Časové rady

Ján Pekár

Prednáška 3

ACF a predikcia

Predošlá prednáška

- Stacionarita
- Autokovariancia, autokorelácia
- Lineárne procesy MA a AR
- Výberová autokorelačná funkcia

Obsah prednášky

- Výberová autokorelačná funkcia
- ACF a predikcia
- Vlastnosti ACF

Stredná hodnota, autokovariancia, stacionarita

- Časový rad $\{X_t\}$ má funkciu strednej hodnoty $\mu_t = \mathrm{E}[X_t]$

a autokovariančnú funkciu

$$\begin{aligned}\gamma_X(t+h,t) &= \mathrm{Cov}(X_{t+h}, X_t) \\ &= \mathrm{E}[(X_{t+h} - \mu_{t+h})(X_t - \mu_t)]\end{aligned}$$

Je stacionárny, ak oboje nezávisí na *t*. Potom píšeme $\gamma_X(h) = \gamma_X(h,0)$

Autokorelačná funkcia (ACF) má tvar

$$\rho_X(h) = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)} = \mathrm{Corr}(X_{t+h}, X_t)$$

Lineárne procesy

- Dôležitá trieda stacionárnych časových radov

$$X_t = \mu + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j W_{t-j}$$

kde $\{W_t\} \sim WN(0, \sigma_w^2)$

a μ, ψ_j sú parametre vyhovujúce

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty.$$

Lineárne procesy

$$X_t = \mu + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j W_{t-j}$$

Príklady:

- Biely šum $\psi_0 = 1$
- MA(1) $\psi_0 = 1, \psi_1 = \theta$
- AR(1) $\psi_0 = 1, \psi_1 = \phi, \psi_2 = \phi^2, \ldots$

Odhad ACF: výberová ACF

- Pripomeňme si – $\{X_t\}$ je stacionárny časový rad:
  - Stredná hodnota $\mu = \mathrm{E}[X_t]$
  - Autokovariančná funkcia
  $$\gamma(h) = \mathrm{Cov}(X_{t+h}, X_t)$$
  $$= \mathrm{E}[(X_{t+h} - \mu)(X_t - \mu)]$$
  - Autokorelačná funkcia
  $$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$$

Odhad ACF: výberová ACF

- Pre pozorovania $x_1, \ldots, x_n$
  - Priemer $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} x_t$
  - Výberová autokovariančná funkcia

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-|h|} (x_{t+|h|} - \bar{x})(x_t - \bar{x}) \text{ pre } -n < h < n$$

  - Výberová autokorelačná funkcia

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)}$$

Odhad ACF: výberová ACF

Výberová $x_1, \ldots, x_n$ nčná funkcia má tvar

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-|h|} (x_{t+|h|} - \bar{x})(x_t - \bar{x})$$

$$-n < h < n$$

je to podobne tvar ako výberová autokovariancia

$$(x_1, x_{h+1}), \ldots, (x_{n-h}, x_n)$$

Okrem

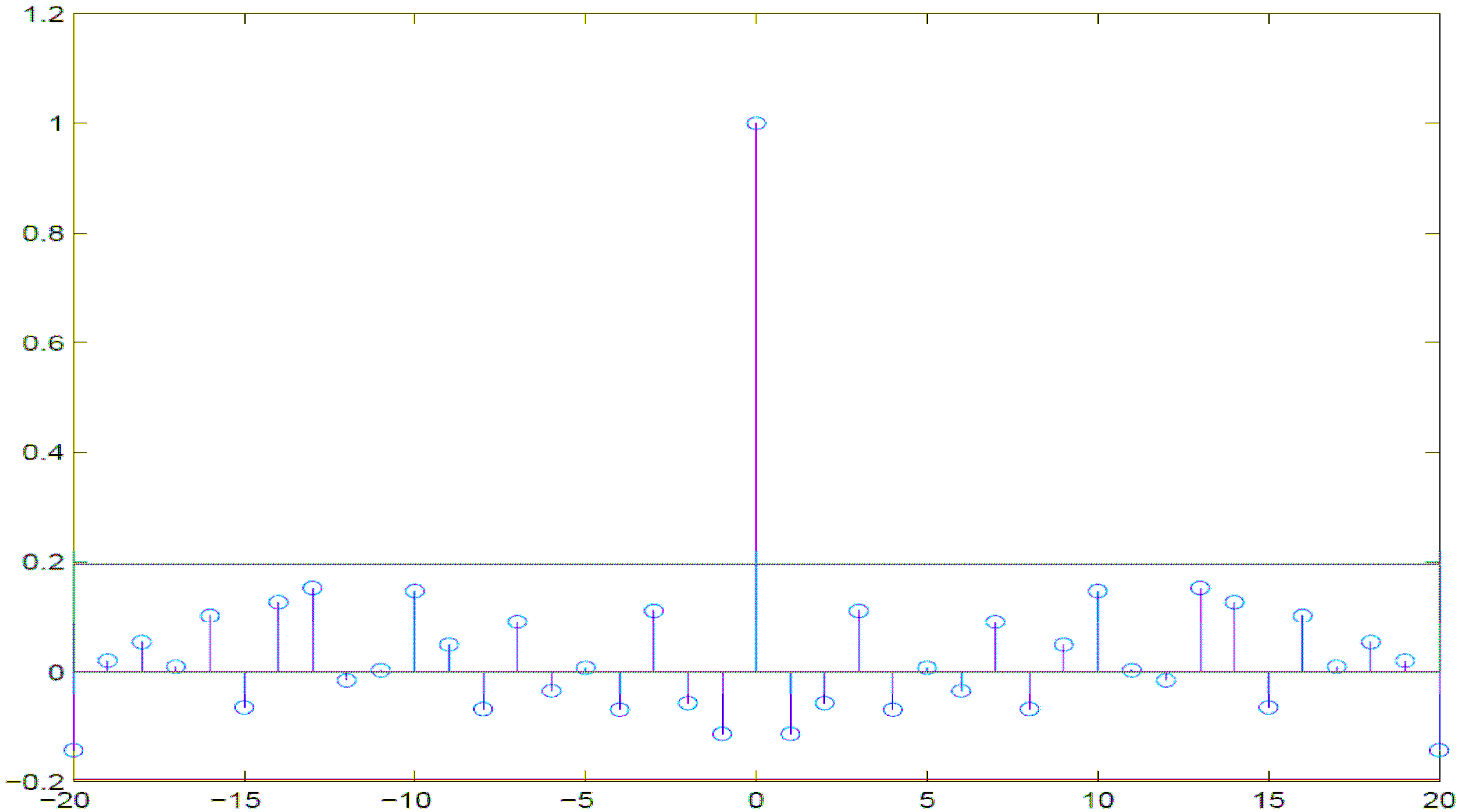
- Normalizujeme s *n* namiesto *n-h*
- Odpočítame priemer celého súboru

Výberová ACF

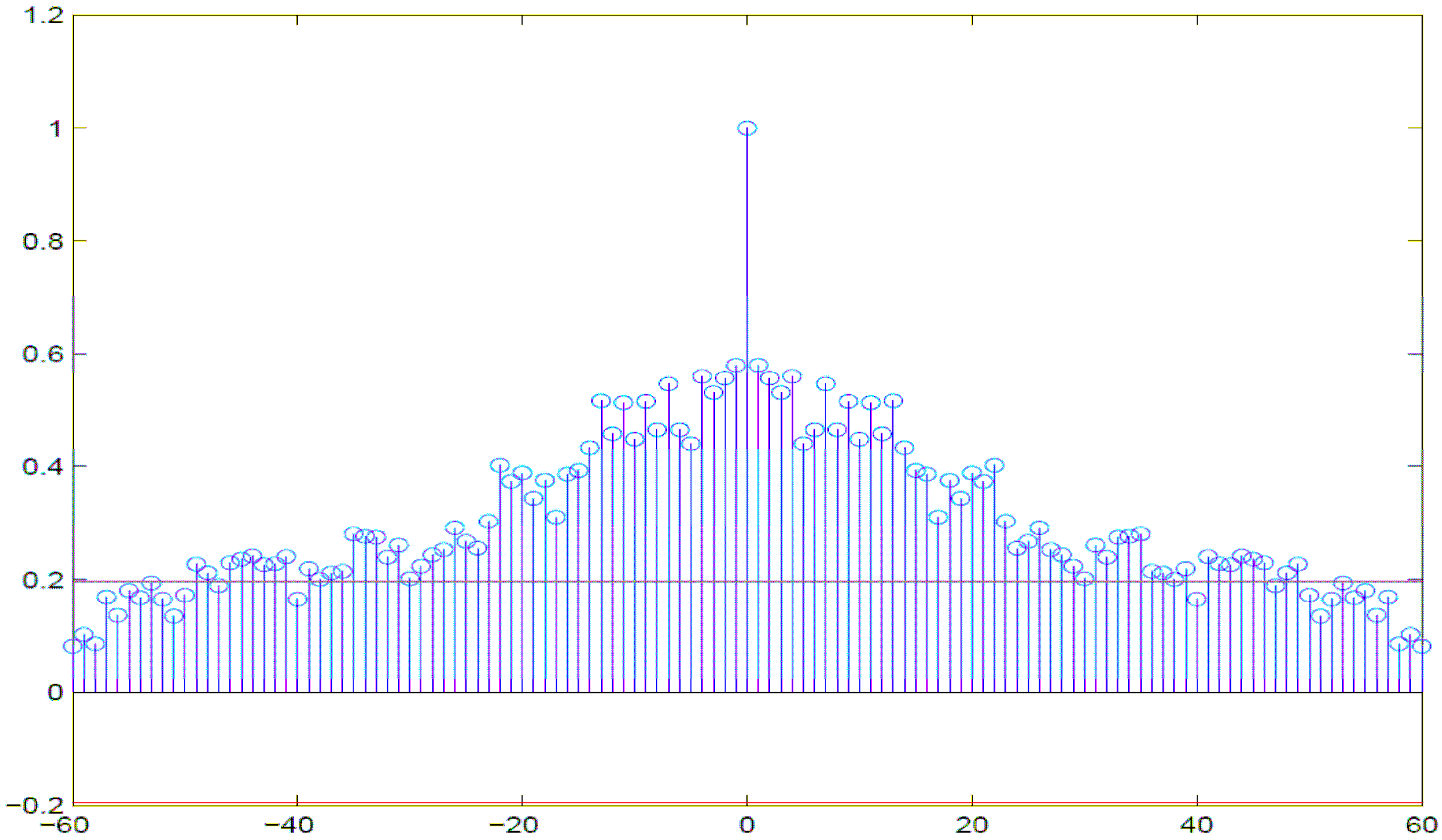
- Ukážeme si výberovú ACF pre rôzne typy časových radov (aj nestacionárnych, ktoré nie sú biely šumom

Typ časového radu	***ACF***
❑Biely šum	nulová
❑Trend	pomalý pokles
❑Periodický	periodická
❑MA(q)	nulová pre |h|>q
❑AR(p)	exponenciálny pokles

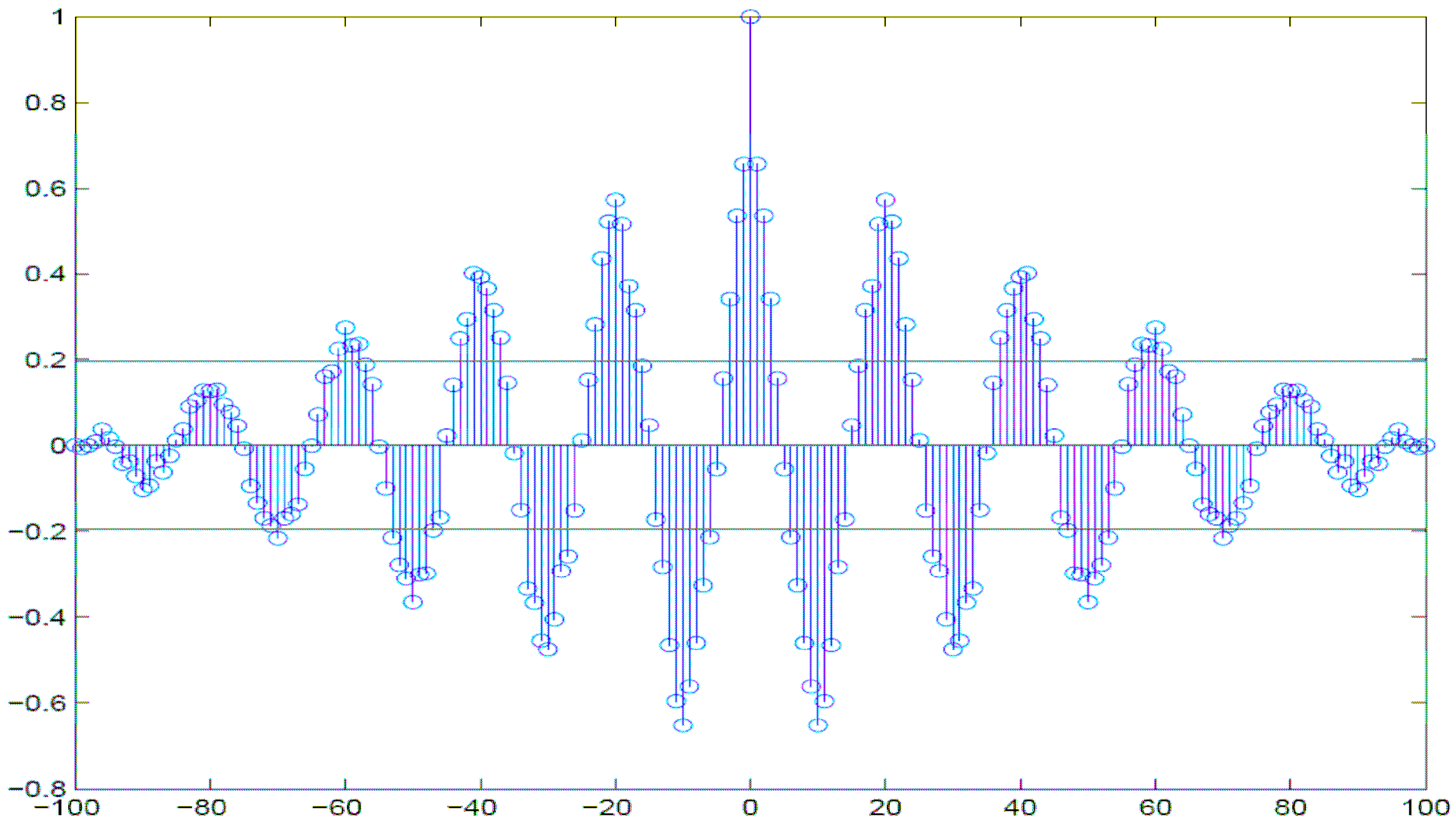
Výberová ACF pre biely gaussovský šum



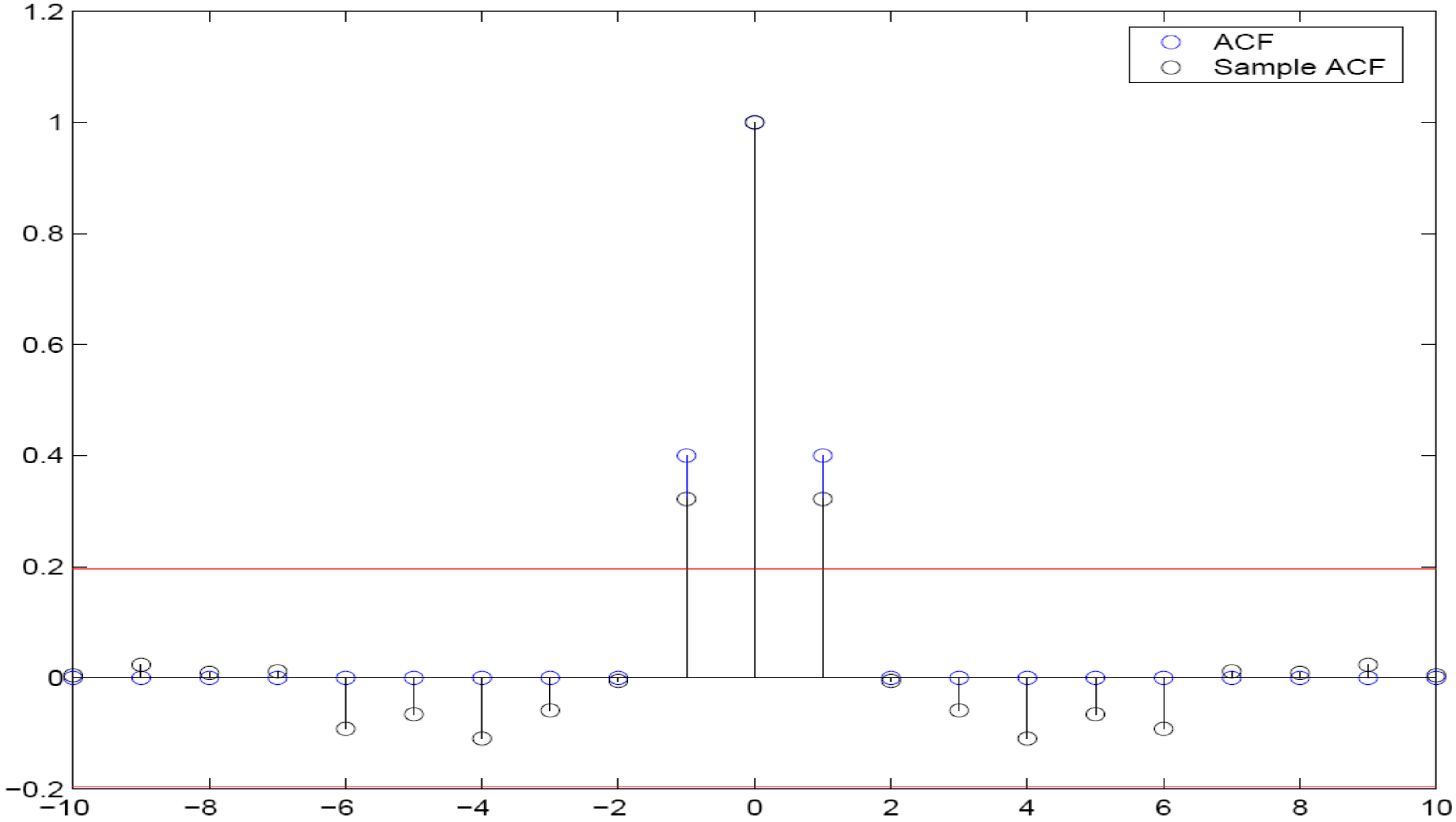
Výberová ACF - trend



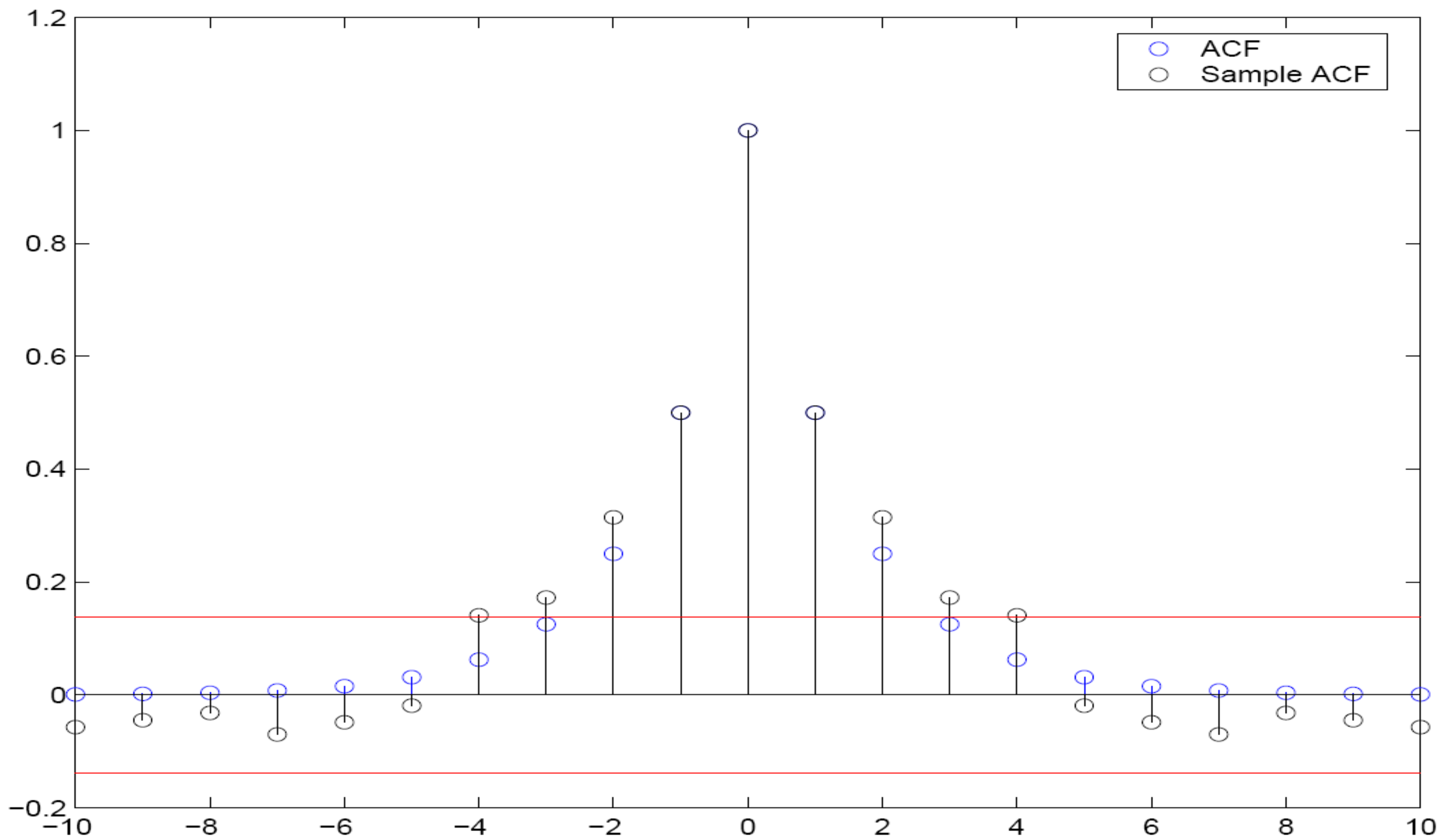
Výberová ACF - periodická



Výberová ACF – MA(1)



Výberová ACF – AR(1)



ACF a predikcia najmenšími štvorcami

- Najlepším odhadom *Y* najmenšími štvorcami je E*Y*:

$$\min_c \mathrm{E}(Y-c)^2 = \mathrm{E}(Y-\mathrm{E}Y)^2$$

- Najlepším odhadom *Y* za predpokladu *X* najmenšími štvorcami je E[*Y*/*X*]:

$$\begin{aligned}\min_f \mathrm{E}(Y-f(X))^2 &= \min_f \mathrm{E}\left[\mathrm{E}[(Y-f(X))^2|X]\right] \\ &= \mathrm{E}\left[\mathrm{E}[(Y-\mathrm{E}[Y|X])^2|X]\right] \\ &= \mathrm{var}[Y|X].\end{aligned}$$

ACF a predikcia najmenšími štvorcami

- Podobne, najlepším odhadom X_{n+h} za predpokladu $X_n|$ najmenšími štvorcami je E*Y*:

$$f(X_n) = \mathrm{E}[X_{n+h}|X_n]$$

ACF a predikcia najmenšími štvorcami

- Predpokladajme, že $X = (X_1, \dots, X_{n+h})$ je združenou gausovskou náh.premennou

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)\right)$$

Potom združenou distribúciou (X_n, X_{n+h}) je

$$N\left(\begin{pmatrix} \mu_n \\ \mu_{n+h} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_n^2 & \rho\sigma_n\sigma_{n+h} \\ \rho\sigma_n\sigma_{n+h} & \sigma_{n+h}^2 \end{pmatrix}\right)$$

ACF a predikcia najmenšími štvorcami

- Predpokladajme, že $X = (X_1, \ldots, X_{n+h})$

je združenou gausovskou náh.premennou

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)\right)$$

Potom podmienenou distribúciou X_{n+h} za podmienky $X_n \Big|$ je

$$N\left(\mu_{n+h} + \rho\frac{\sigma_{n+h}}{\sigma_n}(x_n - \mu_n), \sigma^2_{n+h}(1-\rho^2)\right)$$

ACF a predikcia najmenšími štvorcami

- Takže pre gausovský a stacionárny rad $\{X_t\}$, najlepším odhadom X_{n+h} za podmienky $X_n = x_n$ je

$$f(x_n) = \mu + \rho(h)(x_n - \mu)$$

a chyba najmenších štvorcov je

$$\mathrm{E}(X_{n+h} - f(X_n))^2 = \sigma^2(1 - \rho(h)^2)$$

ACF a predikcia najmenšími štvorcami

- Poznámky:
  - Presnosť predikcie sa zvyšuje, ak

$$|\rho(h)| \to 1$$

  - Predikcia je lineárna

$$f(x) = \mu(1 - \rho(h)) + \rho(h)x$$

ACF a predikcia najmenšími štvorcami

- Uvažujme lineárny prediktor X_{n+h} za podmienky $X_n = x_n$ v tvare

$$f(x_n) = a(x_n - \mu) + b$$

- Pre stacionárny časový rad $\{X_t\}$ najlepší lineárny prediktor minimalizuje

$$\mathrm{E}\left(X_{n+h} - (a(X_n - \mu) + b)\right)^2 =$$

$$= \mathrm{E}\left(X_{n+h} - (a(X_n - \mu) + b)\right)^2$$

$$= \sigma^2 + \mu^2 + a^2\sigma^2 + b^2 - 2a\rho(h)\sigma^2 - 2b\mu$$

ACF a predikcia najmenšími štvorcami

- Tento výraz je minimálny pre

$$a = \rho(h) \qquad \text{a} \qquad b = \mu$$

- takže

$$f(x_n) = \rho(h)(X_n - \mu) + \mu$$

- Tento optimálny lineárny prediktor má chybu najmenších štvorcov

$$\mathrm{E}(X_{n+h} - f(X_n))^2 = \sigma^2(1 - \rho(h)^2)$$

Predikcia X_{n+h} za podmienky X_n najmenšími štvorcami

$$f(x_n) = \rho(h)(X_n - \mu) + \mu$$
$$\mathrm{E}(X_{n+h} - f(X_n))^2 = \sigma^2(1 - \rho(h)^2)$$

- Ak $\{X_t\}$ je stacionárny, tak *f* je optimálny lineárny prediktor
- Ak $\{X_t\}$ je aj gausovský, tak *f* je optimálny prediktor
- Lineárna predikcia je optimálna pre gaussovské časové rady

Vlastnosti autokovariančnej funkcie

- Autokovariančná funkcia pre $\{X_t\}$ je definovaná ako

$$\begin{aligned}\gamma_X(t+h,t) &= \mathrm{Cov}(X_{t+h},X_t) \\ &= \mathrm{E}[(X_{t+h}-\mu_{t+h})(X_t-\mu_t)]\end{aligned}$$

Ak časový rad je stacionárny, tak môžeme písať

$$\gamma_X(h) = \gamma_X(h,0)$$

Vlastnosti autokovariančnej funkcie

- Autokovariančná $\gamma|$ funkcia pre stacionárny rad $\{X_t\}$ má tieto vlastnosti
  - 1. $\gamma(0) \geq 0$ - variancia je nezáporná
  - 2. $|\gamma(h)| \leq \gamma(0)$ - Cauchy - Schwarz
  - 3. $\gamma(h) = \gamma(-h)$ - zo stacionarity
  - 4. $\gamma|$ je kladne semidefinitná

Vlastnosti autokovariančnej funkcie

- Funkcia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ je kladne semidefinitná, ak pre všetky *n* je matica $\boldsymbol{F}_n$ s prvkami $(F_n)_{i,j} = f(i-j)$ kladne semidefinitná.
- Matica $F_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je kladne semidefinitná, ak pre všetky vektory $a \in \mathbb{R}^n$ platí

$$a'Fa \geq 0$$

Vlastnosti autokovariančnej funkcie

- Úloha:

Ukážte, že γ je kladne semidefinitná.

Návod:

Uvažujte varianciu $(X_1, \ldots, X_n)a$

Vlastnosti výberovej autokovariančnej funkcie

- Výberová autokovariančná funkcia má tvar $\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-|h|} (x_{t+|h|} - \bar{x})(x_t - \bar{x}) \qquad -n < h < n$

Pre ľubovolnú postupnosť $x_1, \ldots, x_n$, výberová autkovariančná funkcia $\hat{\gamma}$ vyhovuje týmto vlastnostiam:

- $\hat{\gamma}(h) = \hat{\gamma}(-h)$
- $\hat{\gamma}$ je kladne semidefinitná
- $\hat{\gamma}(0) \geq 0$ a $|\hat{\gamma}(h)| \leq \hat{\gamma}(0)$

Odhad μ

- Pre stacionárny proces $\{X_t\}$, výberový priemer $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ vyhovuje
  - $\mathrm{E}(\bar{X}_n) = \mu$
  - $\operatorname{var}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} \sum_{h=-n}^{n} \left(1 - \frac{|h|}{n}\right) \gamma(h)$
  - $\gamma(h) \to 0 \Rightarrow \operatorname{var}(\bar{X}_n) \to 0$
  - $\sum_h |\gamma(h)| < \infty \Rightarrow n \operatorname{var}(\bar{X}_n) \to \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h)$

Odhad ACF: výberová ACF

$$
\begin{aligned}
\operatorname{var}(\bar{X}_n) &= \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j - \mu\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}(X_i - \mu)(X_j - \mu) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i,j} \gamma(i-j) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{h=-(n-1)}^{n-1}\left(1 - \frac{|h|}{n}\right)\gamma(h).
\end{aligned}
$$

Odhad ACF: výberová ACF

- Veta

Nech $X_t = \mu + \sum_j \psi_j W_{t-j}$ je taký lineárny proces, že $\sum \psi_j \neq 0$. Potom

$$\bar{X}_n \sim AN\left(\mu_x, \frac{V}{n}\right)$$

kde

$$V = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) \quad = \sigma_w^2 \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \right)^2$$

Odhad ACF: výberová ACF

- Náčrt dôkazu

Pre lineárny proces $X_t = \mu + \sum_j \psi_j W_{t-j}$ máme

$$\gamma_X(h) = \sigma_w^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{h+j};$$

takže

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n \operatorname{var}(\bar{X}_n) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{h=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \frac{|h|}{n}\right) \gamma(h) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sigma_w^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \sum_{h=-(n-1)}^{n-1} \left(\psi_{j+h} - \frac{|h|}{n} \psi_{j+h}\right) \\
&= \sigma_w^2 \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j\right)^2 .
\end{aligned}$$

Odhad ACF: výberová ACF

- Veta

Nech $X_t = \mu + \sum_j \psi_j W_{t-j}$ je taký lineárny proces, že $\mathrm{E}(W_t^4) < \infty$. Potom

$$\begin{pmatrix} \hat{\rho}(1) \\ \vdots \\ \hat{\rho}(K) \end{pmatrix} \sim AN\left(\begin{pmatrix} \rho(1) \\ \vdots \\ \rho(K) \end{pmatrix}, \frac{1}{n}V\right)$$

kde

$$V_{i,j} = \sum_{h=1}^{\infty} \left(\rho(h+i) + \rho(h-i) - 2\rho(i)\rho(h)\right) \times \left(\rho(h+j) + \rho(h-j) - 2\rho(j)\rho(h)\right)$$

Odhad ACF: výberová ACF

- Poznámka

Ak $\rho(i) = 0$, tak $V = I$ pre všetky $i \neq 0$

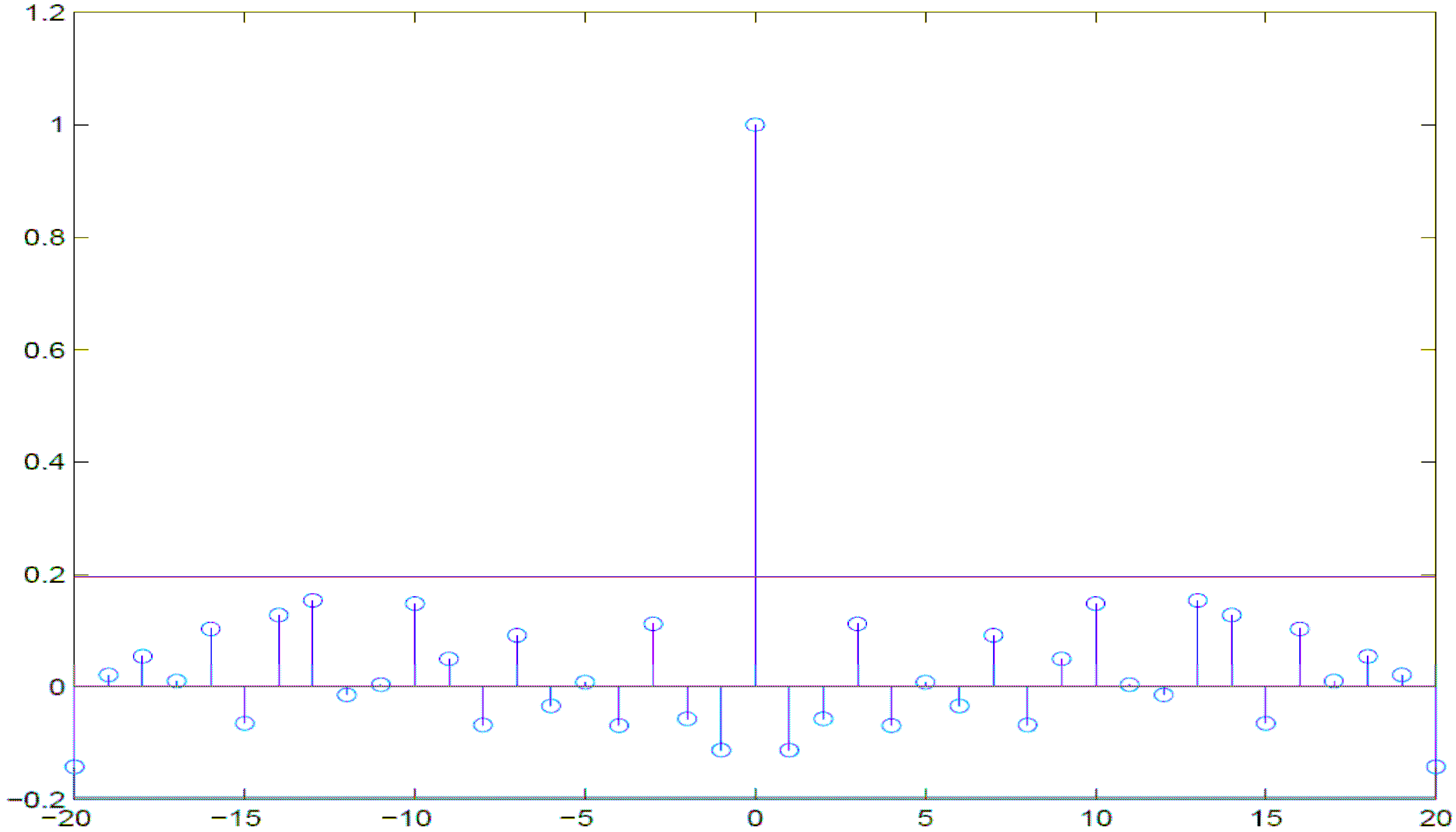
Výberová ACF a testovanie bieleho šumu

- Ak $\{X_t\}$ je biely šum, tak očakávame, že nie viac ako ~ 5% vrcholov výberovej ACF vyhovuje nerovnosti

$$|\hat{\rho}(h)| > \frac{1.96}{\sqrt{n}}$$

Toto je užitočná úvaha, lebo často chceme previesť časový rad na biely šum.

Výberová ACF pre gaussovský biely šum



Výberová ACF pre MA(1)

- Máme $\rho(0) = 1$, $\rho(\pm 1) = \frac{\theta}{1+\theta^2}$ a $\rho(h) = 0$ pre $|h| > 1$. Teda

$$V_{1,1} = \sum_{h=1}^{\infty} \left(\rho(h+1) + \rho(h-1) - 2\rho(1)\rho(h)\right)^2$$

$$= (\rho(0) - 2\rho(1)^2)^2 + \rho(1)^2$$

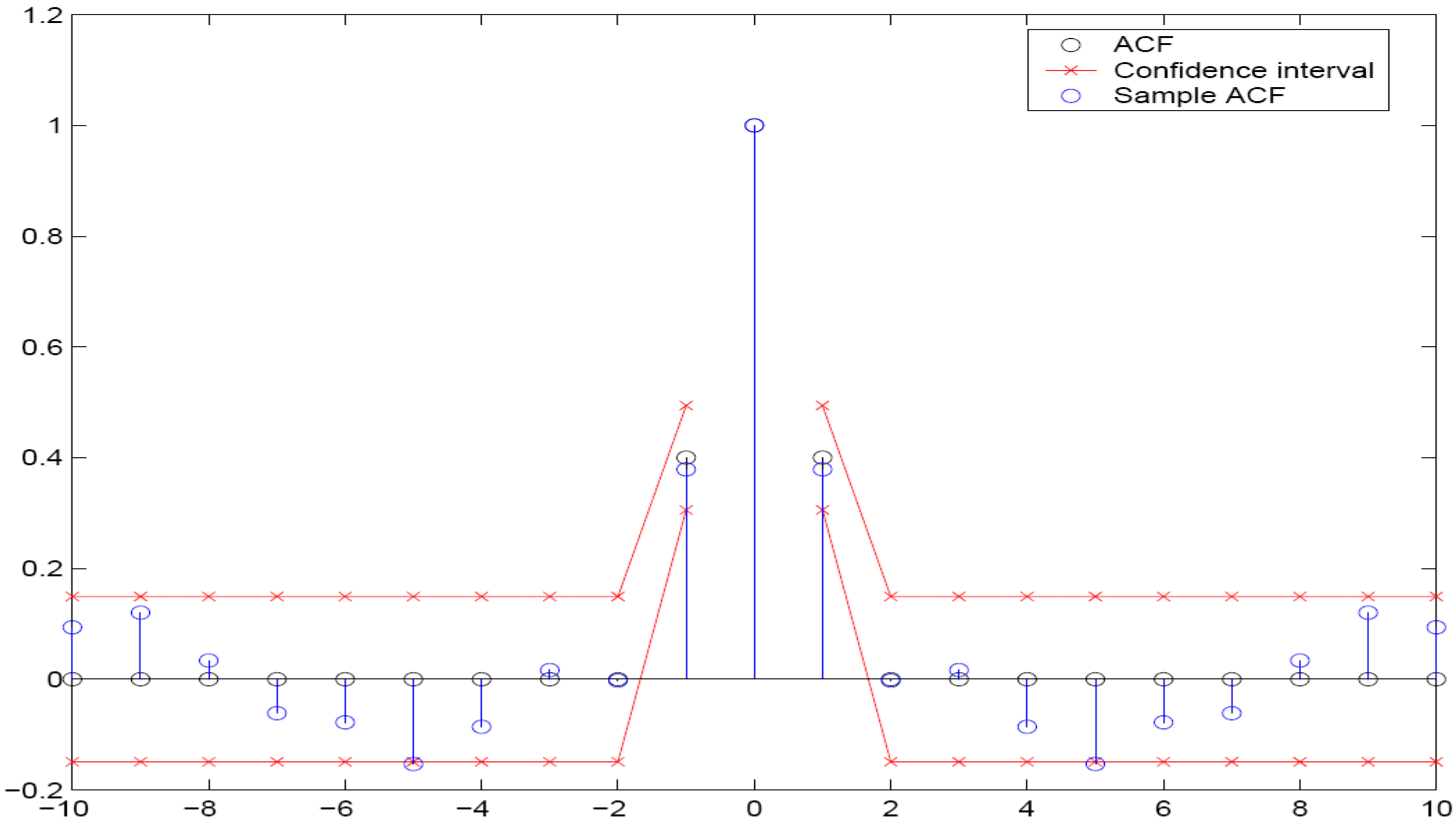
$$V_{2,2} = \sum_{h=1}^{\infty} \left(\rho(h+2) + \rho(h-2) - 2\rho(2)\rho(h)\right)^2 = \sum_{h=-1}^{1} \rho(h)^2$$

Výberová ACF pre MA(1)

- Ak $\{X_t\}$ je realizácia takéhoto procesu MA(1), tak s pravdepodobnosťou 0,95 platí

$$|\hat{\rho}(h) - \rho(h)| \leq 1.96\sqrt{\frac{V_{hh}}{n}}$$

Výberová ACF pre MA(1)



Konvergencia v najmenších štvorcoch

- Postupnosť náhodných premenných $S_1, S_2, \ldots$ konverguje v najmenších štvorcoch, ak existuje taká náhodná premenná *Y*, pre ktorú

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{E}(S_n - Y)^2 = 0$$

- Rieszova-Fisherova veta (Cauchyho kritérium): S_n konverguje v najmenších štvorcoch vtedy a len vtedy, ak

$$\lim_{m,n \to \infty} \mathrm{E}(S_m - S_n)^2 = 0$$

Príklad: lineárny proces

- Uvažujeme lineárny proces

$$X_t = \psi(B)W_t$$

kde

$$\psi(B) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j B^j$$

Potom, ak platí $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$

tak

- (1) $|X_t| < \infty$
- (2) $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j W_{t-j}$ konverguje v najm. štvorcoch

Príklad: lineárny proces

- (1)

$$P\left(|X_t| \geq \alpha\right) \leq \frac{1}{\alpha}\mathrm{E}|X_t|$$

Markovova nerovnosť

$$\leq \frac{1}{\alpha}\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\psi_j|\mathrm{E}|W_{t-j}|$$

$$\leq \frac{\sigma}{\alpha}\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\psi_j|$$

Jensenova nerovnosť

$$< \infty$$

Príklad: lineárny proces

- (2)

Pretože

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(S_m - S_n)^2 &= \mathrm{E}\left(\sum_{m \le |j| \le n} \psi_j W_{t-j}\right)^2 \\
&= \sum_{m \le |j| \le n} \psi_j^2 \sigma^2 \\
&\le \sigma^2 \left(\sum_{m \le |j| \le n} |\psi_j|\right)^2 \\
&\to 0.
\end{aligned}
$$

$S_n = \sum_{j=-n}^{n} \psi_j W_{t-j}$ konverguje v najm. štvorcoch

Príklad: AR(1)

- Nech $\{X_t\}$ je stacionárnym riešením

$$X_t - \phi X_{t-1} = W_t$$

kde $W_t \sim WN(0, \sigma^2)$. Ak $|\phi| < 1$, tak

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j W_{t-j}$$

je riešením. Podobne, vieme ukázať, že suma konverguje v najmenších štvorcoch, pretože $|\phi| < 1$ implikuje $\sum |\phi^j| < \infty$

Príklad: AR(1)

- Navyše, $\{X_t\}$ je jediným stacionárnym riešením: každé iné stacionárne riešenie $\{Y_t\}$ je limitou najmenších štvorcov

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left(Y_t - \sum_{i=0}^{n-1} \phi^i W_{t-i}\right)^2 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(\phi^n Y_{t-n})^2 = 0$$

Príklad: AR(1)

- Ekvivalentne, ak napíšeme

$$\pi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j B^j \qquad \phi(B) = 1 - \phi B,$$

Tak môžeme overiť, že $\pi(B) = \phi(B)^{-1}$:

$$\pi(B)\phi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j B^j (1 - \phi B) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j B^j - \sum_{j=1}^{\infty} \phi^j B^j = 1.$$

Príklad: AR(1)

- Teda, z

$$\phi(B)X_t = W_t$$

vyplýva

$$\pi(B)\phi(B)X_t = \pi(B)W_t$$

čo je ekvivalentné

$$X_t = \pi(B)W_t$$

Príklad: AR(1)

- Poznámka:

Ak

$$|\phi| < 1 \text{ a } |z| \leq 1$$

tak

$$\frac{1}{1-\phi z} = 1 + \phi z + \phi^2 z^2 + \phi^3 z^3 + \cdots$$

Príklad: AR(1)

- Nech $\{X_t\}$ je stacionárnym riešením

$$X_t - \phi X_{t-1} = W_t$$

kde $W_t \sim WN(0,\sigma^2)$. Ak $|\phi| < 1$, tak

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j W_{t-j}$$

Otázka na zamyslenie:

Čo sa stane, ak

$$\phi = 1?$$
$$\phi = -1?$$
$$|\phi| > 1?$$