Časové rady

Časové rady

Ján Pekár

Prednáška 2

Stacionarita, ACF a výberová ACF

Predošlá prednáška

- Predmet teórie časových radov
- Modely časových radov
- Modelovanie časových radov: lov stacionarity

Obsah prednášky

- Stacionarita
- Autokovariancia, autokorelácia
- Lineárne procesy MA a AR
- Výberová autokorelačná funkcia

Časový rad

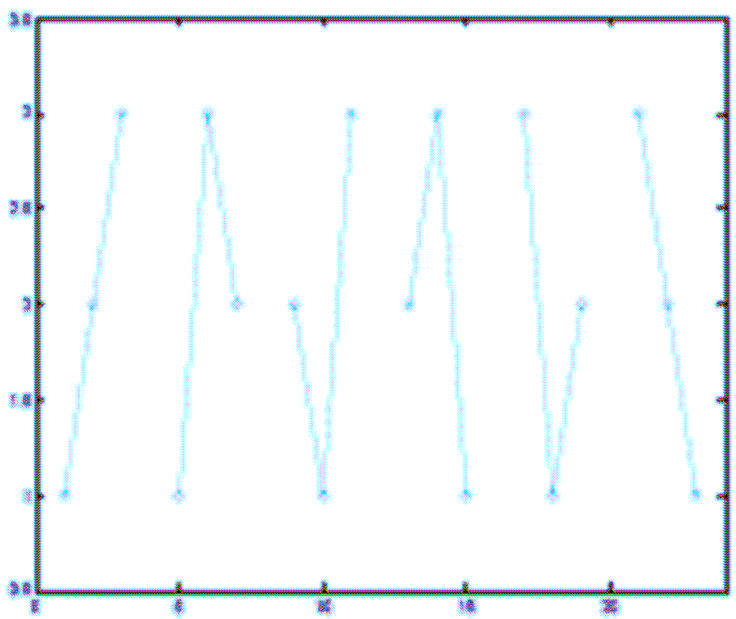
- Definícia

Rad náhodných premenných $\{X_{t,}\ t \varepsilon T\}$ usporiadaných v čase voláme náhodný proces X

- Značenie:
  - X_1, X_2, ... označuje stochastický proces
  - x_1, x_2, ... Označuje realizáciu stochastického procesu
- Vo väčšine prípadov sa obmedzíme len na podmienky druhého rádu: $E(X_t)$ a $E(X_{t1}, X_{t2})$

Testovanie i.i.d.

- $\{X_t\}$ je i.i.d. implikuje, že X_t, X_{t+1}, X_{t+2} sa vyskytuje rovnako pravdepodobne každej z nasledujúcich šiestich pozícií



Testovanie i.i.d.

- Definujme T ako počet otočení

Potom E(T)=2(n-2)/3

Dá sa ukázať, že T~AN(2n/3,8n/45)

$$X \sim AN(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

H_0: $\{X_t\}$ je i.i.d. odmietneme (5%), ak

$$\left|T - \frac{2n}{3}\right| > 1.96\sqrt{\frac{8n}{45}}.$$

Testovanie i.i.d.

- Kladná/záporná korelácia pri posunutí 1

$$S = |\{i : X_i > X_{i-1}\}| = |\{i : (\nabla X)_i > 0\}|.$$

$$\mathrm{E}S = \frac{n-1}{2}.$$

Dá sa ukázať S~AN(n/2,n/12)

H_0: $\{X_t\}$ je i.i.d. odmietneme (5%), ak

$$\left|S - \frac{n}{2}\right| > 1.96\sqrt{\frac{n}{12}}$$

Testovanie i.i.d.

- Trend

$$N = |\{(i,j) : X_i > X_j \text{ and } i > j\}|$$

$$\mathrm{E}N = \frac{n(n-1)}{4}.$$

Dá sa ukázať N~AN(n^2/4,n^3/36)

H_0: $\{X_t\}$ je i.i.d. odmietneme (5%), ak

$$\left|N - \frac{n^2}{4}\right| > 1.96\sqrt{\frac{n^3}{36}}.$$

Testovanie kladnej/zápornej korelácie pri posunutí 1

$$S = |\{i : X_i > X_{i-1}\}| = |\{i : (\nabla X)_i > 0\}|.$$

$$\mathrm{E}S = \frac{n-1}{2}.$$

Stacionarita

- Definícia

$\{X_t\}$ je ostro stacionárny, ak pre všetky k, $t_1, \ldots, t_k$, $x_1, \ldots, x_k$ a h platí

$$P(X_{t_1} \leq x_1, \ldots, X_{t_k} \leq x_k) = P(X_{t_1+h} \leq x_1, \ldots, X_{t_k+h} \leq x_k)$$

t.j. posun na časovej osi nemení rozdelenie pravdepodobnosti

Stredná hodnota a autokovariancia

- Predpokladajme, že $\{X_t\}$ je časový rad s $E(X_t^2)<\infty$
  - Funkcia strednej hodnoty

$$\mu_t = \mathrm{E}[X_t]$$

  - Autokovariančná funkcia

$$\begin{aligned}\gamma_X(s,t) &= \mathrm{Cov}(X_s, X_t) \\ &= \mathrm{E}[(X_s - \mu_s)(X_t - \mu_t)]\end{aligned}$$

Slabá stacionarita

- Definícia

$\{X_t\}$ je (slabo) stacionárny, ak

- μ_t nezávisí na t
- $\mathrm{E}[X_t^2] < \infty$
- Pre každé h, $\gamma_X(t+h,t)\big|$ nezávisí na t

V takomto prípade budeme písať

$$\gamma_X(h) = \gamma_X(h,0)$$

Stacionarita

- Definícia

Autokorelačná funkcia (ACF) pre $\{X_t\}$ je definovaná ako

$$\begin{aligned}\rho_X(h) &= \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)} \\ &= \frac{\mathrm{Cov}(X_{t+h}, X_t)}{\mathrm{Cov}(X_t, X_t)} \\ &= \mathrm{Corr}(X_{t+h}, X_t)\end{aligned}$$

Stacionarita

- Príklad – i.i.d. šum $\mathrm{E}[X_t] = 0, \mathrm{E}[X_t^2] = \sigma^2$

ACF

$$\gamma_X(t+h,t) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{ak } h=0 \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

Platí:

- $\mu_t = 0$ je nezávislé na *t*
- $\mathrm{E}[X_t^2] < \infty$
- $\gamma_X(t+h,t) = \gamma_X(h,0)$ pre všetky *t*

Teda $\{X_t\}$ je stacionárny

Stacionarita

- Príklad – náhodný chod $S_t = \sum_{i=1}^{t} X_i$ pre i.i.d.$\{X_t\}$ s nulovou strednou hodnotou

Máme:

- $\mathrm{E}[S_t] = 0$
- $\mathrm{E}[S_t^2] = t\sigma^2$
- $$\begin{aligned}\gamma_S(t+h,t) &= \mathrm{Cov}(S_{t+h}, S_t)\\ &= \mathrm{Cov}\left(S_t + \sum_{s=1}^{h} X_{t+s}, S_t\right)\\ &= \mathrm{Cov}(S_t, S_t) = t\sigma^2.\end{aligned}$$

Stacionarita

- Príklad – náhodný $E[X_t] = 0, E[X_t^2] = \sigma^2$ pre i.i.d.$\{X_t\}$ s nulovou strednou hodnotou

Platí:

- $\mu_t = 0$ je nezávislé na *t*
- $E[X_t^2] < \infty$
- $\gamma_S(t+h, t)$ nie je nezávislé na *t*

Teda $\{X_t\}$ nie je stacionárny

Kovariancia

$$\mathrm{Cov}(X+Y,Z) = \mathrm{Cov}(X,Z) + \mathrm{Cov}(Y,Z),$$

$$\mathrm{Cov}(aX,Y) = a\,\mathrm{Cov}(X,Y),$$

Ak X a Y sú nezávislé

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0.$$

Stacionarita

- Príklad – proces kĺzavých priemerov MA(1)

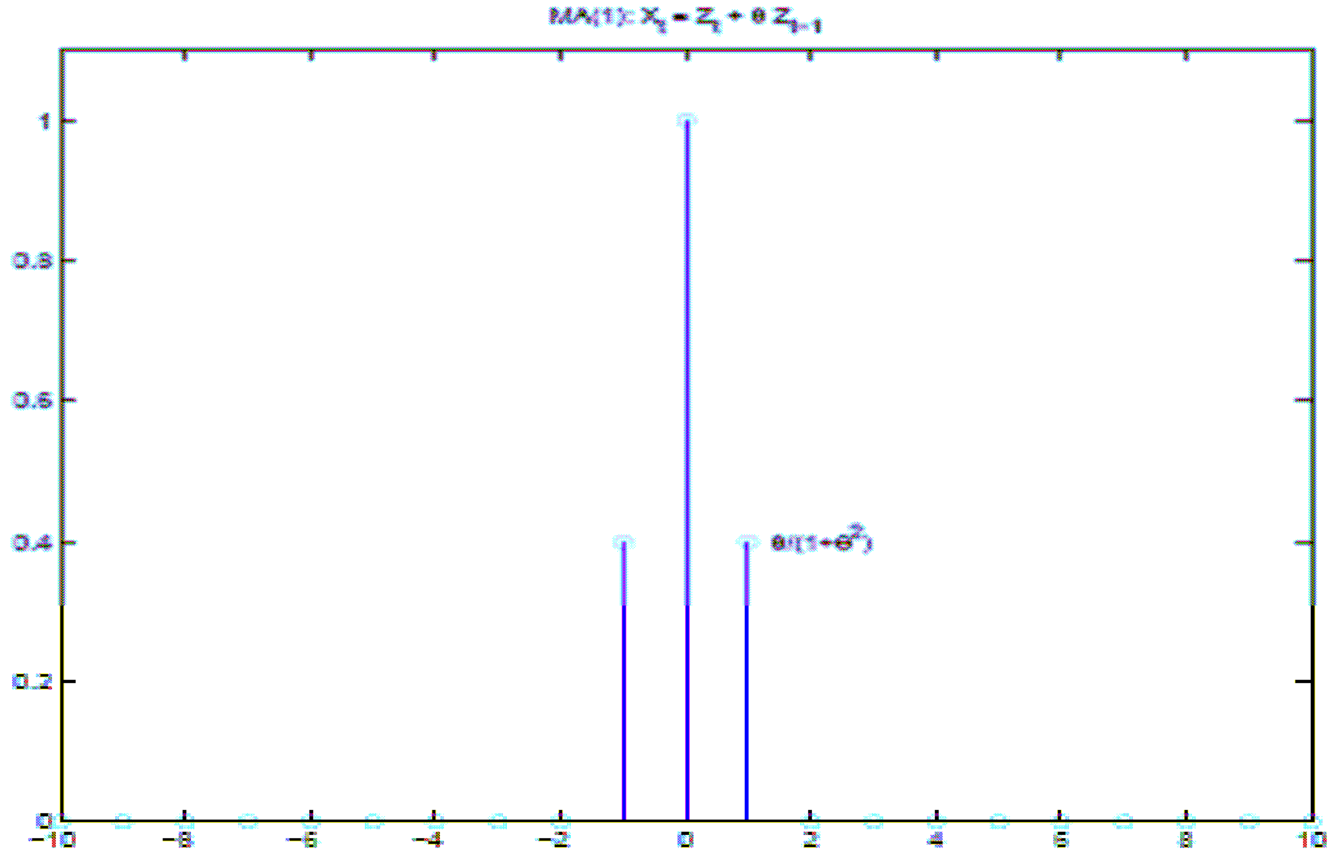
$$X_t = W_t + \theta W_{t-1}, \qquad \{W_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$$

Máme:

$$\gamma_X(t+h,t) = \mathrm{E}(X_{t+h}X_t)$$
$$= \mathrm{E}[(W_{t+h} + \theta W_{t+h-1})(W_t + \theta W_{t-1})]$$
$$= \begin{cases} \sigma^2(1+\theta^2) & \text{ak } h=0 \\ \sigma^2\theta & \text{ak } h=+1,-1 \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

Stacionarita

- Príklad – proces kĺzavých priemerov MA(1) - ACF



Stacionarita

- Príklad – autoregresný proces AR(1)

$$X_t = \phi X_{t-1} + W_t, \qquad \{W_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$$

Predpokladáme, že $\{X_t\}$ je stacionárny a $|\phi| < 1$

$$\mathrm{E}[X_t] = \phi \mathrm{E} X_{t-1} = 0$$

$$\mathrm{E}[X_t^2] = \phi^2 \mathrm{E}[X_{t-1}^2] + \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$$

(vyplýva zo stacionarity)

Stacionarita

- Príklad – autoregresný proces AR(1)

$$X_t = \phi X_{t-1} + W_t, \qquad \{W_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$$

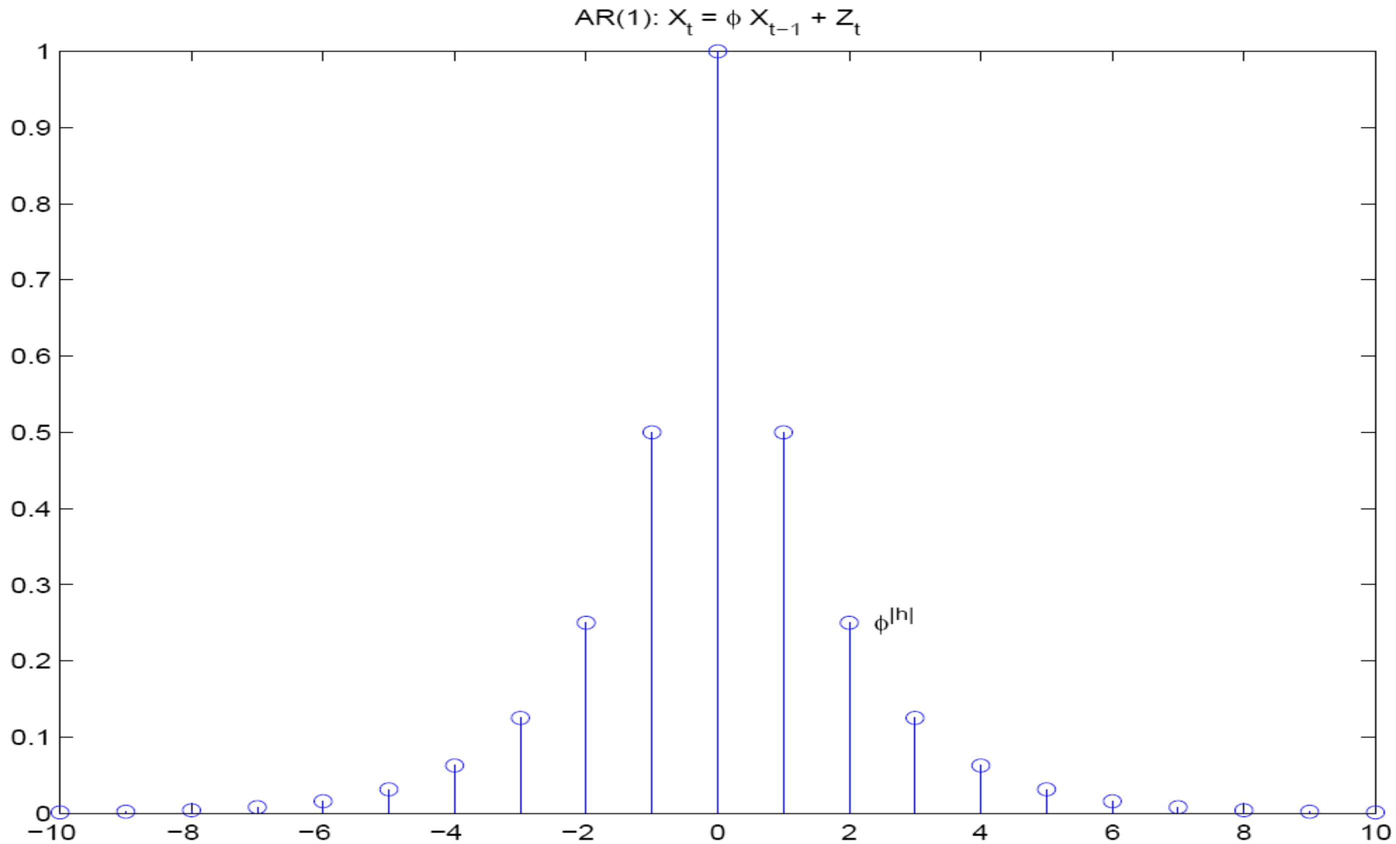
Predpokladáme, že $\{X_t\}$ je stacionárny a $|\phi| < 1$

Máme $\mathrm{E}[X_t] = 0, \qquad \mathrm{E}[X_t^2] = \dfrac{\sigma^2}{1-\phi^2}$

$$\begin{aligned}\gamma_X(h) &= \mathrm{Cov}(\phi X_{t+h-1} + W_{t+h}, X_t) \\ &= \phi \mathrm{Cov}(X_{t+h-1}, X_t) \\ &= \phi \gamma_X(h-1) \quad = \phi^{|h|} \gamma_X(0) \\ &= \frac{\phi^{|h|}\sigma^2}{1-\phi^2}.\end{aligned}$$

Stacionarita

- Príklad – autoregresný proces AR(1) – ACF



Lineárne procesy

- Dôležitá trieda stacionárnych časových radov

$$X_t = \mu + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j W_{t-j}$$

kde $\{W_t\} \sim WN(0, \sigma_w^2)$

a μ, ψ_j sú parametre vyhovujúce

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty.$$

Máme $\mu_X = \mu$ a $\gamma_X(h) = \sigma_w^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{h+j}$

(Prečo? Ukážte!)

Lineárne procesy

$$X_t = \mu + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j W_{t-j}$$

Ak zvolíme

$$\mu,$$

$$\psi_j = \begin{cases} 1 & \text{ak } j = 0 \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

Tak dostávame $\{X_t\} \sim WN(\mu, \sigma_W^2)$

Lineárne procesy

$$X_t = \mu + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j W_{t-j}$$

Ak zvolíme

$$\mu = 0$$

$$\psi_j = \begin{cases} 1 & \text{ak } j = 0 \\ \theta & \text{ak } j = 1 \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

Tak dostávame $X_t = W_t + \theta W_{t-1}$

Lineárne procesy

$$X_t = \mu + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j W_{t-j}$$

Ak zvolíme

$$\mu = 0$$

$$\psi_j = \begin{cases} \phi^j & \text{ak } j = 0 \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

Tak pre $|\phi| < 1$
dostávame $X_t = \phi X_{t-1} + W_t$

Odhad ACF: výberová ACF

- Pripomeňme si – $\{X_t\}$ je stacionárny časový rad:
  - Stredná hodnota $\mu = \mathrm{E}[X_t]$
  - Autokovariančná funkcia
    $$\gamma(h) = \mathrm{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \mathrm{E}[(X_{t+h} - \mu)(X_t - \mu)]$$
  - Autokorelačná funkcia
    $$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$$

Odhad ACF: výberová ACF

- Nech $x_1, \ldots, x_n$ sú pozorovania časového radu $\{X_t\}$

Potom výberová autokovariančná funkcia má tvar

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-|h|} (x_{t+|h|} - \bar{x})(x_t - \bar{x}) \qquad -n < h < n$$

Je to podobný tvar ako výberová autokovariancia

$(x_1, x_{h+1}), \ldots, (x_{n-h}, x_n)$

Okrem

- Normalizujeme s *n* namiesto *n-h*
- Odpočítame priemer celého súboru

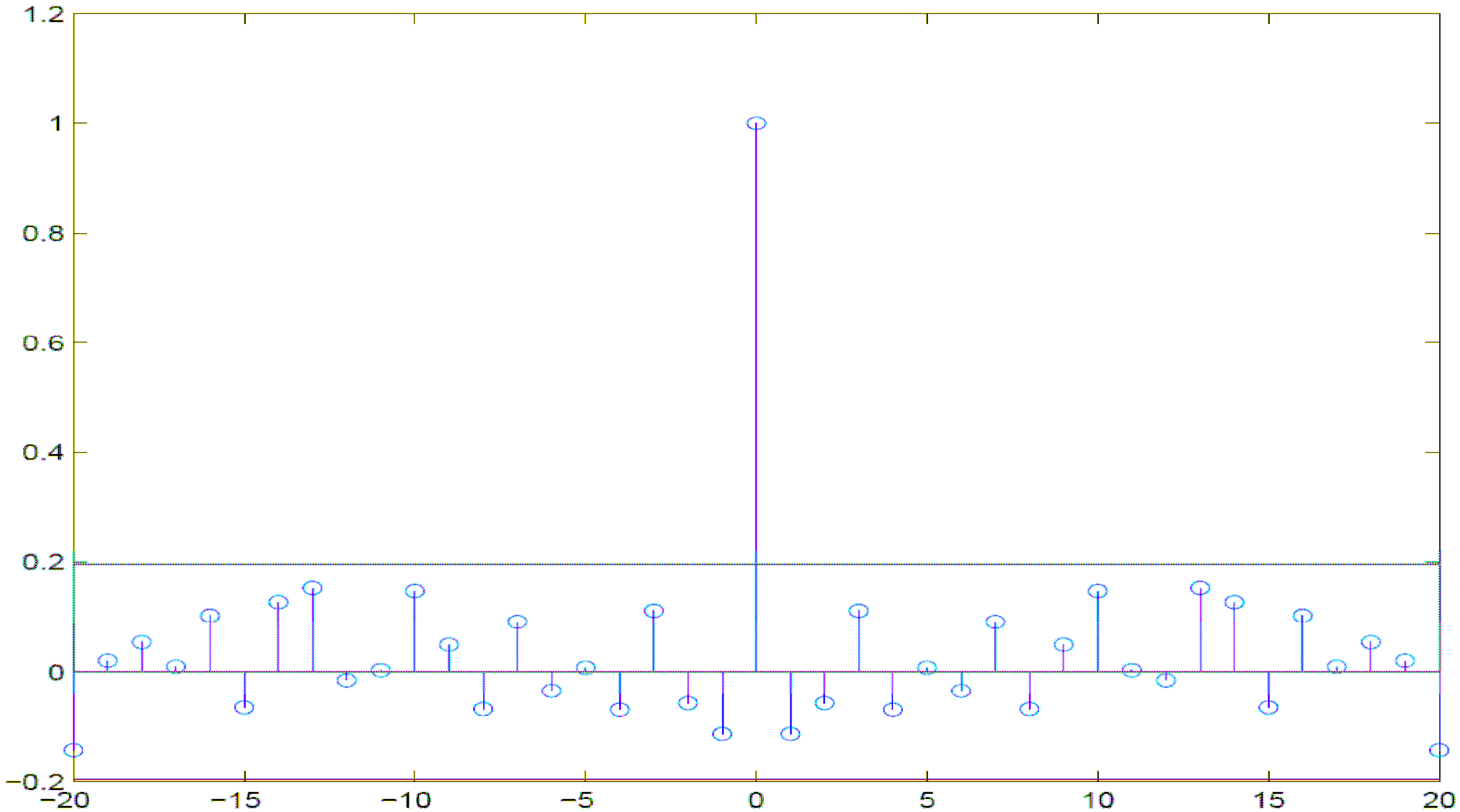
Odhad ACF: výberová ACF

- Nech $x_1, \ldots, x_n$ sú pozorovania časového radu $\{X_t\}$

výberová autokorelačná funkcia má tvar

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)}$$

Výberová ACF pre biely gaussovský šum



Výberová ACF

- Ukážeme si výberovú ACF pre rôzne typy časových radov (aj nestacionárnych, ktoré nie sú biely šumom

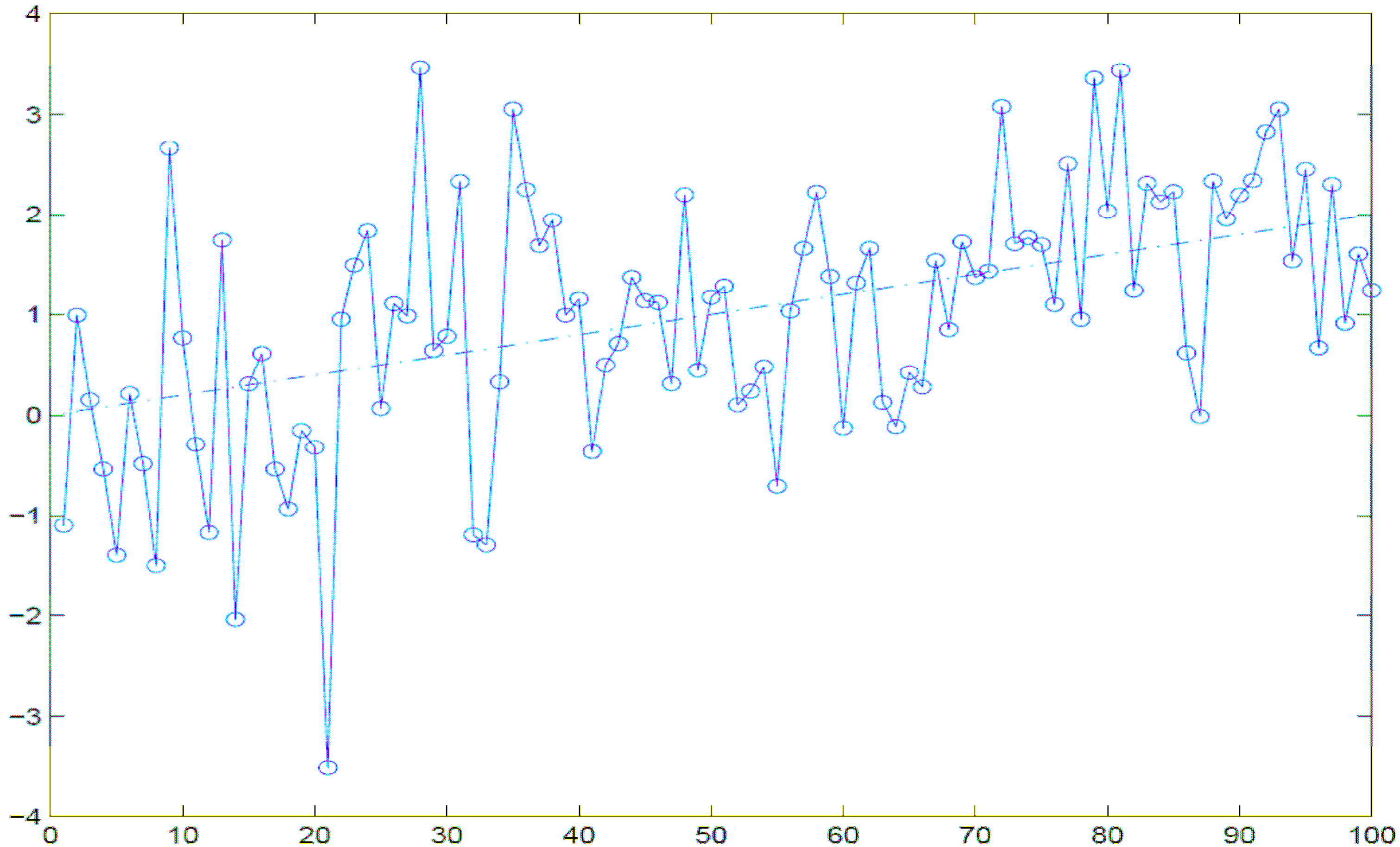
Typ časového radu	***ACF***
Biely šum	nulová
Trend	pomalý pokles
Periodický	periodická
MA(q)	nulová pre |h|>q
AR(p)	exponenciálny pokles

Výberová ACF

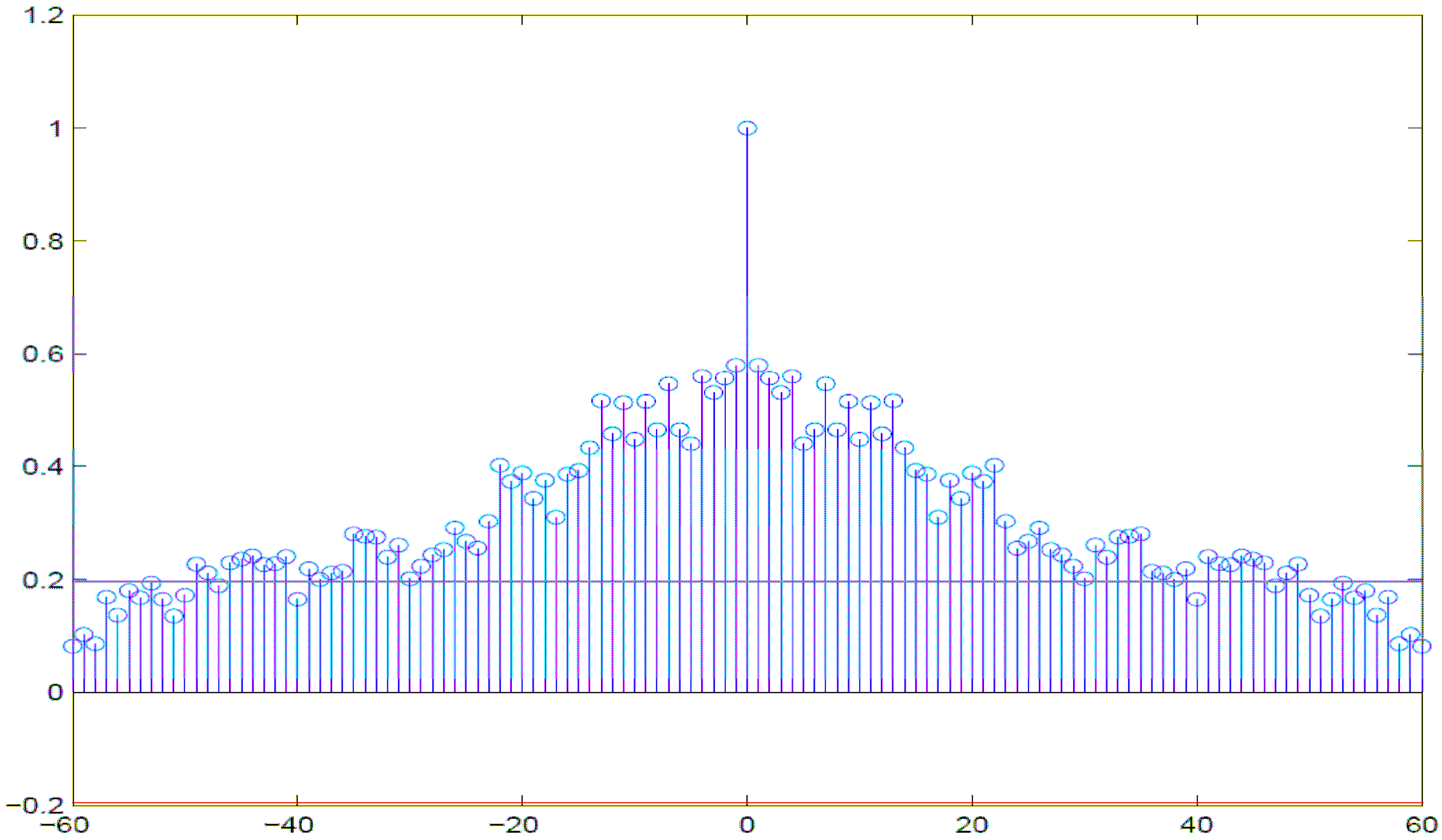
- Ukážeme si výberovú ACF pre rôzne typy časových radov (aj nestacionárnych, ktoré nie sú biely šumom

Typ časového radu	***ACF***
Biely šum	nulová
Trend	pomalý pokles
Periodický	periodická
MA(q)	nulová pre |h|>q
AR(p)	exponenciálny pokles

Výberová ACF - trend



Výberová ACF - trend

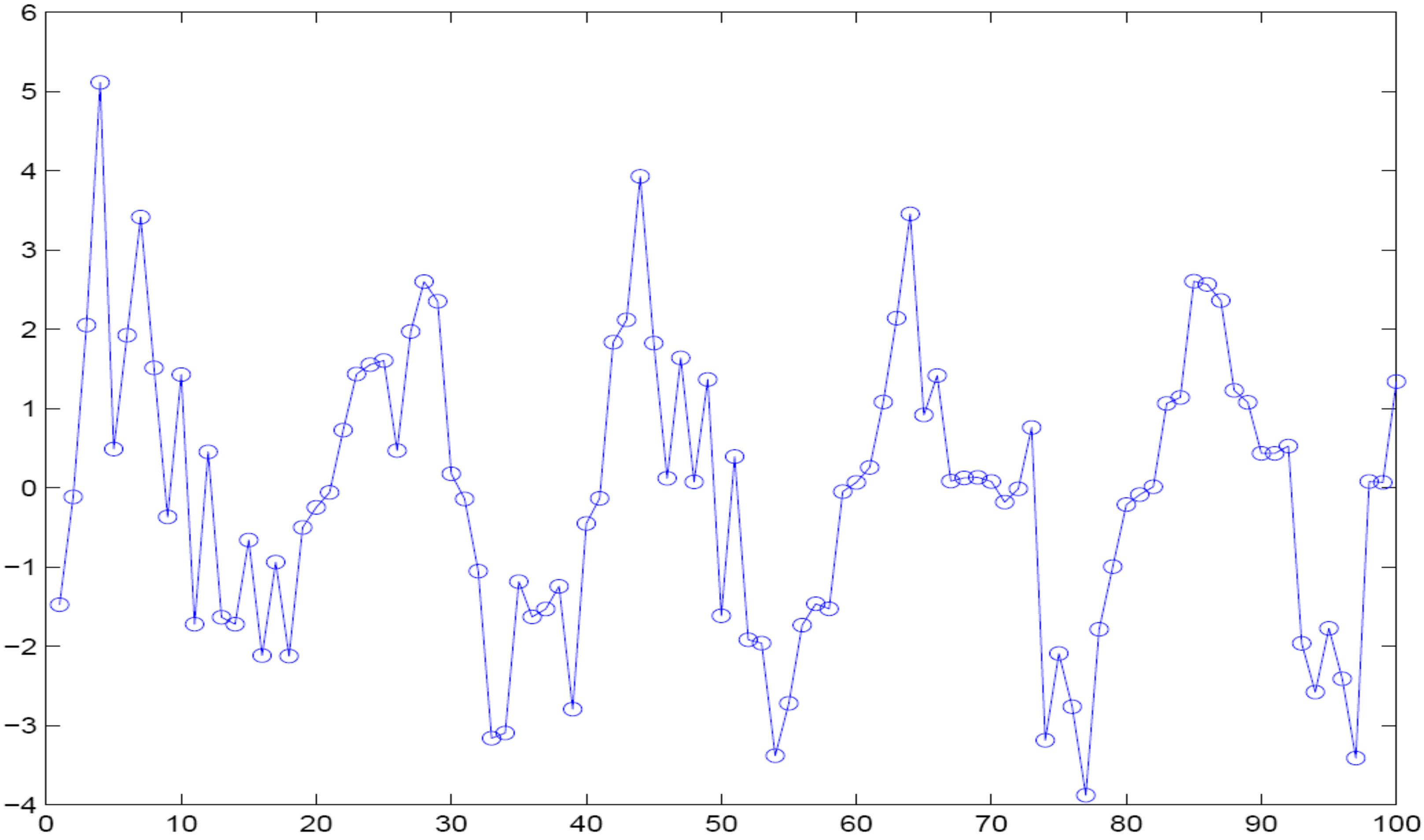


Výberová ACF

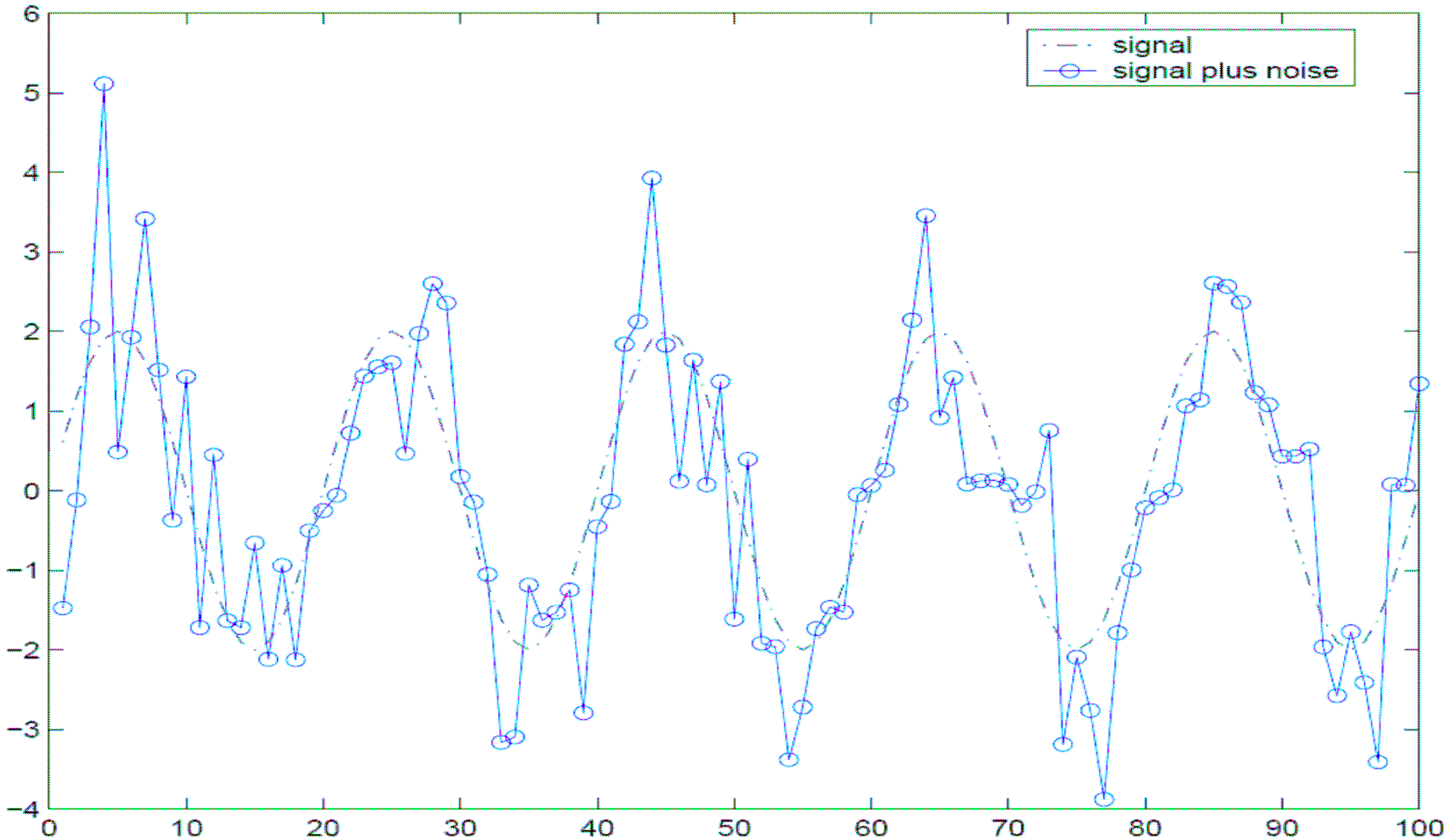
- Ukážeme si výberovú ACF pre rôzne typy časových radov (aj nestacionárnych, ktoré nie sú biely šumom)

Typ časového radu	***ACF***
Biely šum	nulová
Trend	pomalý pokles
Periodický	periodická
MA(q)	nulová pre |h|>q
AR(p)	exponenciálny pokles

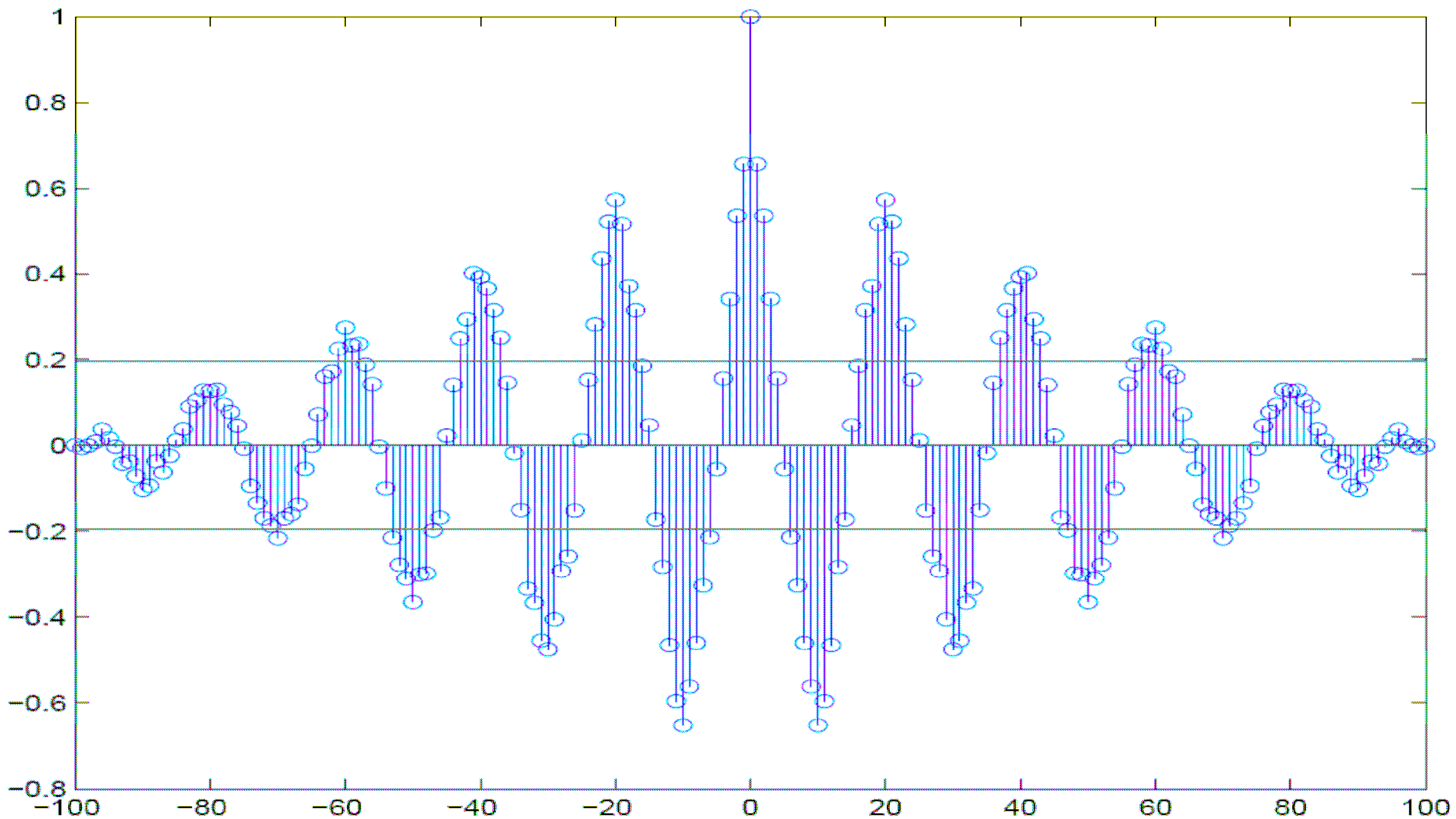
Výberová ACF - periodická



Výberová ACF - periodická



Výberová ACF - periodická

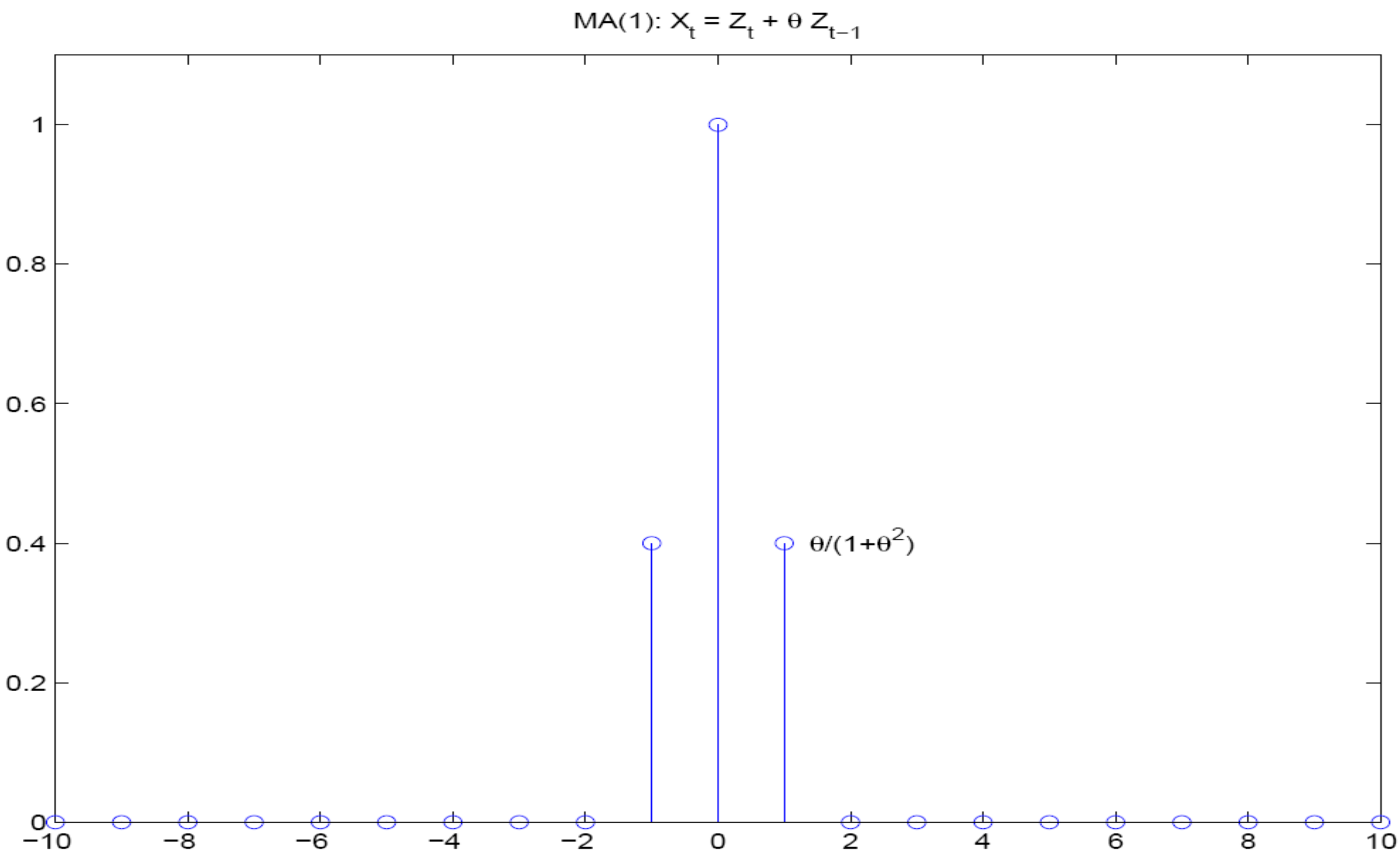


Výberová ACF

- Ukážeme si výberovú ACF pre rôzne typy časových radov (aj nestacionárnych, ktoré nie sú biely šumom

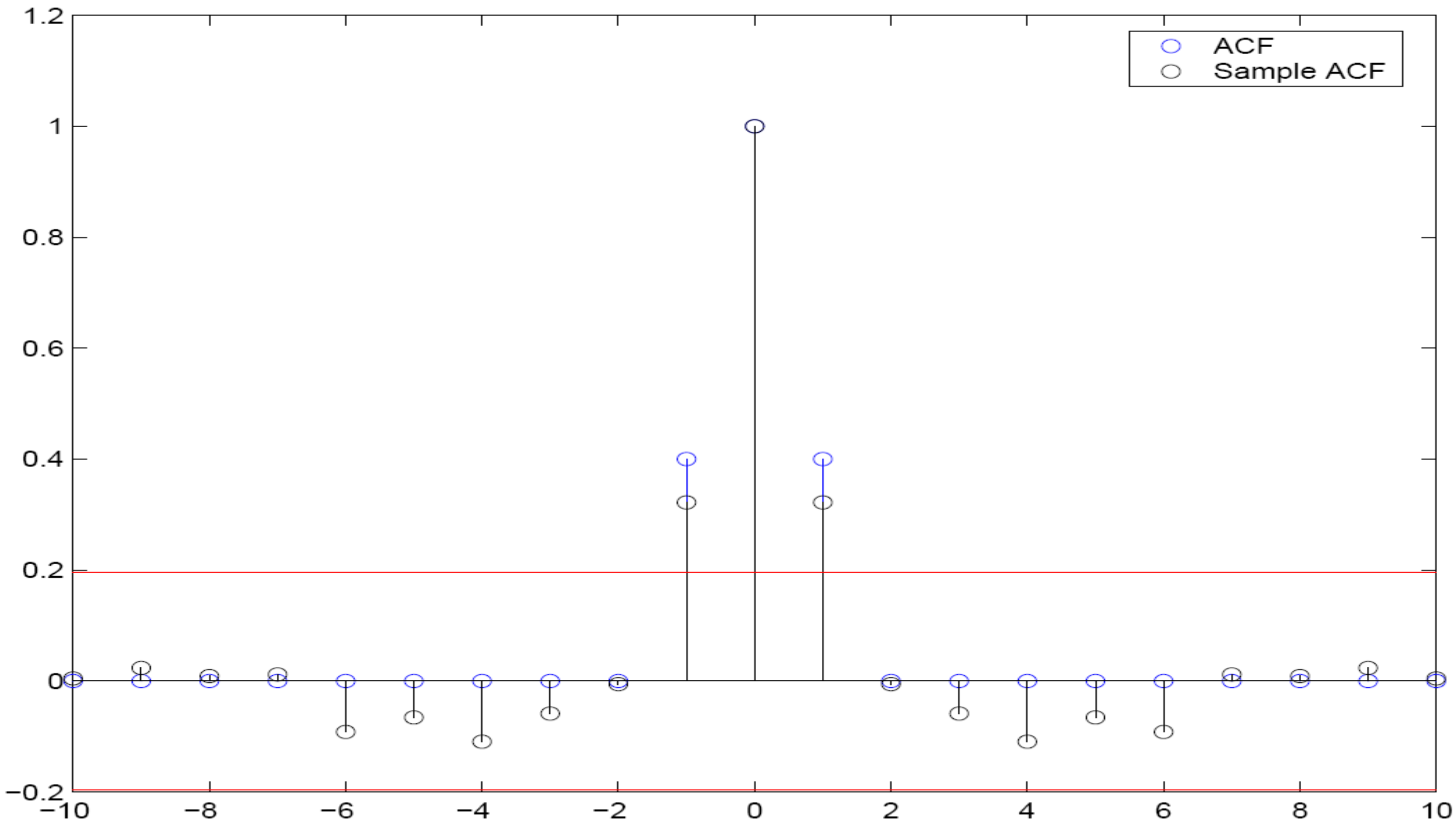
Typ časového radu	***ACF***
❑Biely šum	nulová
❑Trend	pomalý pokles
❑Periodický	periodická
❑MA(q)	nulová pre $\|h\|>q$
❑AR(p)	exponenciálny pokles

ACF – MA(1)



MA(1): $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−10
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
10
$\theta/(1+\theta^2)$

Výberová ACF – MA(1)

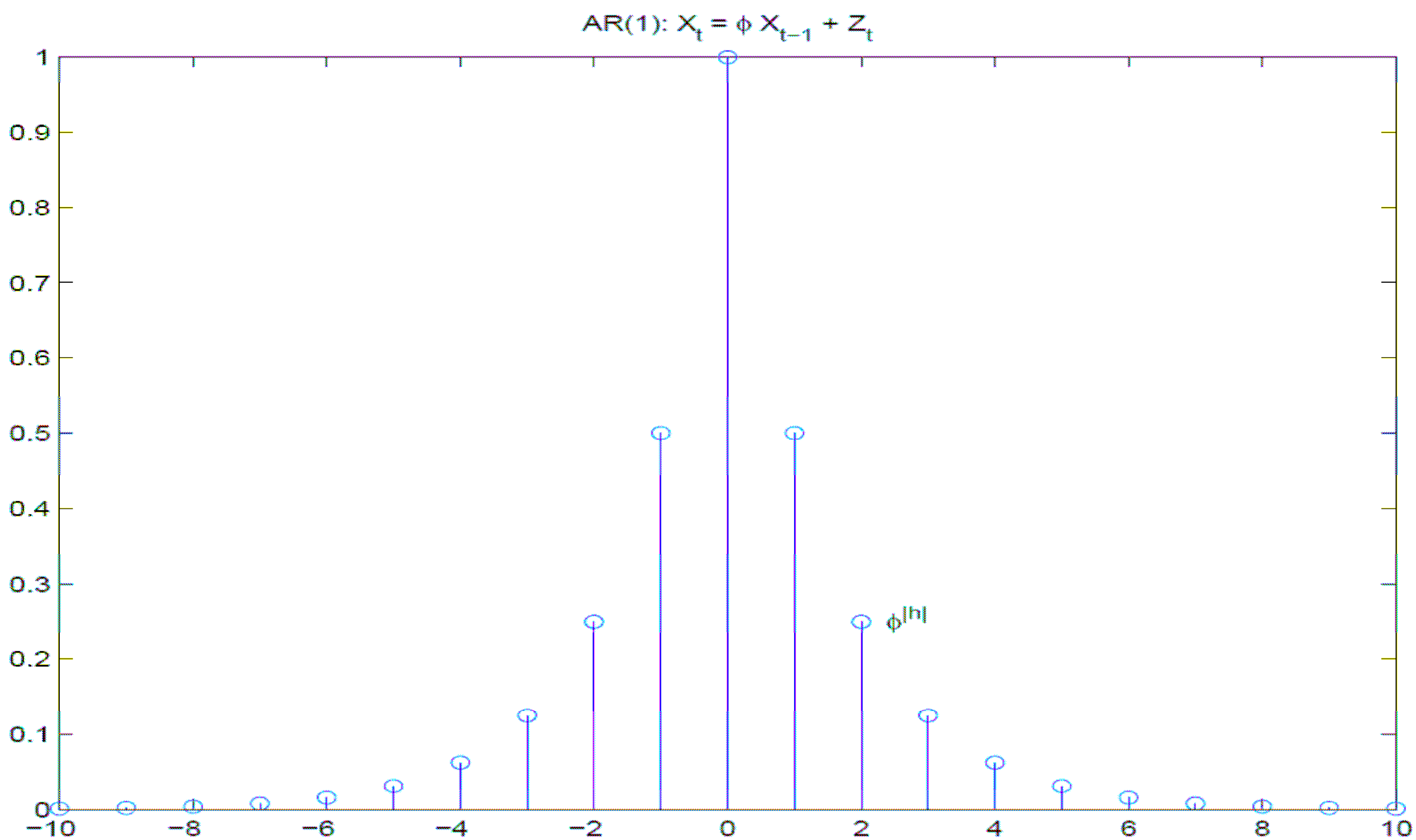


Výberová ACF

- Ukážeme si výberovú ACF pre rôzne typy časových radov (aj nestacionárnych, ktoré nie sú biely šumom

Typ časového radu	*ACF*
Biely šum	nulová
Trend	pomalý pokles
Periodický	periodická
MA(q)	nulová pre |h|>q
AR(p)	exponenciálny pokles

ACF – AR(1)



AR(1): $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
−10
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
10
$\phi^{|h|}$

Výberová ACF – AR(1)