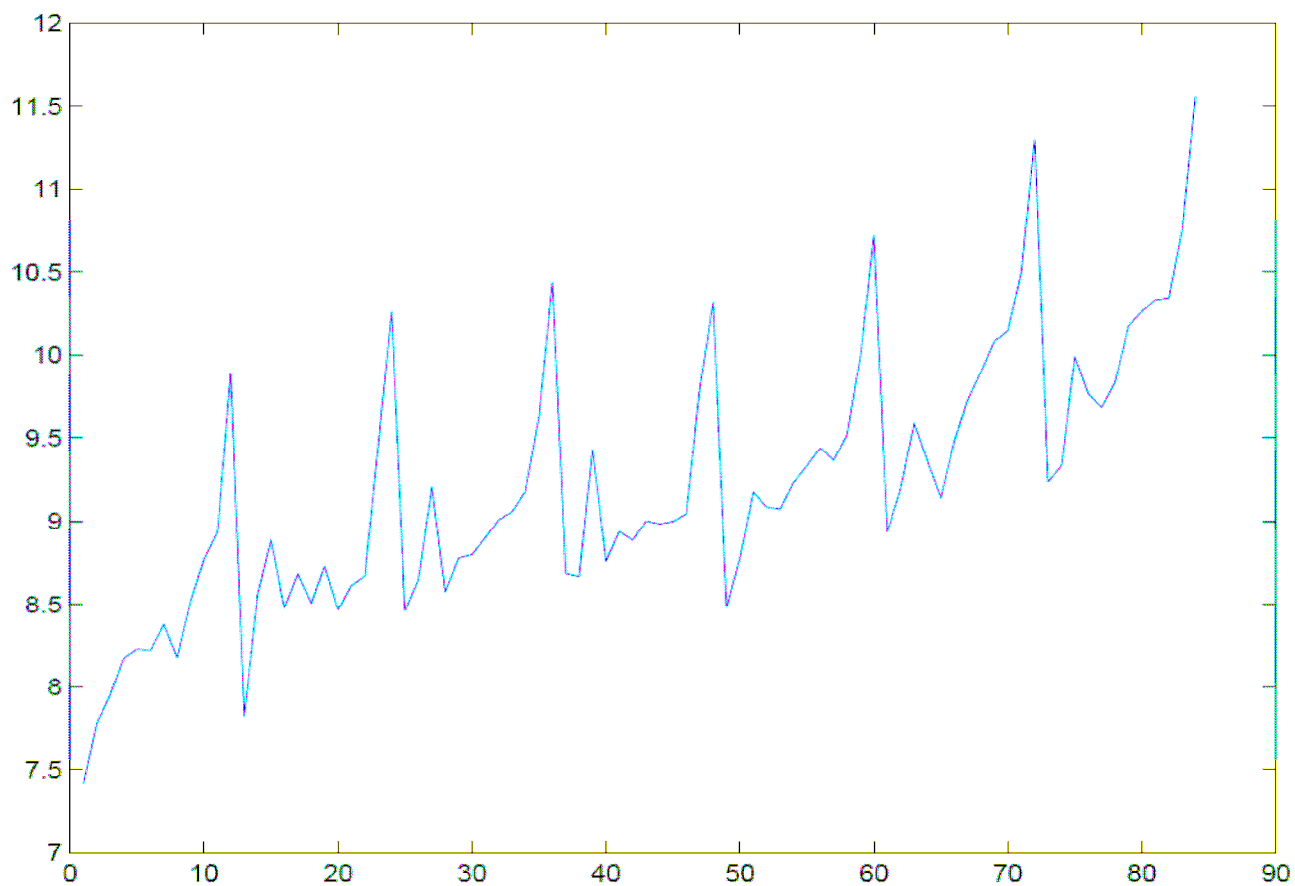
# Klasická dekompozícia údajov – príklad

- Mesačné údaje predaja v obchode so suvenírmi na pláži v Queenslande



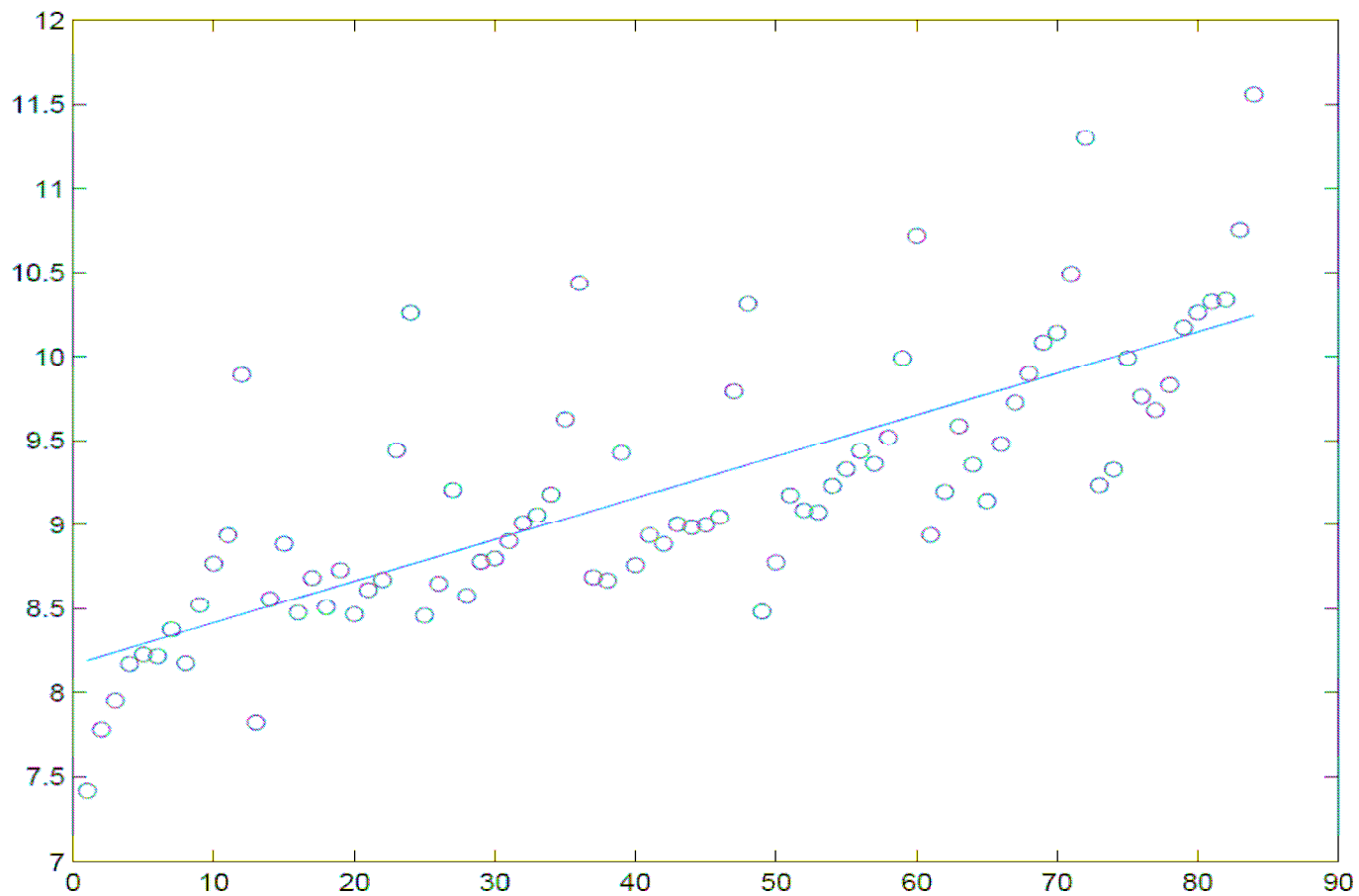
# Klasická dekompozícia údajov – príklad

## ■ Transformované údaje



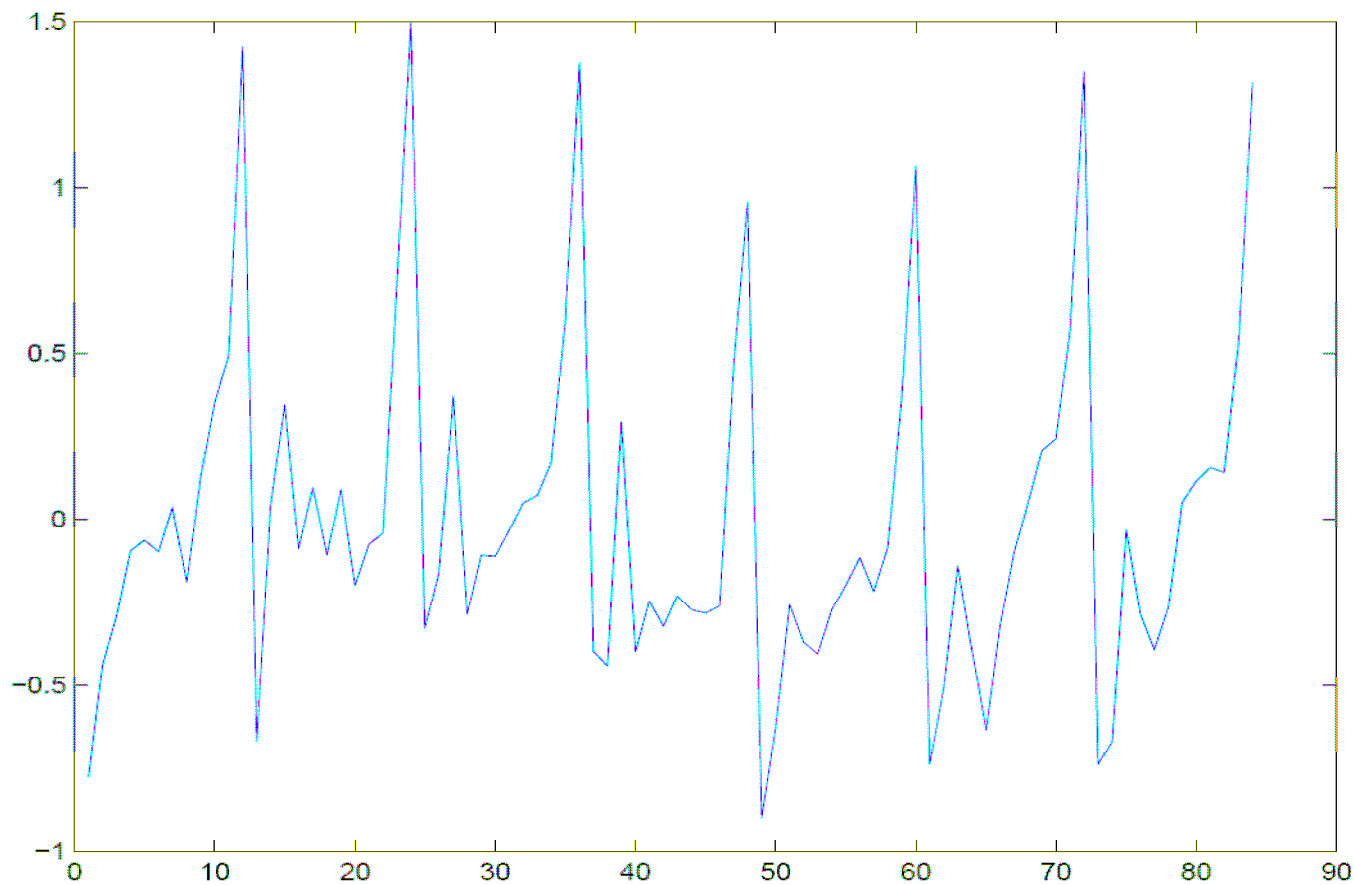
# Klasická dekompozícia údajov – príklad

## ■ Trend



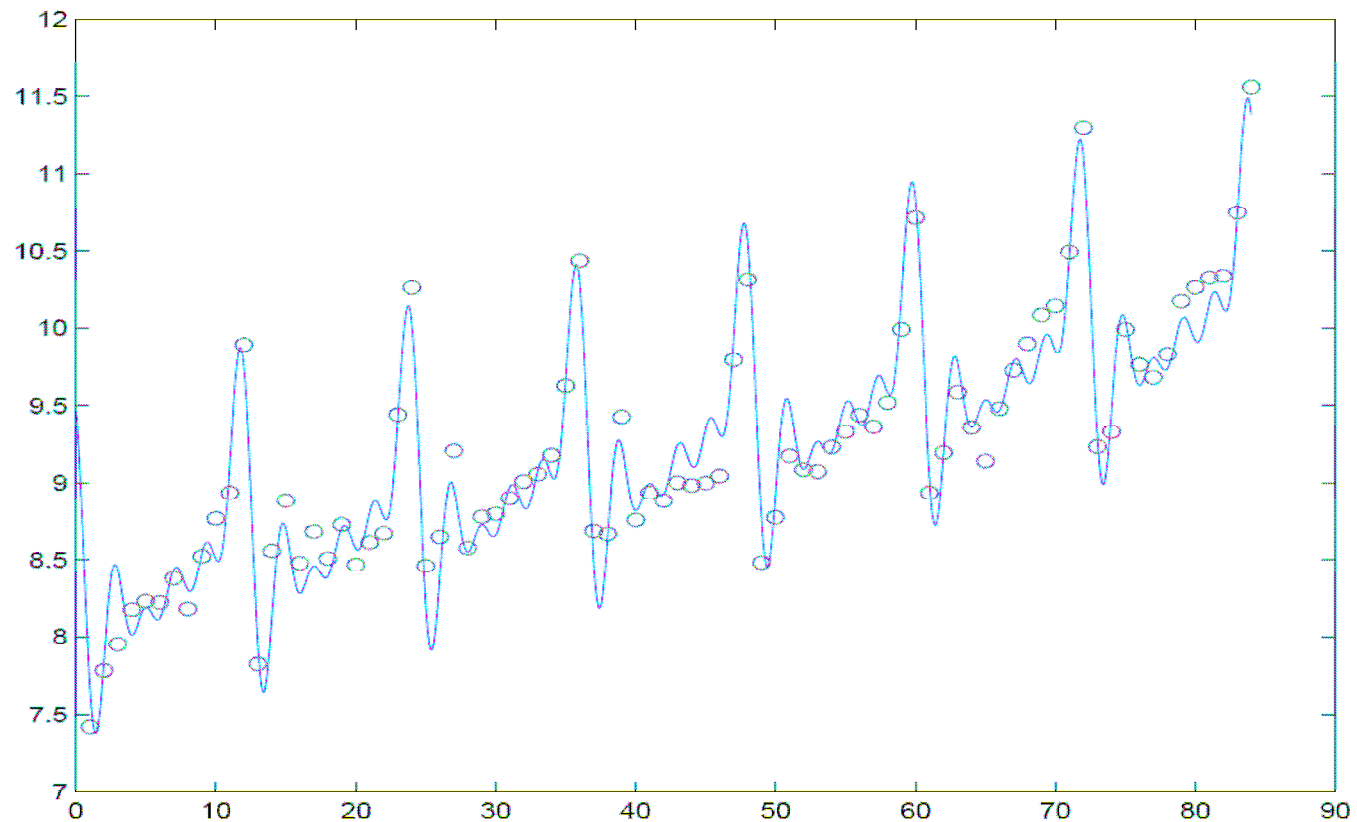
# Klasická dekompozícia údajov – príklad

## ■ Reziduály



# Klasická dekompozícia údajov – príklad

## ■ Trend a sezónnosť





# Účel analýzy časových radov

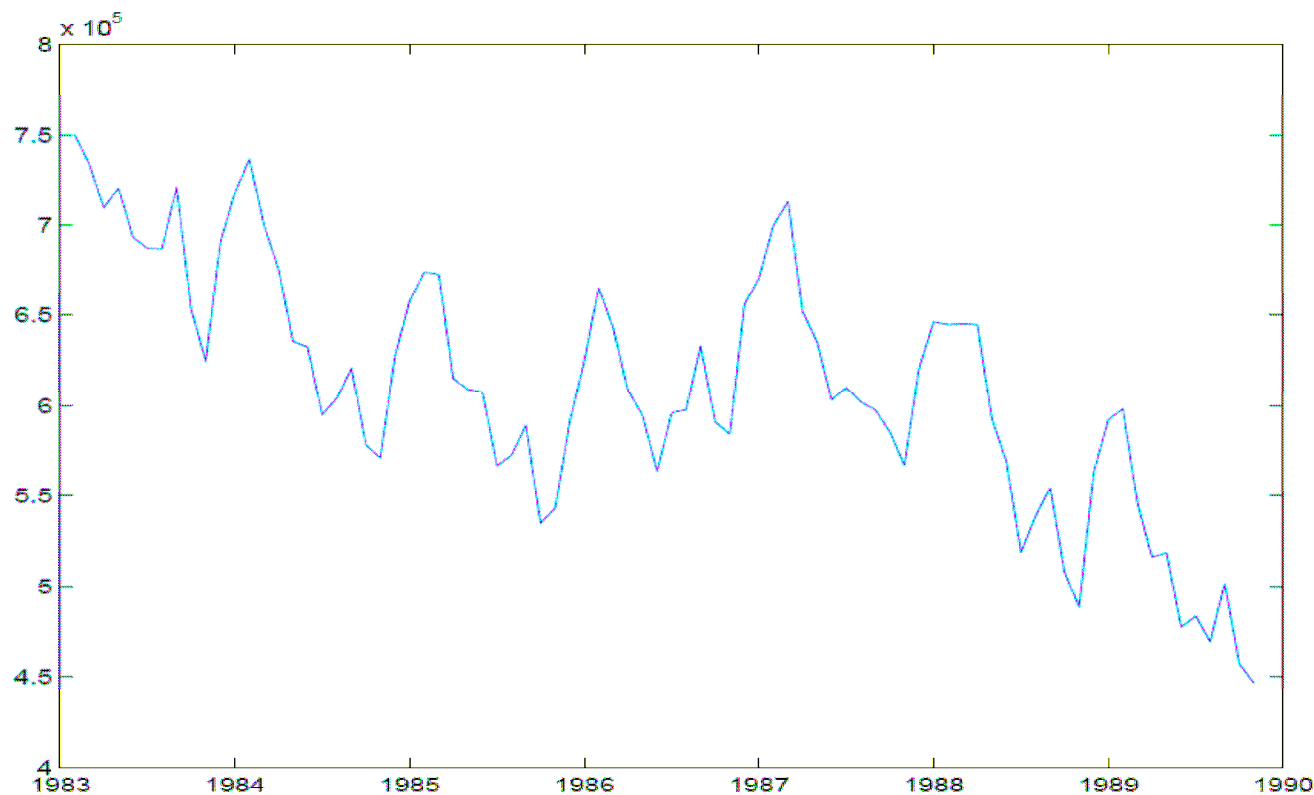
---

- Kompaktný opis údajov
  - Klasická dekompozícia  $X_t = T_t + S_t + Y_t$
- Interpretácia
  - Sezónne vyrovňovanie
- Krátkodobá predpoveď (predikcia)
  - Preddikcia úrovne predaja
- Riadenie
- Testovanie hypotéz
- Simulácie



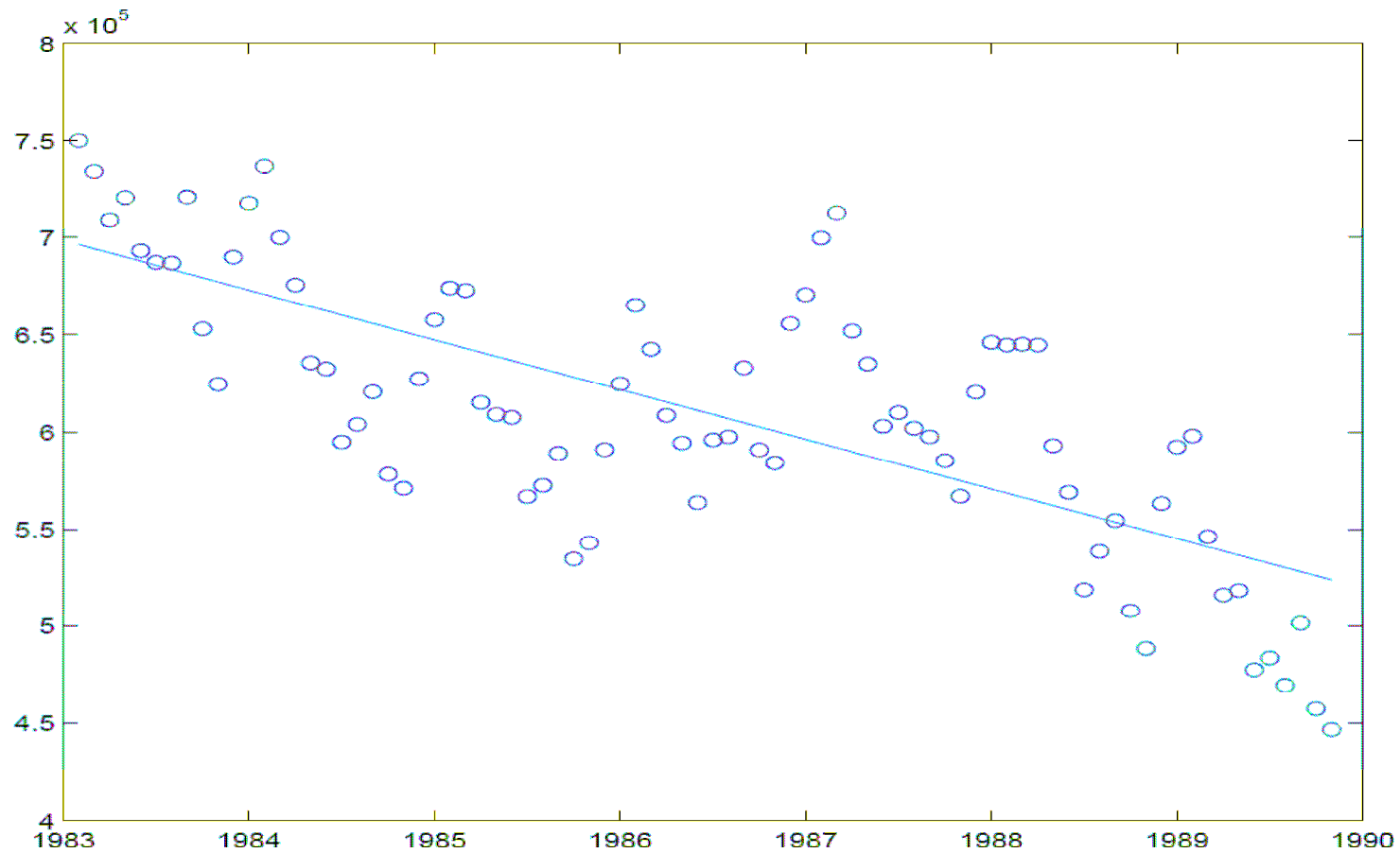
# Klasická dekompozícia údajov – príklad 2

- Mesačné údaje počtu nezamestnaných v Austrálii



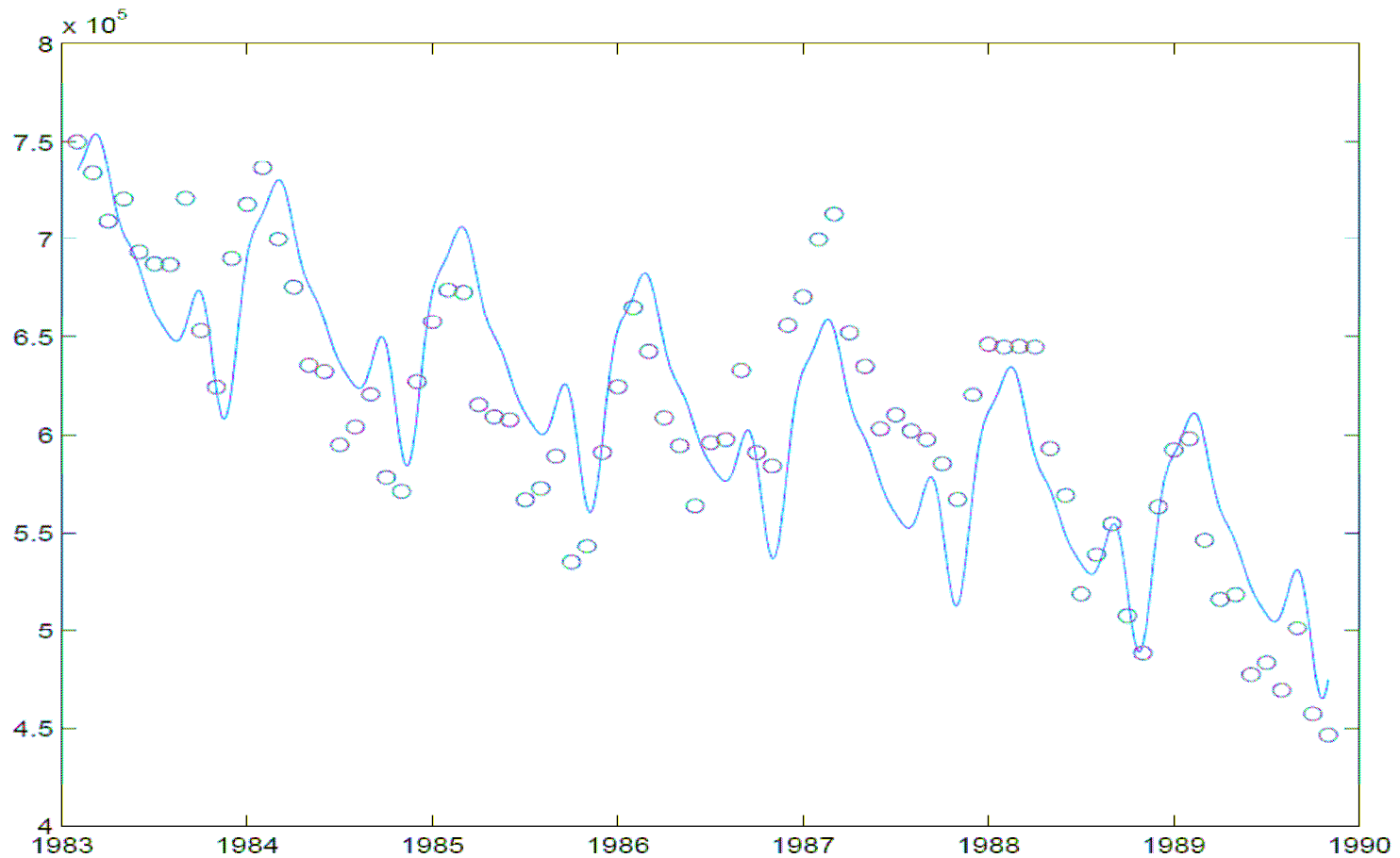
# Klasická dekompozícia údajov – príklad 2

## ■ Trend



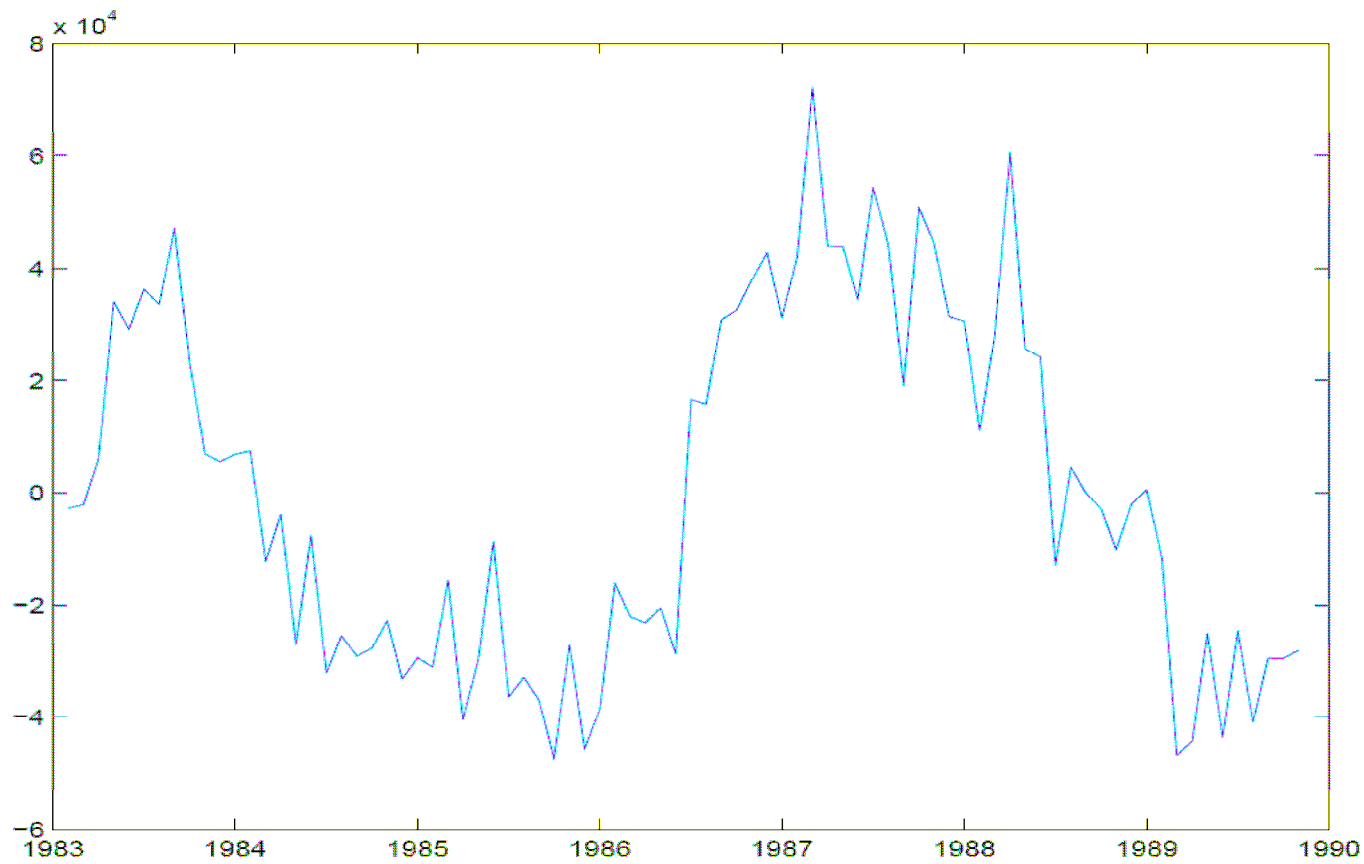
# Klasická dekompozícia údajov – príklad 2

## ■ Trend a sezónnosť



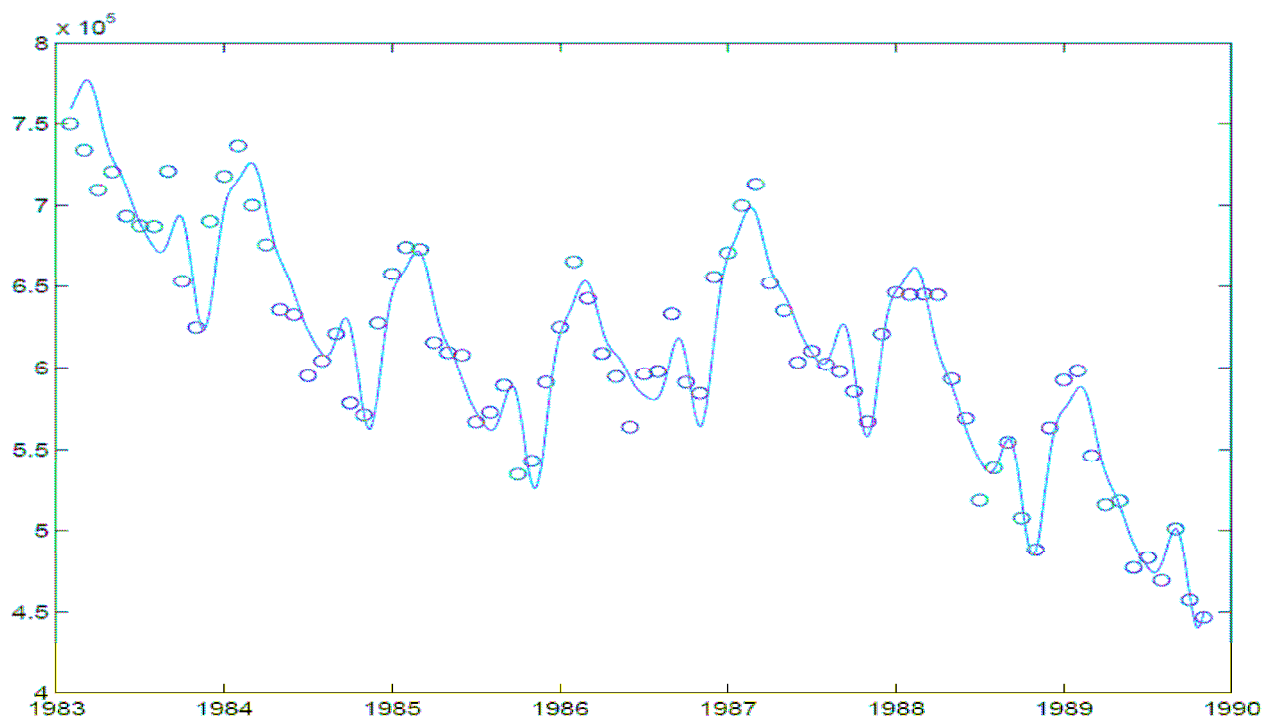
# Klasická dekompozícia údajov – príklad 2

## ■ Reziduály



# Klasická dekompozícia údajov – príklad 2

- Predikcia založená na jednej (simulovanej) premennej



# Účel analýzy časových radov

## ■ Kompaktný opis údajov

- Klasická dekompozícia

$$X_t = T_t + S_t + f(Y_t) + W_t$$

## ■ Interpretácia

- Sezónne vyrovnávanie

## ■ Krátkodobá predpoveď (predikcia)

- Predikcia úrovne nezamestnanosti

## ■ Riadenie

- Vplyv monetárnej politiky na nezamestnanosť

## ■ Testovanie hypotéz

- Globálne otepľovanie

## ■ Simulácie

- Odhad pravdepodobnosti katastrofických udalostí



# Obsah kurzu

---

## Sylabus

- Úvod, stacionarita, trendy.
- Modely typu ARMA, projekcie, parciálne autokorelácie.
- Spektrálna reprezentácia.
- Predikcia a Woldova dekompozícia.
- Odhady a špecifikácia modelov typu ARMA.
- Modely typu VAR.
- Asymptotyka a testy jednotkového koreňa.
- Kointegrácia.
- Zovšeobecnená metóda odhadov.





# Modely časových radov

■ Biely šum – White Noise  $X_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$

□  $\{X_t\}$  nekorelované

□  $E(X_t) = 0$

□  $V(X_t) = \sigma^2$

Príklad: i.i.d. šum -  $\{X_t\}$  nezávislé a rovnako distribuované

$$P[X_1 \leq x_1, \dots, X_t \leq x_t] = P[X_1 \leq x_1] \dots P[X_t \leq x_t]$$
  
Nie je zaujímavé na predpovedanie

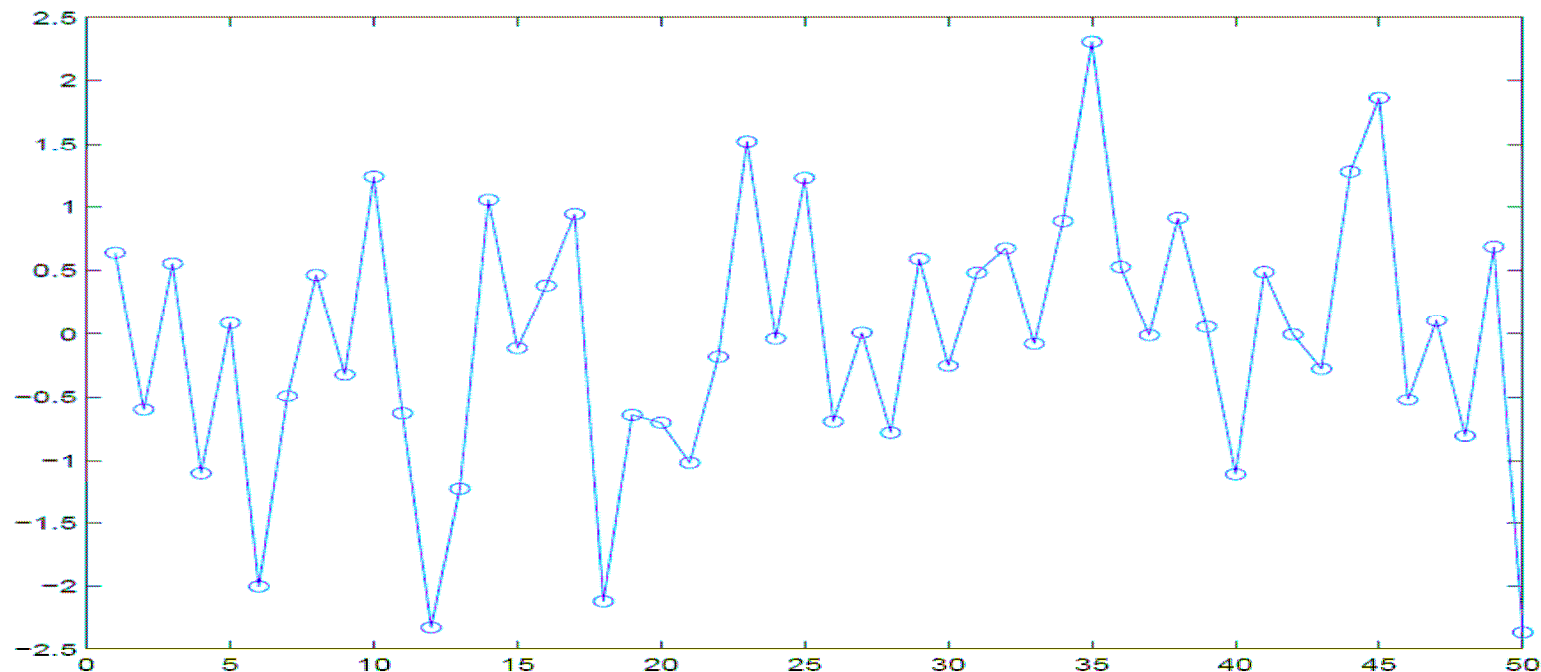
$$P[X_t \leq x_t | X_1, \dots, X_{t-1}] = P[X_t \leq x_t]$$



# Modely časových radov

- Biely šum – White Noise  $X_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$

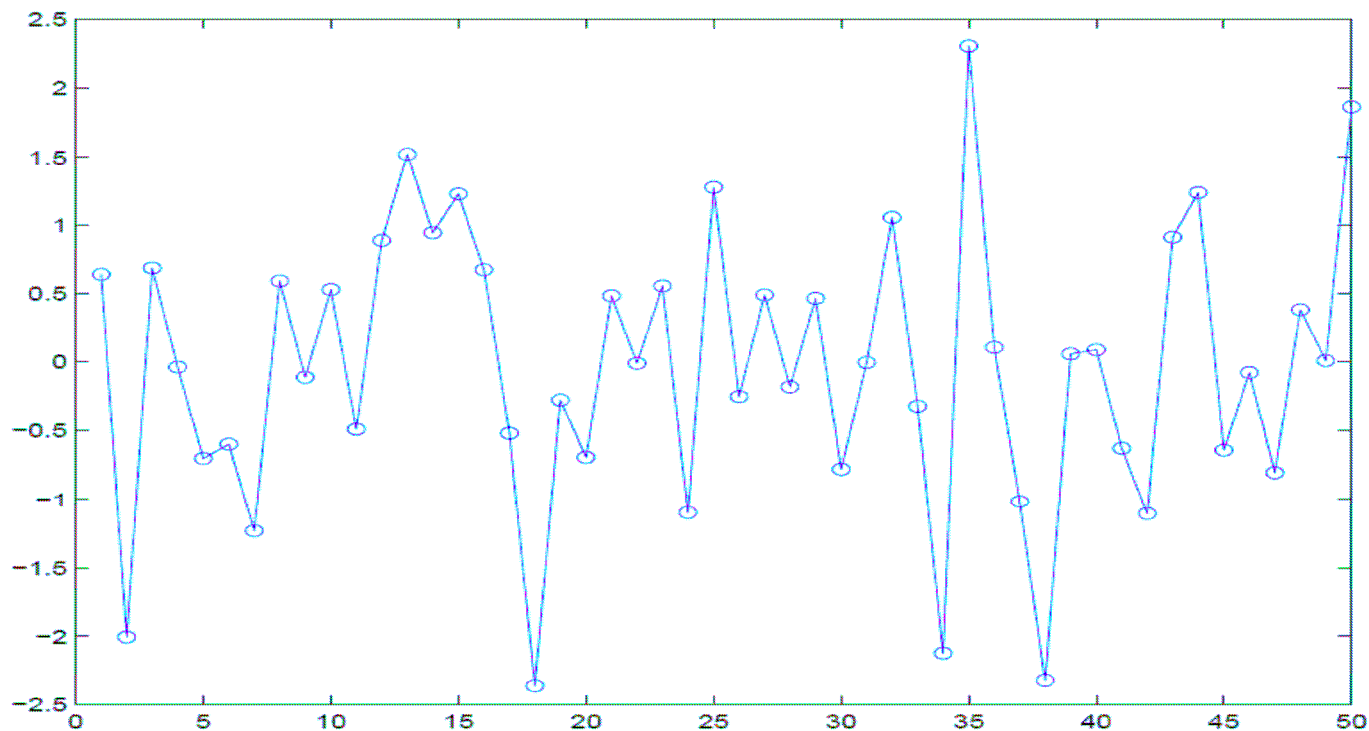
$$P[X_t \leq x_t] = \Phi(x_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_t} e^{-x^2/2} dx.$$



# Modely časových radov

- Biely šum – White Noise  $X_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$

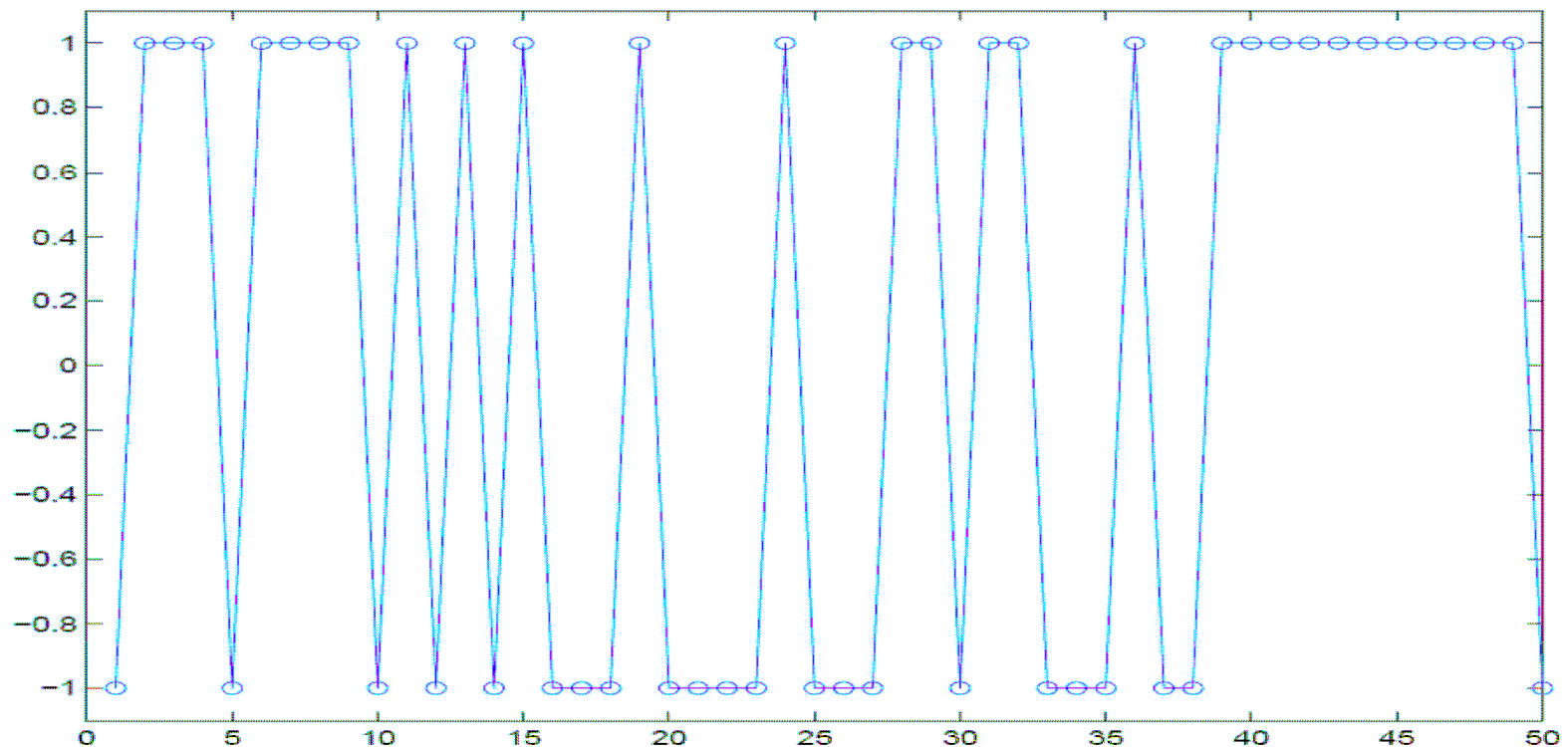
$$P[X_t \leq x_t] = \Phi(x_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_t} e^{-x^2/2} dx.$$



# Modely časových radov

## ■ Binárny i.i.d. model

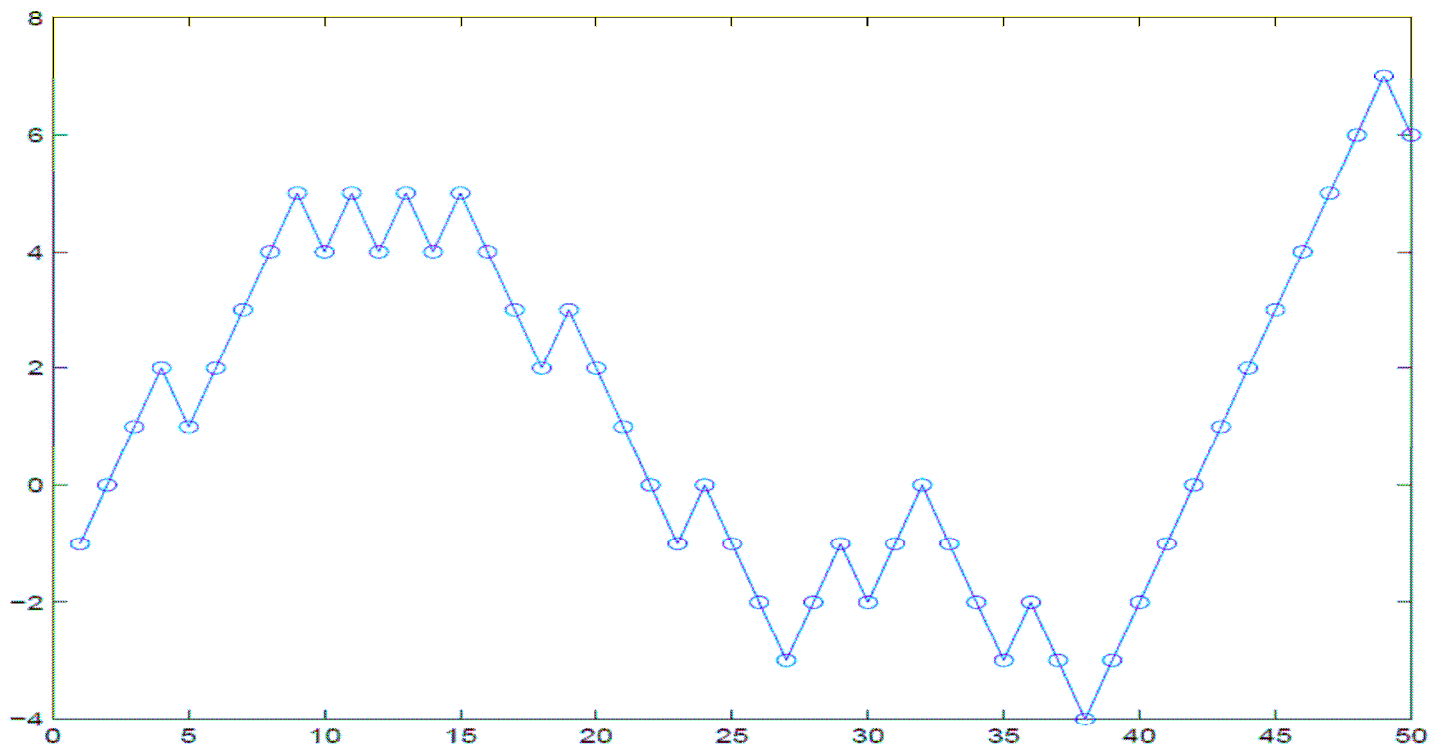
$$P[X_t = 1] = P[X_t = -1] = 1/2.$$



# Modely časových radov

■ Náhodný chod – Random Walk  $S_t = \sum_{i=1}^t X_i$

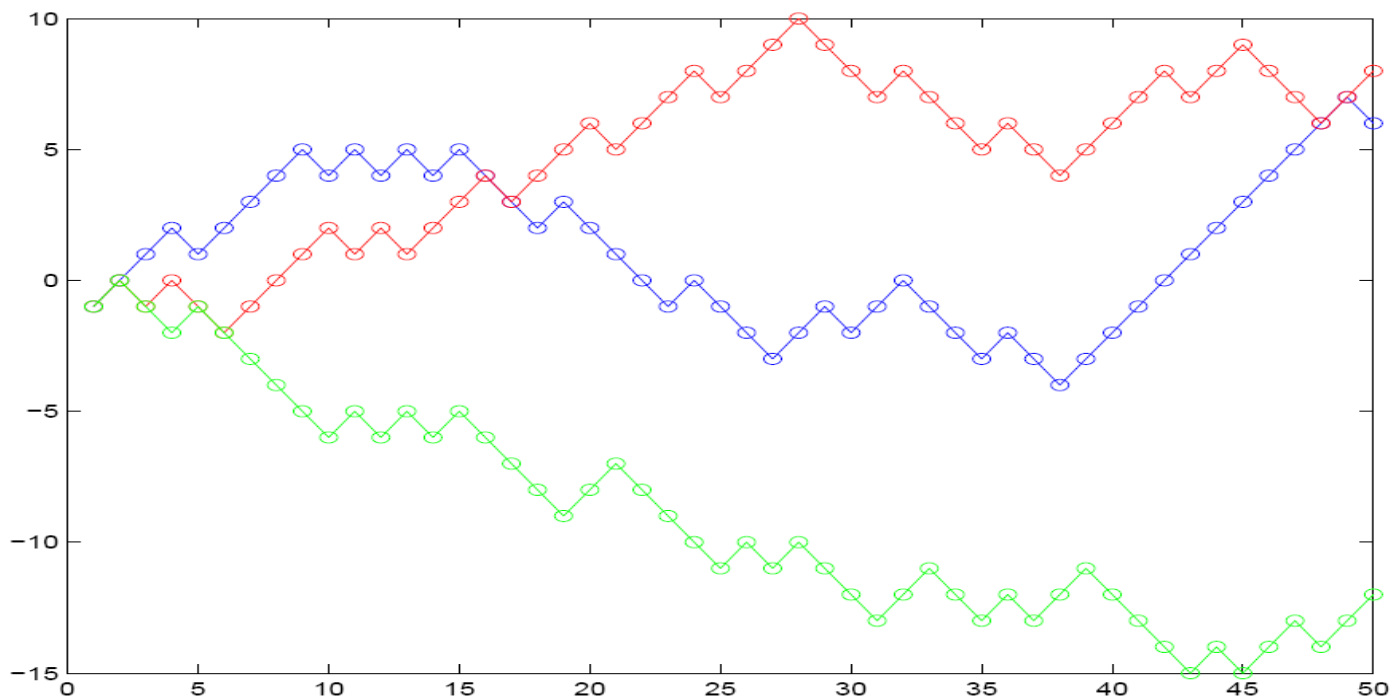
Diferencie  $\nabla S_t = S_t - S_{t-1} = X_t$



# Modely časových radov

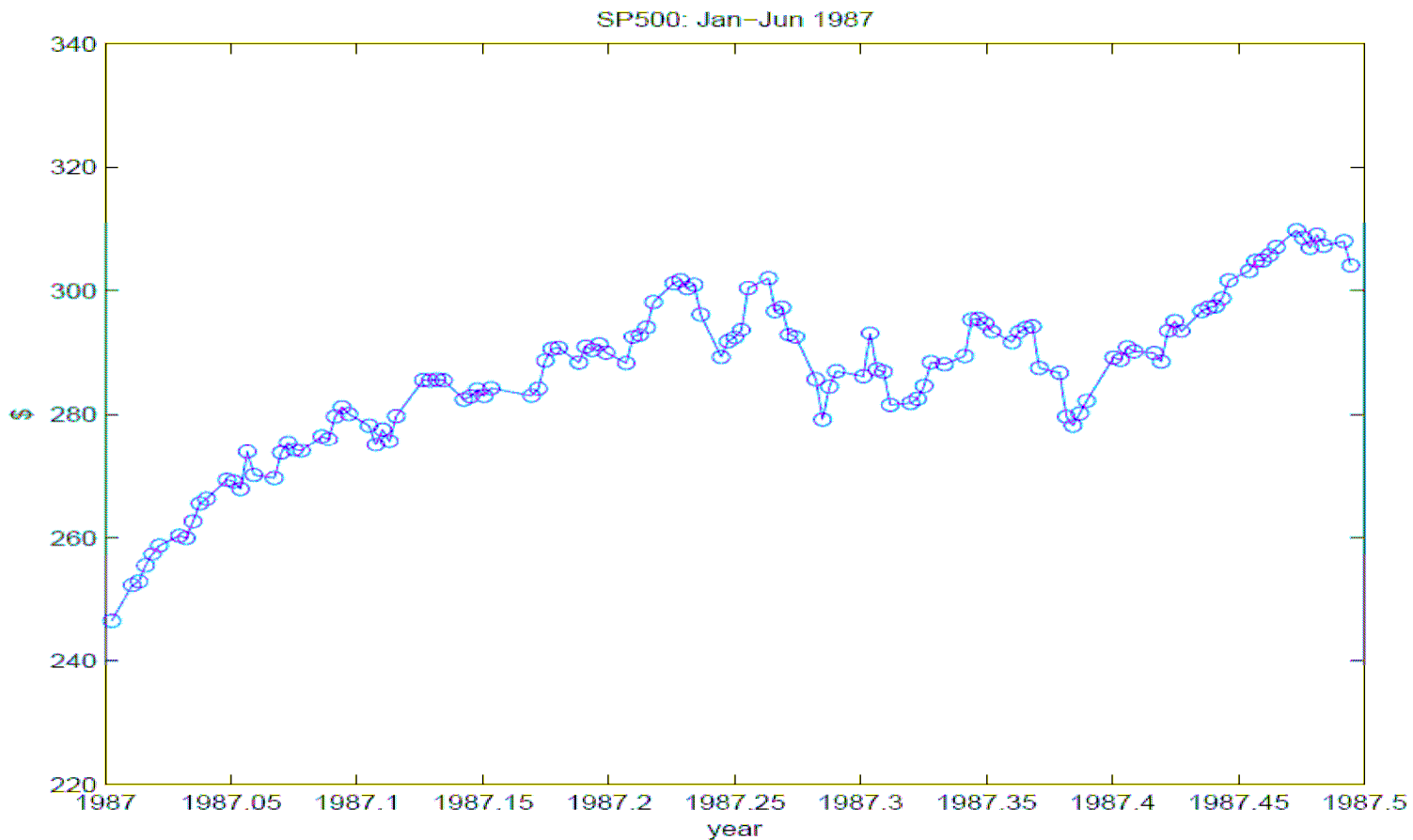
## ■ Náhodný chod – Random Walk

$$E(S_t) = ?, V(S_t) = ?$$



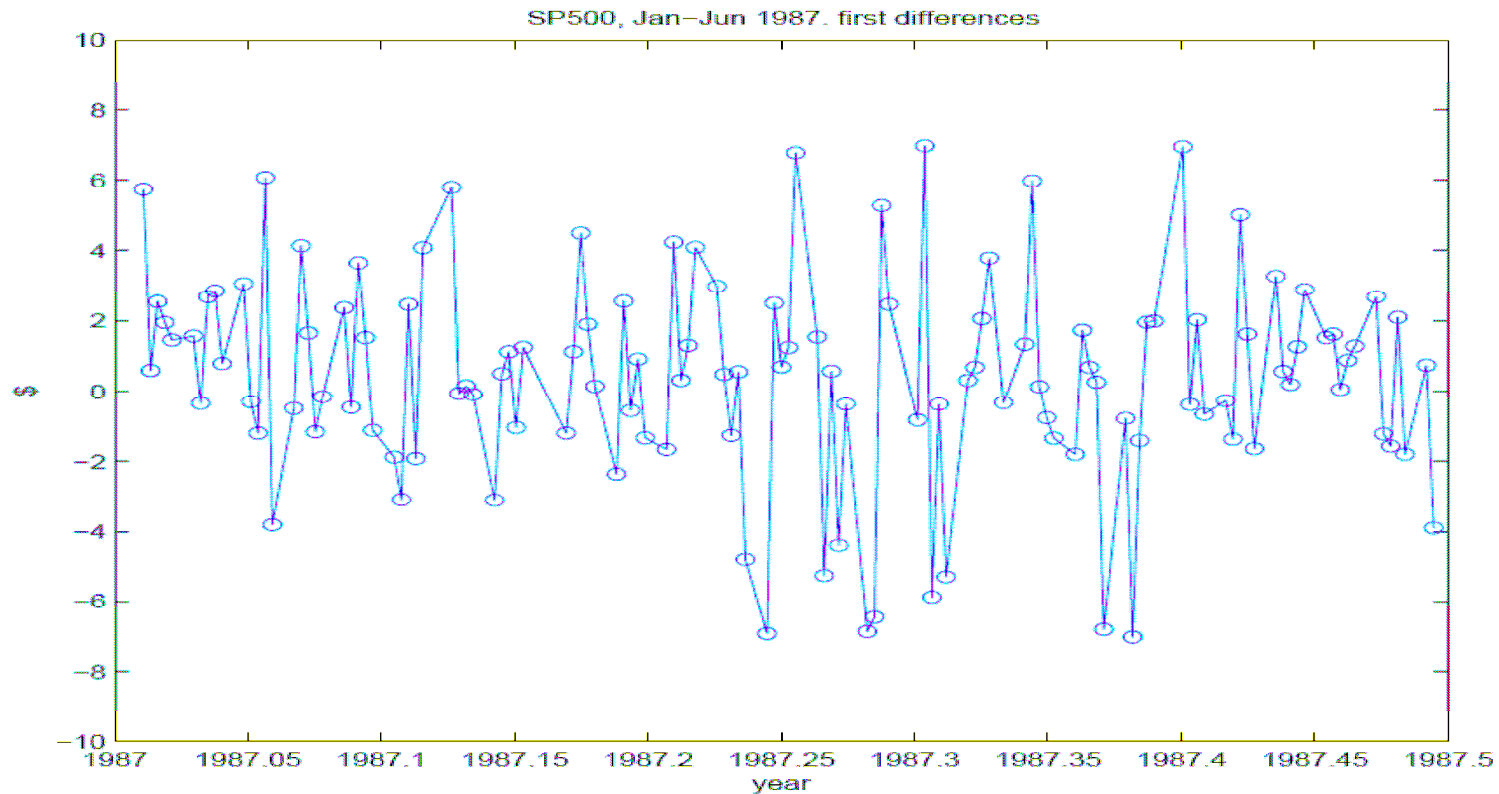
# Modely časových radov

## ■ Náhodný chod – Random Walk S&P 500



# Modely časových radov

## ■ Náhodný chod – Random Walk S&P 500

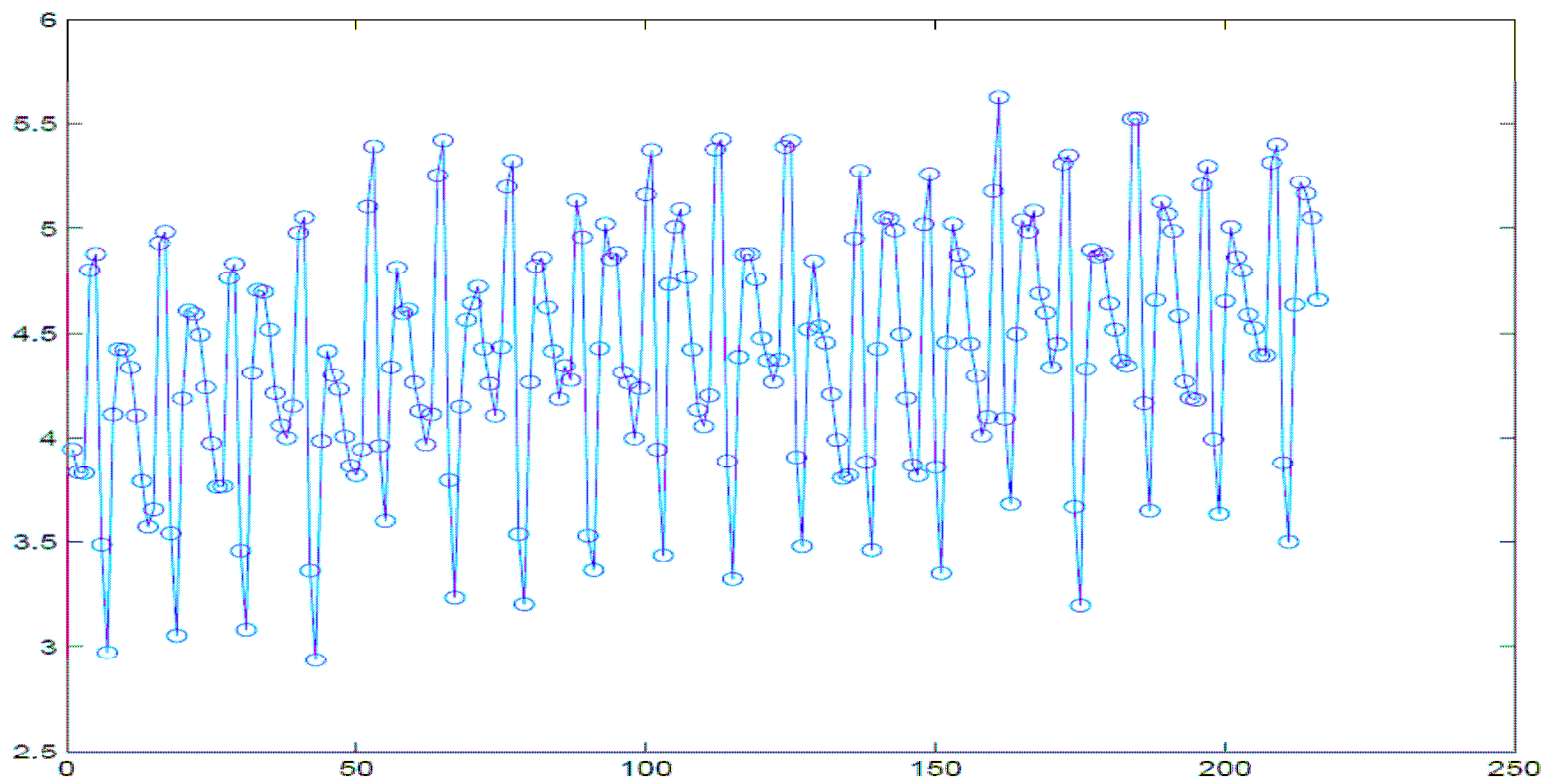




# Modely časových radov

## ■ Trend a sezónny model S&P 500

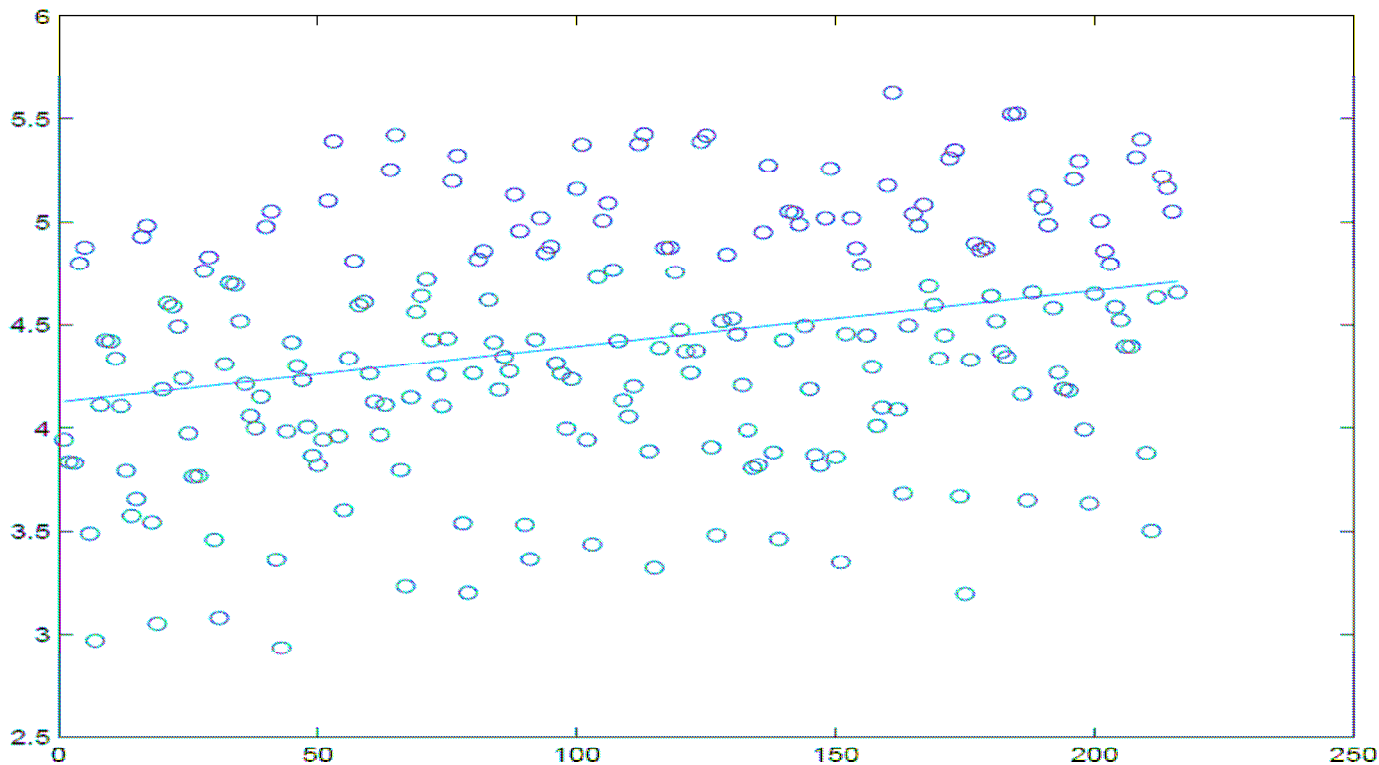
$$X_t = T_t + S_t + E_t = \beta_0 + \beta_1 t + \sum_i (\beta_i \cos(\lambda_i t) + \gamma_i \sin(\lambda_i t)) + E_t$$



# Modely časových radov

## ■ Trend a sezónny model S&P 500

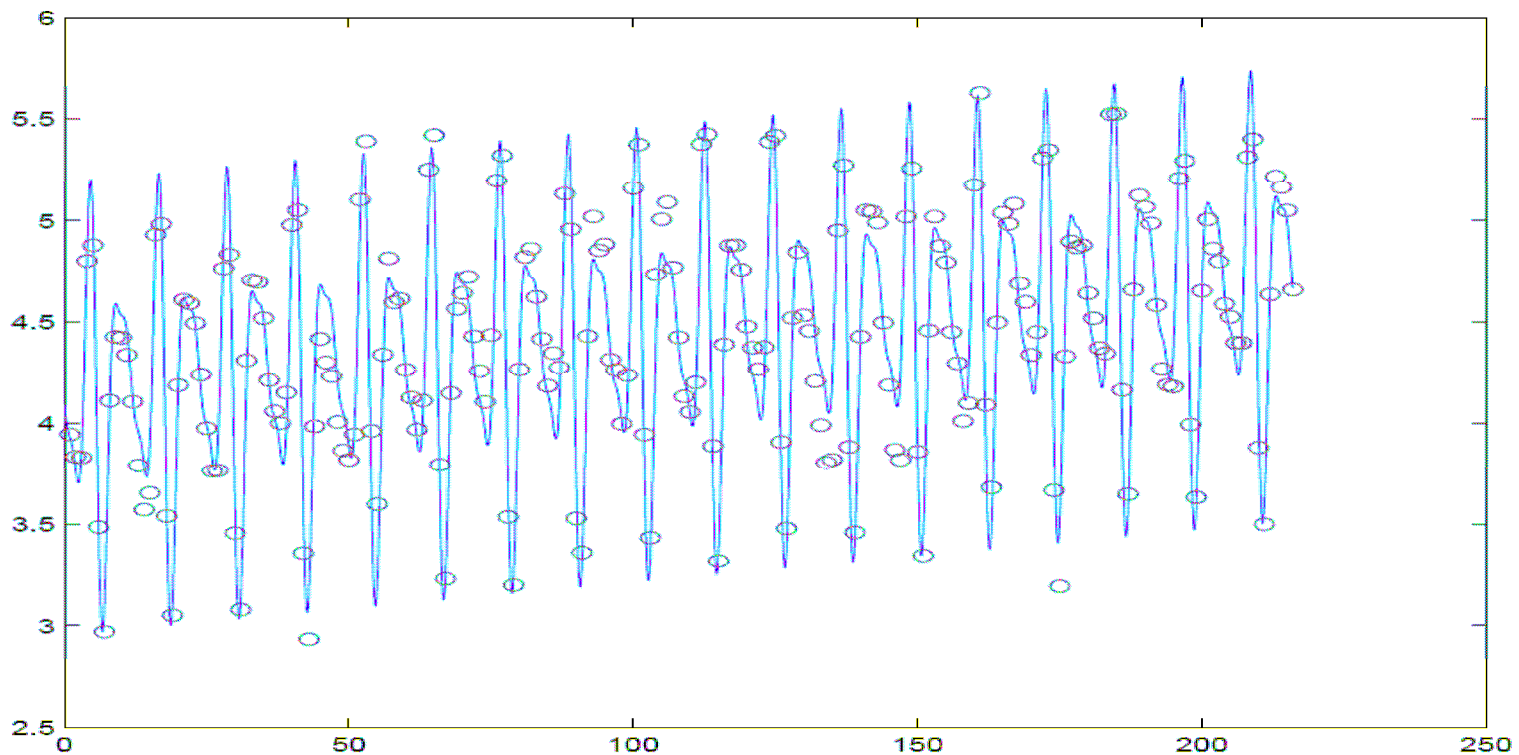
$$X_t = T_t + E_t = \beta_0 + \beta_1 t + E_t$$



# Modely časových radov

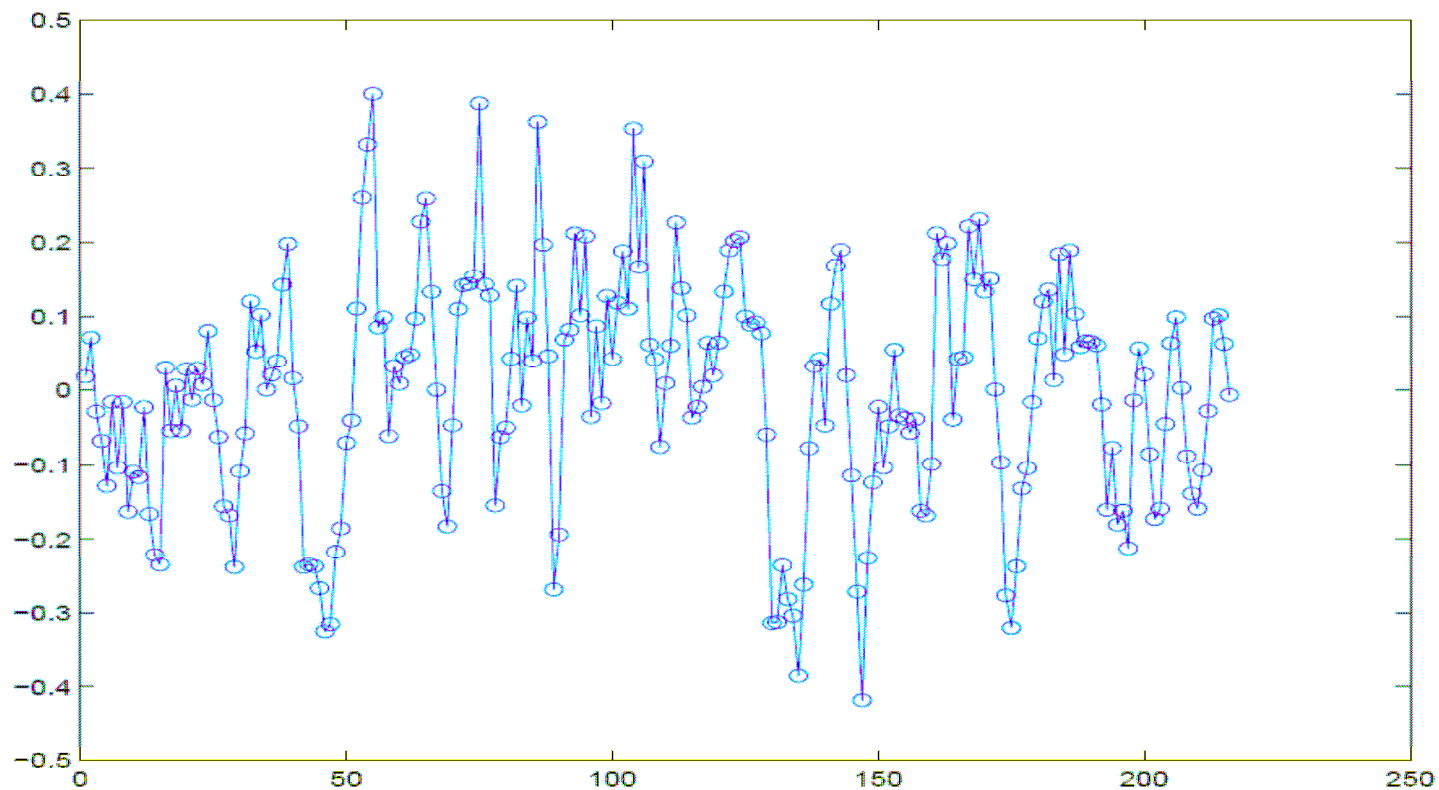
## ■ Trend a sezónny model S&P 500

$$X_t = T_t + S_t + E_t = \beta_0 + \beta_1 t + \sum_i (\beta_i \cos(\lambda_i t) + \gamma_i \sin(\lambda_i t)) + E_t$$



# Modely časových radov

- Trend a sezónny model S&P 500 – reziduály



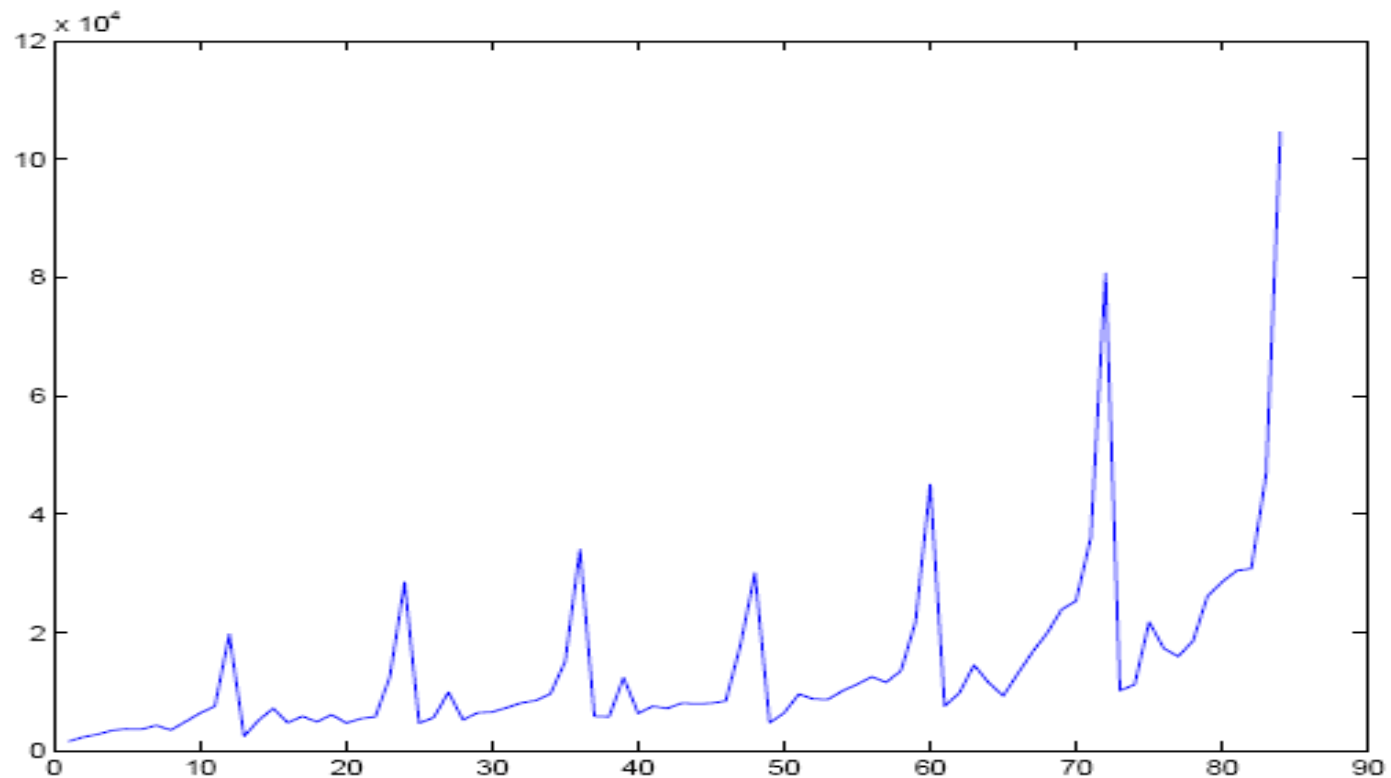
# Modelovanie časových radov

- Vykreslíme časový rad; hľadáme v ňom trend, sezónne zložky, skoky, extrémne hodnoty
- Transformujeme údaje, aby boli stacionárne
  - Odhadneme a odstránime  $T_t$  a  $S_t$
  - Diferencujeme
  - Použijeme nelineárnu transformáciu –  $\log$ ,  $\sqrt{\phantom{x}}$
  - Identifikujeme model v reziduáloch



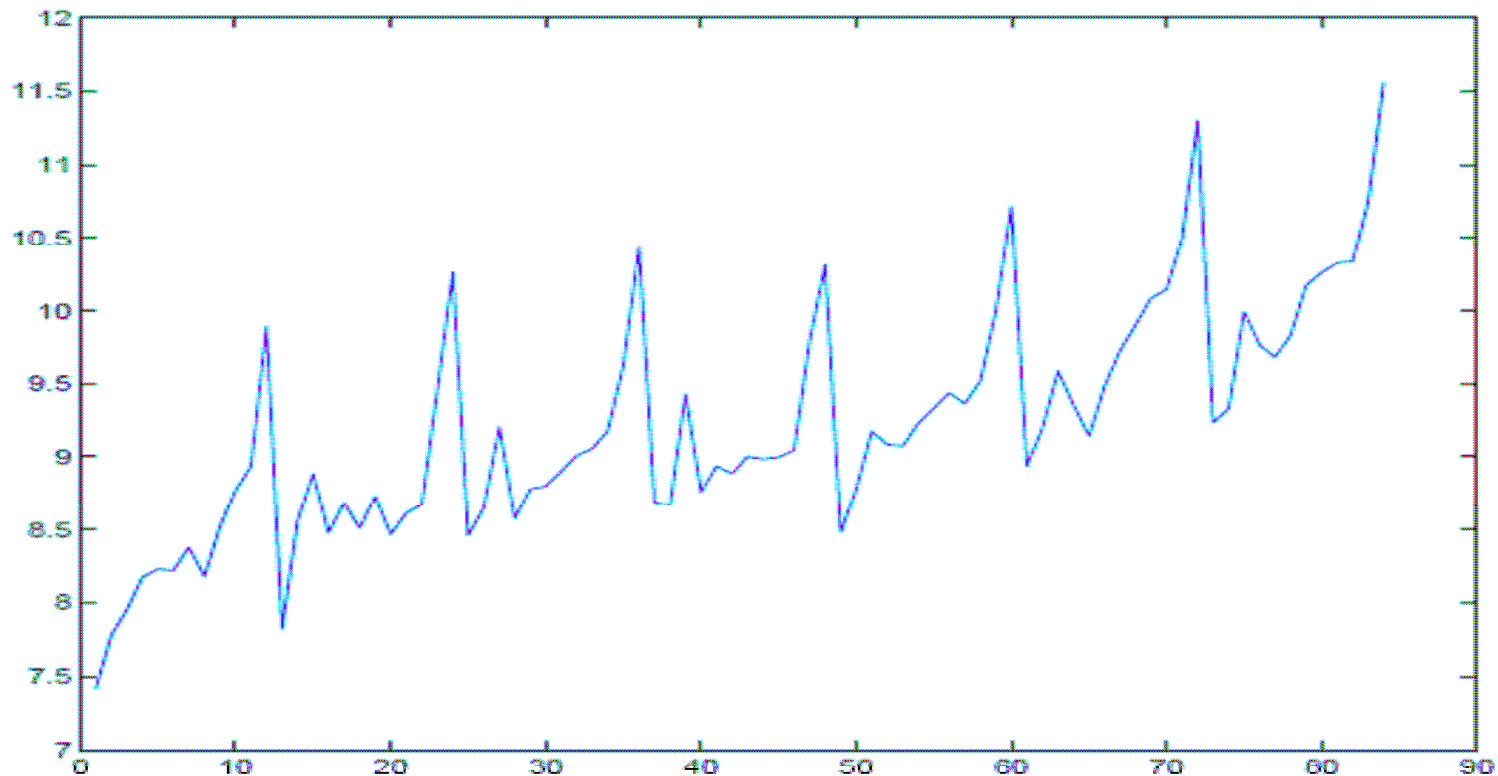
# Modelovanie časových radov

## ■ Nelineárna transformácia – mesačný predaj



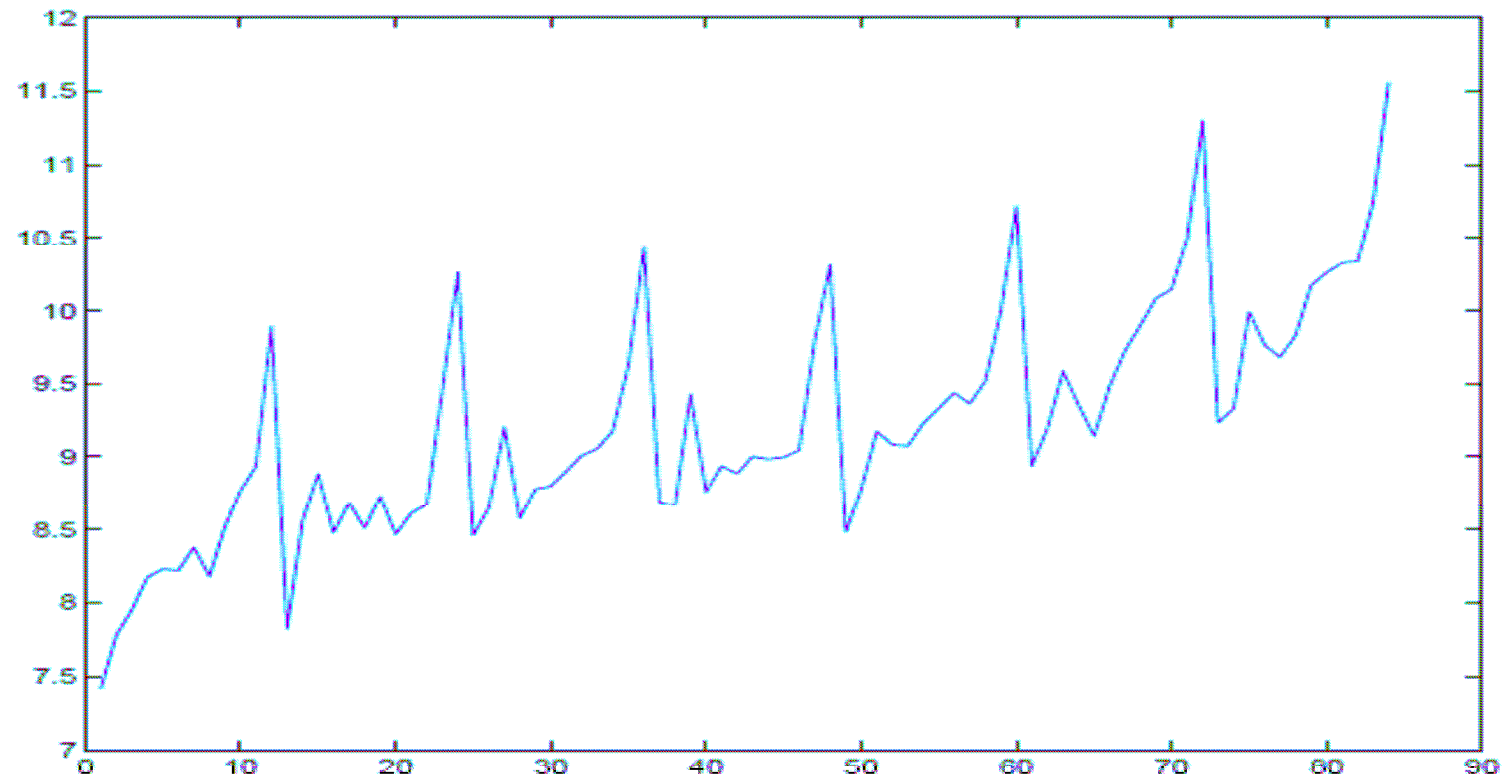
# Modelovanie časových radov

## ■ Nelineárna transformácia – mesačný predaj



# Modelovanie časových radov

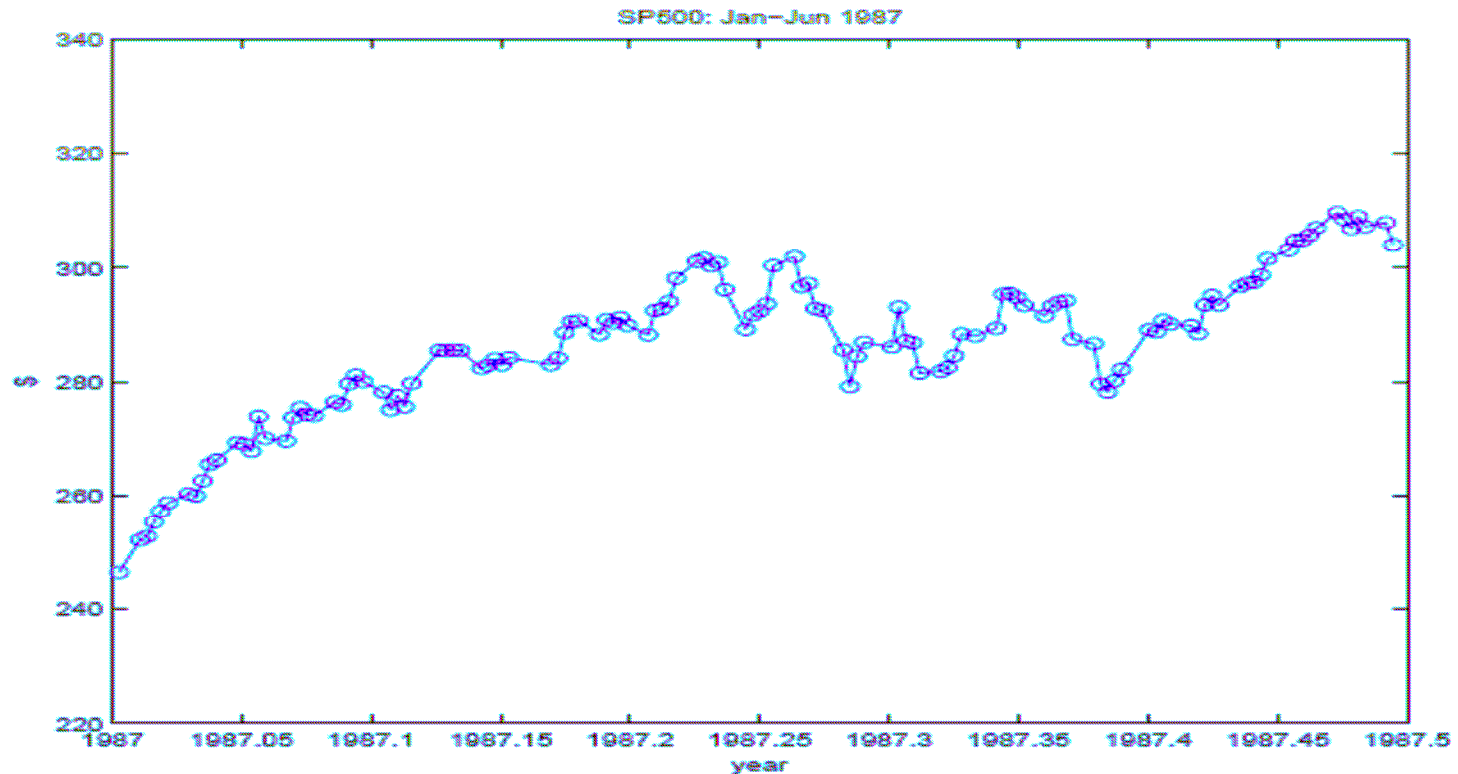
## ■ Nelineárna transformácia – mesačný predaj





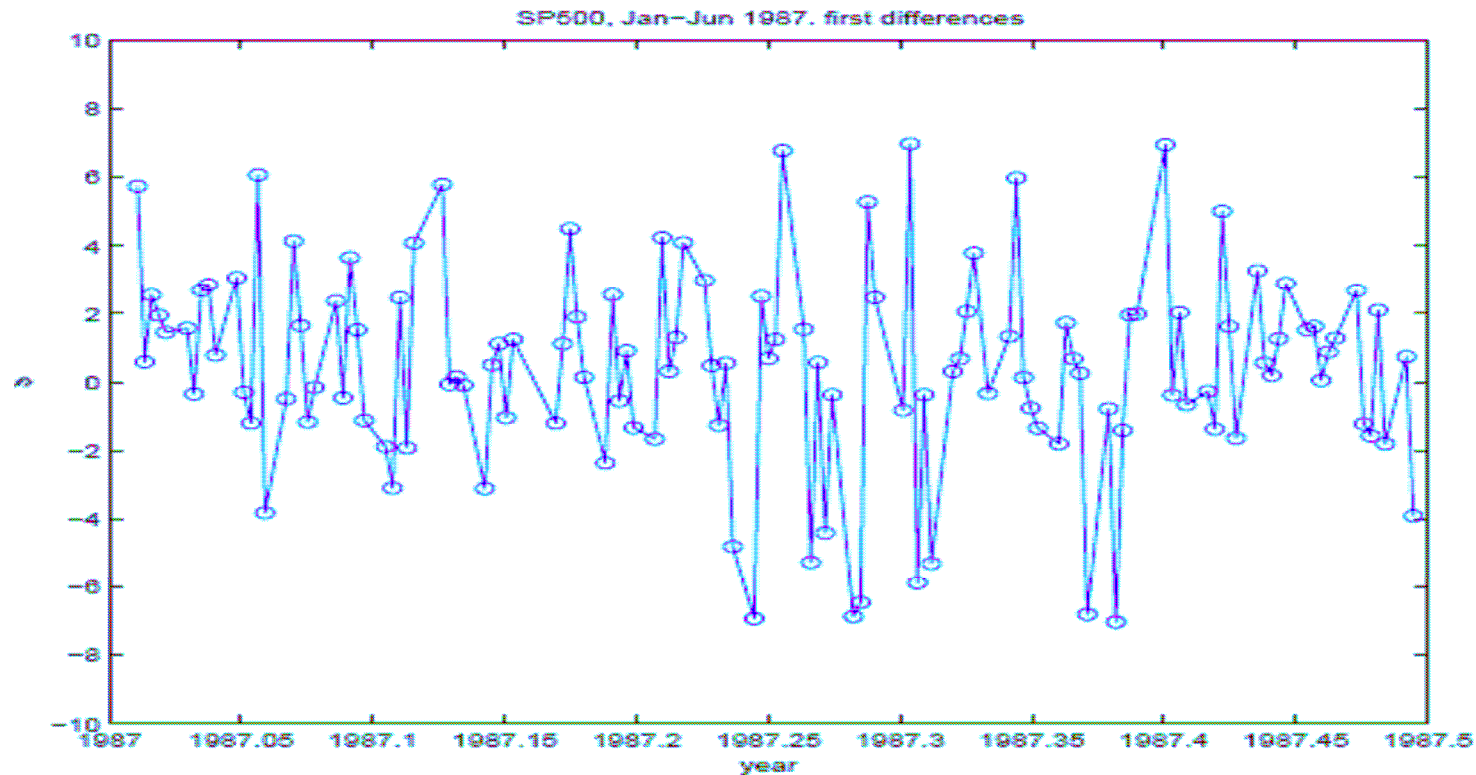
# Modelovanie časových radov

## ■ Nelineárna transformácia – S&P500



# Modelovanie časových radov

## ■ Nelineárna transformácia – S&P500



# Modelovanie časových radov

## ■ Diferencovanie a trend

Definujme operátor prvej diferencie

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1} = (1 - B)X_t$$

Kde B je operátor posunu,  $BX_t = X_{t-1}$

□ Ak

$$X_t = \beta_0 + \beta_1 t + Y_t$$

tak 
$$\nabla X_t = \beta_1 + \nabla Y_t$$

□ Ak

$$X_t = \sum_{i=0}^k \beta_i t^i + Y_t$$

Tak 
$$\nabla^k X_t = k! \beta_k + \nabla^k Y_t$$

kde 
$$\nabla^k X_t = \nabla(\nabla^{k-1} X_t) \quad \nabla^1 X_t = \nabla X_t$$



# Modelovanie časových radov

- Diferencovanie a sezónna variabilita  
Definujme operátor s-tej diferencie

$$\nabla_s X_t = X_t - X_{t-s} = (1 - B^s)X_t$$

Kde  $B^s$  je operátor posunu,  $B^s X_t = B(B^{s-1} X_t)$

□ Ak

$$X_t = T_t + S_t + Y_t,$$

a  $S_t$  má periódu  $s$ , t.j.  $S_t = S_{t-s}$  pre všetky  $t$ , tak

$$\nabla_s X_t = T_t - T_{t-s} + \nabla_s Y_t$$



# Stacionarita

## ■ Príklad – autoregresný proces AR(1)

$$X_t = \phi X_{t-1} + W_t, \quad \{W_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$$

Predpokladáme, že  $\{X_t\}$  je stacionárny a  $|\phi| < 1$

Máme

$$E[X_t] = 0 \quad E[X_t^2] = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}$$

$$\gamma_X(h) = \text{Cov}(\phi X_{t+h-1} + W_{t+h}, X_t)$$

$$= \phi \text{Cov}(X_{t+h-1}, X_t)$$

$$= \phi \gamma_X(h-1)$$

$$= \phi^{|h|} \gamma_X(0)$$

$$= \frac{\phi^{|h|} \sigma^2}{1 - \phi^2}$$



# Stacionarita

## ■ Príklad – autoregresný proces AR(1) – ACF

