

Časové rady

Ján Pekár
Prednáška 4

*Kauzalita, invertovateľnosť,
modely $AR(p)$ a $ARMA(p,q)$*

Predošlá prednáška

- Výberová autokorelačná funkcia
- ACF a predikcia
- Konvergencia v najmenších štvorcoch
- Vlastnosti ACF



Obsah prednášky

- Kauzalita
- Invertovateľnosť
- Modely $AR(p)$
- Modely $ARMA(p,q)$
- Stacionarita, kauzalita a invertovateľnosť
- Reprezentácia procesov $ARMA$ lineárnymi procesmi
- Autokorelačná a parciálna autokorelačná funkcia procesov $ARMA$



AR(1)

- Nech $\{X_t\}$ je stacionárnym riešením

$$X_t - \phi X_{t-1} = W_t$$

kde $W_t \sim WN(0, \sigma^2)$. Ak $|\phi| < 1$, tak

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j W_{t-j}$$

je riešením. Podobne, vieme ukázať, že suma konverguje v najmenších štvorcoch, pretože $|\phi| < 1$ implikuje $\sum |\phi^j| < \infty$



AR(1)

■ Ekvivalentne, ak napíšeme

$$\pi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j B^j \quad \Bigg| \quad \phi(B) = 1 - \phi B.$$

Tak môžeme overiť, že $\pi(B) = \phi(B)^{-1}$:

$$\begin{aligned} \pi(B)\phi(B) &= \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j B^j (1 - \phi B) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j B^j - \sum_{j=1}^{\infty} \phi^j B^j = 1. \end{aligned}$$



AR(1)

■ Teda, z

$$\phi(B)X_t = W_t$$

vyplýva

$$\pi(B)\phi(B)X_t = \pi(B)W_t$$

čo je ekvivalentné

$$X_t = \pi(B)W_t$$



AR(1) a kauzalita

- Teda, nech $\{X_t\}$ je stacionárnym riešením

$$X_t - \phi X_{t-1} = W_t$$

kde $W_t \sim WN(0, \sigma^2)$. Ak $|\phi| < 1$, tak

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j W_{t-j}$$

Otázka na zamyslenie:

Čo sa stane, ak

$\phi = 1?$	
$\phi = -1?$	
$ \phi > 1?$	



AR(1) a kauzalita

- Ak $|\phi| > 1$, tak $\pi(B)W_t$ nekonverguje. No vieme prepísať

$$X_t = \phi X_{t-1} + W_t$$

$$\text{ako } X_{t-1} = \frac{1}{\phi} X_t - \frac{1}{\phi} W_t$$

Rovnako vieme ukázať, že jediným stacionárnym riešením je

$$X_t = - \sum_{j=1}^{\infty} \phi^{-j} W_{t+j}$$

ALE... X_t závisí na **budúcich** hodnotách W_t .



Kauzalita

- Definícia. Lineárny proces $\{X_t\}$ je kauzálny (presnejšie povedané, je kauzálnou funkciou $\{W_t\}$), ak existuje taký operátor

$$\psi(B) = \psi_0 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots$$

s

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$$

a

$$X_t = \psi(B)W_t$$



AR(1) a kauzalita

■ Kauzalita je vlastnosť $\{X_t\}$ a $\{W_t\}$.

■ Proces AR(1) definovaný ako

$$\phi(B)X_t = W_t \quad \text{s} \quad \phi(B) = 1 - \phi B$$

je kauzálny vtedy a len vtedy, ak $|\phi| < 1$

a vtedy a len vtedy, ak koreň z_1 polynómu $\phi(z) = 1 - \phi z$ spĺňa podmienku $|z_1| > 1$



AR(1) a kauzalita

- Ak $|\phi| > 1$, tak vieme definovať ekvivalentný kauzálny model

$$X_t - \phi^{-1} X_{t-1} = \tilde{W}_t$$

kde $\tilde{W}_t$ je nový rad bieleho šumu.

- Otázka: Je proces MA(1) kauzálny?



MA(1) a invertovateľnosť

■ Definujme

$$\begin{aligned} X_t &= W_t + \theta W_{t-1} \\ &= (1 + \theta B)W_t \end{aligned}$$

Ak $|\theta| < 1$, tak vieme napísať

$$\begin{aligned} & (1 + \theta B)^{-1} X_t = W_t \\ \Leftrightarrow & (1 - \theta B + \theta^2 B^2 - \theta^3 B^3 + \dots) X_t = W_t \\ & \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} (-\theta)^j X_{t-j} = W_t \end{aligned}$$



MA(1) a invertovateľnosť

- Teda, W_t vieme napísať ako **kauzálnu** funkciu X_t .
- Budeme hovoriť, že proces MA(1) je invertovateľný.

- Ak $|\theta| > 1$, tak rad

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-\theta)^j X_{t-j}$$

diverguje, no môžeme napísať

$$W_{t-1} = -\theta^{-1} W_t + \theta^{-1} X_t$$



MA(1) a invertovateľnosť

- Rovnako, ako v prípade nekauzálneho AR(1), môžeme ukázať, že

$$W_t = - \sum_{j=1}^{\infty} (-\theta)^{-j} X_{t+j}$$

Teda, môžeme W_t napísať ako lineárnu funkciu X_t , ktorá však nie je kauzálna. Budeme hovoriť, že MA(1) nie je invertovateľná.



Invertovateľnosť

- Lineárny proces $\{X_t\}$ je invertovateľný (presnejšie povedané, je invertovateľnou funkciou $\{W_t\}$), ak existuje

$$\pi(B) = \pi_0 + \pi_1 B + \pi_2 B^2 + \dots$$

s

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty$$

a

$$W_t = \pi(B)X_t$$



MA(1) a invertovateľnosť

■ Invertovateľnosť je vlastnosť $\{X_t\}$ a $\{W_t\}$.

■ Proces MA(1) definovaný ako

$$X_t = \theta(B)W_t \quad \text{s} \quad \theta(B) = 1 + \theta B$$

je invertovateľný vtedy a len vtedy, ak

$|\theta| < 1$ a vtedy a len vtedy, ak koreň z_1

polynómu $\theta(z) = 1 + \theta z$ spĺňa

podmienku $|z_1| > 1$



MA(1) a invertovateľnosť

- Ak $|\theta| > 1$, tak vieme definovať ekvivalentný invertovateľný model pomocou nového radu bieleho šumu.
- Otázka: Je proces AR(1) invertovateľný?



AR(p): Autoregresívne modely rádu p

- Definícia. Proces AR(p) (časového radu $\{X_t\}$) je taký stacionárny proces, ktorý spĺňa

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = W_t$$

kde $\{W_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$

Ekvivalentne $\phi(B)X_t = W_t$

kde $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$



AR(p): Ohraničenia ϕ

- Pripomeňme si: Pre $p=1$ (AR(1)) máme

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B$$

Toto je modelom AR(1) len ak je
stacionárnym riešením $\phi(B)X_t = W_t$
čo je ekvivalentné s podmienkou $|\phi_1| \neq 1$



AR(p): Ohraničenia ϕ

- Toto je ekvivalentné s podmienkou na

$$|\phi(z)| = 1 - |\phi_1 z| :$$

$$\forall z \in \mathbb{R}, \phi(z) = 0 \Rightarrow z \neq \pm 1$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, \phi(z) = 0 \Rightarrow |z| \neq 1$$



AR(p): Ohraničenia ϕ

- Stacionarita: $\forall z \in \mathbb{C}, \phi(z) = 0 \Rightarrow |z| \neq 1$

Polynóm $\phi(z) = 1 - \phi_1 z$ má jediný koreň $z_1 = 1/\phi_1 \in \mathbb{R}$

No korene polynómu vyššieho stupňa môžu byť komplexné. Kvôli stacionarite chceme, aby korene $\phi(z)$ neležali na **jednotkovej kružnici** $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$



AR(p): Stacionarita a kauzalita

- Veta. (Jediné) stacionárne riešenie

$$\phi(B)X_t = W_t$$

existuje vtedy a len vtedy, ak

$$|z| = 1 \Rightarrow \phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p \neq 0$$

Tento AR(p) proces je kauzálny vtedy a len vtedy, ak

$$|z| \leq 1 \Rightarrow \phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p \neq 0$$



Opakovanie: Kauzalita

- Definícia. Lineárny proces $\{X_t\}$ je kauzálny (presnejšie povedané, je kauzálnou funkciou $\{W_t\}$), ak existuje taký operátor

$$\psi(B) = \psi_0 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots$$

s

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$$

a

$$X_t = \psi(B)W_t$$



AR(p): Všetky korene mimo jednotkového kruhu implikujú kauzalitu

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1 \Rightarrow \phi(z) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \exists \{\psi_j\}, \delta > 0, \forall |z| \leq 1 + \delta, \frac{1}{\phi(z)} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j.$$

$$\Rightarrow \forall |z| \leq 1 + \delta, |\psi_j z^j| \rightarrow 0, \left(|\psi_j|^{1/j} |z|\right)^j \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \exists j_0, \forall j \geq j_0, |\psi_j|^{1/j} \leq \frac{1}{1 + \delta/2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty.$$



AR(p): Všetky korene mimo jednotkového kruhu implikujú kauzalitu

■ Teda, ak $|z| \leq 1 \Rightarrow \phi(z) = 0$, tak

$$S_m = \sum_{j=0}^m \psi_j B^j W_t$$

konverguje v najmenších štvorcoch,
takže sme dostali stacionárny, kauzálny
časový rad $X_t = \phi^{-1}(B)W_t$



Výpočet ψ pre AR(p): určenie koeficientov - príklad

■ Príklad:

$$\begin{aligned} X_t &= \psi(B)W_t && \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & (1 - 0.5B + 0.6B^2)X_t = W_t \end{aligned}$$

takže

$$\begin{aligned} 1 &= \psi(B)(1 - 0.5B + 0.6B^2) \\ \Leftrightarrow 1 &= (\psi_0 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots)(1 - 0.5B + 0.6B^2) \end{aligned}$$



Výpočet ψ pre AR(p): určenie koeficientov - príklad

$$\Leftrightarrow 1 = \psi_0,$$

$$0 = \psi_1 - 0.5\psi_0,$$

$$0 = \psi_2 - 0.5\psi_1 + 0.6\psi_0$$

$$0 = \psi_3 - 0.5\psi_2 + 0.6\psi_1$$

$$\vdots$$


Výpočet ψ pre AR(p): určenie koeficientov - príklad

$$\Leftrightarrow \quad 1 = \psi_0, \quad 0 = \psi_j \quad (j \leq 0)$$

$$0 = \psi_j - 0.5\psi_{j-1} + 0.6\psi_{j-2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = \psi_0, \quad 0 = \psi_j \quad (j \leq 0)$$

$$0 = \phi(B)\psi_j.$$



Výpočet Ψ pre AR(p): určenie koeficientov - príklad

- Tieto lineárne diferenčné rovnice môžeme riešiť viacerými spôsobmi:
 - numericky;
 - uhádnutím tvaru riešenia a dôkazom indukciou;
 - použitím teórie lineárnych diferenčných rovníc.



Výpočet Ψ pre AR(p): určenie koeficientov – všeobecný prípad

$$\phi(B)X_t = W_t, \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X_t = \psi(B)W_t$$

takže

$$1 = \psi(B)\phi(B) \mid$$

$$\Leftrightarrow 1 = (\psi_0 + \psi_1 B + \dots)(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) \mid$$



Výpočet Ψ pre AR(p): určenie koeficientov - všeobecný prípad

$$\Leftrightarrow \quad 1 = \psi_0,$$

$$0 = \psi_1 - \phi_1 \psi_0,$$

$$0 = \psi_2 - \phi_1 \psi_1 - \phi_2 \psi_0,$$

$$\vdots$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = \psi_0, \quad 0 = \psi_j \quad (j < 0)$$

$$0 = \phi(B)\psi_j.$$



ARMA(p,q): Autoregresívne modely s kízavými priemermi

- Definícia. Proces ARMA(p,q) (časového radu $\{X_t\}$) je taký stacionárny proces, ktorý spĺňa

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p} = W_t + \theta_1 W_{t-1} + \cdots + \theta_q W_{t-q}$$

kde $\{W_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$

- AR(p)=ARMA(p,0): $\theta(B) = 1$
- MA(q)=ARMA(0,q): $\phi(B) = 1$



Procesy ARMA(p,q):

- Veta. Pre ľubovoľný stacionárny proces s autokovarianciou γ a pre každé $k > 0$, existuje taký proces ARMA časového radu $\{X_t\}$, pre ktorý

$$\gamma_X(h) = \gamma(h), \quad h = 0, 1, \dots, k$$



ARMA(p,q): Autoregresívne modely s kízavými priemermi

- Proces ARMA(p,q) (časového radu $\{X_t\}$) je taký stacionárny proces, ktorý spĺňa

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p} = W_t + \theta_1 W_{t-1} + \cdots + \theta_q W_{t-q}$$
$$\{W_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$$

Zvyčajne požadujeme, aby $\phi_p, \theta_q \neq 0$
a aby polynómy

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p \quad \theta(z) = 1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_q z^q$$

nemali spoločné korene. Z tohto vyplýva, že neexistuje model ARMA nižšieho rádu.



ARMA(p,q): Prípád redudandných parametrov

- Uvažujme biely šum W_t . Môžeme písať

$$X_t = W_t$$

$$\Rightarrow X_t - X_{t-1} + 0.25X_{t-2} = W_t - W_{t-1} + 0.25W_{t-2}$$

$$(1 - B + 0.25B^2)X_t = (1 - B + 0.25B^2)W_t$$

čo je proces ARMA(2,2) s operátormi

$$\phi(B) = 1 - B + 0.25B^2$$

$$\theta(B) = 1 - B + 0.25B^2$$

no stále je to biely šum.



ARMA(p,q): Prípád redudandných parametrov

■ Model ARMA

$$\phi(B)X_t = \theta(B)W_t$$

S

$$\phi(B) = 1 - B + 0.25B^2$$

$$\theta(B) = 1 - B + 0.25B^2$$

Teda

$$X_t = \psi(B)W_t$$

$$\Leftrightarrow \psi(B) = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} = 1$$

čiže

$$X_t = W_t$$



ARMA(p,q):Stacionarita, kauzalita a invertovateľnosť

- Veta. Ak Φ a Θ nemajú spoločné korene, tak (jediné) stacionárne riešenie $\phi(B)X_t = \theta(B)W_t$ | existuje vtedy a len vtedy, ak

$$|z| = 1 \Rightarrow \phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p \neq 0$$

Tento proces ARMA(p,q) je kauzálny vtedy a len vtedy, ak

$$|z| \leq 1 \Rightarrow \phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p \neq 0.$$



ARMA(p,q):Stacionarita, kauzalita a invertovateľnosť

- Veta. Ak Φ a Θ nemajú spoločné korene, tak (jediné) stacionárne riešenie $\phi(B)X_t = \theta(B)W_t$ | existuje vtedy a len vtedy, ak

$$|z| = 1 \Rightarrow \phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p \neq 0$$

Tento proces ARMA(p,q) je invertovateľný vtedy a len vtedy, ak

$$|z| \leq 1 \Rightarrow \theta(z) = 1 + \theta_1 z + \dots + \theta_q z^q \neq 0$$



Pripomenutie: kauzalita

- Definícia. Lineárny proces $\{X_t\}$ je kauzálny (presnejšie povedané, je kauzálnou funkciou $\{W_t\}$), ak existuje taký operátor

$$\psi(B) = \psi_0 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots$$

s

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$$

a

$$X_t = \psi(B)W_t$$



Pripomenutie: invertovateľnosť

- Lineárny proces $\{X_t\}$ je invertovateľný (presnejšie povedané, je invertovateľnou funkciou $\{W_t\}$), ak existuje

$$\pi(B) = \pi_0 + \pi_1 B + \pi_2 B^2 + \dots$$

s

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty$$

a

$$W_t = \pi(B)X_t$$



ARMA(p,q):Stacionarita, kauzalita a invertovateľnosť

■ Príklad: $(1 - 1.5B)X_t = (1 + 0.2B)W_t$

$$\left| \begin{aligned} \phi(z) &= 1 - 1.5z = -\frac{3}{2} \left(z - \frac{2}{3} \right) \\ \theta(z) &= 1 + 0.2z = \frac{1}{5} (z + 5) . \end{aligned} \right|$$

- Φ a Θ nemajú spoločné korene;
- koreň Φ je $2/3$, teda neleží na jednotkovej kružnici, takže $\{X_t\}$ je proces ARMA(1,1)



ARMA(p,q):Stacionarita, kauzalita a invertovateľnosť

■ Príklad: $(1 - 1.5B)X_t = (1 + 0.2B)W_t$

$$\phi(z) = 1 - 1.5z = -\frac{3}{2} \left(z - \frac{2}{3} \right)$$
$$\theta(z) = 1 + 0.2z = \frac{1}{5} (z + 5) .$$

- ❑ koreň Φ je $2/3$, teda leží vnútri jednotkového kruhu, teda $\{X_t\}$ nie je kauzálny
- ❑ Koreň Θ je -5 , takže leží mimo jednotkového kruhu; teda $\{X_t\}$ je invertovateľný



ARMA(p,q):Stacionarita, kauzalita a invertovateľnosť

■ Príklad: $(1 + 0.25B^2)X_t = (1 + 2B)W_t$

$$\phi(z) = 1 + 0.25z^2 = \frac{1}{4}(z^2 + 4) = \frac{1}{4}(z + 2i)(z - 2i)$$

$$\theta(z) = 1 + 2z = 2\left(z + \frac{1}{2}\right)$$

- Φ a Θ nemajú spoločné korene;
- korene Φ sú $\pm 2i$, teda neležia na jednotkovej kružnici, takže $\{X_t\}$ je proces ARMA(2,1)



ARMA(p,q):Stacionarita, kauzalita a invertovateľnosť

■ Príklad: $(1 + 0.25B^2)X_t = (1 + 2B)W_t$

$$\phi(z) = 1 + 0.25z^2 = \frac{1}{4}(z^2 + 4) = \frac{1}{4}(z + 2i)(z - 2i)$$

$$\theta(z) = 1 + 2z = 2\left(z + \frac{1}{2}\right)$$

- korene $\Phi (\pm 2i)$ ležia mimo jednotkového kruhu, teda $\{X_t\}$ je kauzálny
- Koreň Θ je $-1/2$, takže leží vnútri jednotkového kruhu; teda $\{X_t\}$ je nie invertovateľný



Kauzalita a invertovateľnosť

- Veta. Nech $\{X_t\}$ je proces ARMA určený

$$\phi(B)X_t = \theta(B)W_t$$

Ak $\theta(z) \neq 0$ pre všetky $|z| = 1$, tak existujú také polynómy $\tilde{\phi}$ a $\tilde{\theta}$ a biely šum $\tilde{W}_t$, že $\{X_t\}$ vyhovuje

$$\tilde{\phi}(B)X_t = \tilde{\theta}(B)\tilde{W}_t$$

pričom tento proces ARMA je kauzálny a invertovateľný.



Výpočet ψ pre AR(p): určenie koeficientov - príklad

■ Príklad: $X_t = \psi(B)W_t$

$$\Leftrightarrow (1 + 0.25B^2)X_t = (1 + 0.2B)W_t \mid$$

takže

$$1 + 0.2B = (1 + 0.25B^2)\psi(B) \mid$$

$$\Leftrightarrow 1 + 0.2B = (1 + 0.25B^2)(\psi_0 + \psi_1B + \psi_2B^2 + \dots) \mid$$



Výpočet ψ pre AR(p): určenie koeficientov - príklad

■ čo je ekvivalentné s

$$1 = \psi_0,$$

$$0.2 = \psi_1,$$

$$0 = \psi_2 + 0.25\psi_0,$$

$$0 = \psi_3 + 0.25\psi_1,$$

$$\vdots$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ll} 1 = \psi_0, & 0.2 = \psi_1, \\ 0 = \psi_j + 0.25\psi_{j-2}. \end{array}$$



Výpočet Ψ pre AR(p): určenie koeficientov - príklad

- Na tento prípad sa môžeme pozerať ako $\theta_j = \phi(B)\psi_j$ s $\theta_0 = 1, \theta_j = 0$ pre $j < 0, j > q$.
- Toto je diferenčná rovnica prvého rádu v premennej ψ_j .
- Môžeme použiť θ_j na určenie začiatočnej podmienky a dostaneme tak riešenie

$$\psi_j = \left(1, \frac{1}{5}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{20}, \frac{1}{16}, \frac{1}{80}, -\frac{1}{64}, -\frac{1}{320}, \dots\right)$$



Výpočet ψ pre AR(p): určenie koeficientov – všeobecný prípad

$$\phi(B)X_t = \theta(B)W_t \quad \Leftrightarrow \quad X_t = \psi(B)W_t \quad |$$

takže

$$\theta(B) = \psi(B)\phi(B) \quad |$$

$$\Leftrightarrow 1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q = (\psi_0 + \psi_1 B + \dots)(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)$$

$$\Leftrightarrow 1 = \psi_0,$$

$$\theta_1 = \psi_1 - \phi_1 \psi_0,$$

$$\theta_2 = \psi_2 - \phi_1 \psi_1 - \dots - \phi_2 \psi_0$$

$$\vdots$$


Výpočet Ψ pre AR(p): určenie koeficientov – všeobecný prípad

- To je ekvivalentné s $\theta_j = \phi(B)\psi_j$
s $\theta_0 = 1, \theta_j = 0$: pre $j < 0, j > q$.



Autokovariančná funkcia lineárnych procesov

- Uvažujme lineárny proces $\{X_t\}$ definovaný $X_t = \psi(B)W_t$

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= E(X_t X_{t+h}) \\ &= E(\psi_0 W_t + \psi_1 W_{t-1} + \psi_2 W_{t-2} + \cdots) \\ &\quad \times (\psi_0 W_{t+h} + \psi_1 W_{t+h-1} + \psi_2 W_{t+h-2} + \cdots) \\ &= \sigma_w^2 (\psi_0 \psi_h + \psi_1 \psi_{h+1} + \psi_2 \psi_{h+2} + \cdots).\end{aligned}$$



Autokovariančná funkcia MA procesov

- Uvažujme MA (q) proces $\{X_t\}$ definovaný $X_t = \theta(B)W_t$

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sigma_w^2 \sum_{j=0}^{q-h} \theta_j \theta_{j+h} & \text{if } h \leq q, \\ 0 & \text{if } h > q. \end{cases}$$



Autokovariančná funkcia ARMA procesov

- Uvažujme ARMA(p,q) proces $\{X_t\}$ definovaný $\phi(B)X_t = \theta(B)W_t$

Aby sme mohli vypočítať γ , vypočítame ψ , a potom využijeme vzťah

$$\gamma(h) = \sigma_w^2 (\psi_0\psi_h + \psi_1\psi_{h+1} + \psi_2\psi_{h+2} + \cdots)$$

- Alternatívny postup

$$\begin{aligned} X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p} \\ = W_t + \theta_1 W_{t-1} + \cdots + \theta_q W_{t-q} \end{aligned}$$



Autokovariančná funkcia ARMA procesov

takže

$$\begin{aligned} E((X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p}) X_{t-h}) \\ = E((W_t + \theta_1 W_{t-1} + \cdots + \theta_q W_{t-q}) X_{t-h}) \end{aligned}$$

odkiaľ

$$\begin{aligned} \gamma(h) - \phi_1 \gamma(h-1) - \cdots - \phi_p \gamma(h-p) \\ = E(\theta_h W_{t-h} X_{t-h} + \cdots + \theta_q W_{t-q} X_{t-h}) \\ = \sigma_w^2 \sum_{j=0}^{q-h} \theta_{h+j} \psi_j \end{aligned}$$

Takže, máme lineárnu diferenčnú rovnicu



Autokovariančná funkcia ARMA procesov - príklad

$$(1 + 0.25B^2)X_t = (1 + 0.2B)W_t, \quad \Leftrightarrow \quad X_t = \psi(B)W_t$$

$$\psi_j = \left(1, \frac{1}{5}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{20}, \frac{1}{16}, \frac{1}{80}, -\frac{1}{64}, -\frac{1}{320}, \dots\right).$$

$$\gamma(h) - \phi_1\gamma(h-1) - \phi_2\gamma(h-2) = \sigma_w^2 \sum_{j=0}^{q-h} \theta_{h+j}\psi_j$$

$$\Leftrightarrow \gamma(h) + 0.25\gamma(h-2) = \begin{cases} \sigma_w^2 (\psi_0 + 0.2\psi_1) & h=0 \\ 0.2\sigma_w^2 \psi_0 & h=1 \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$



Autokovariančná funkcia ARMA procesov - príklad

Dostali sme homogénnu lineárnu rovnicu

$$\gamma(h) + 0.25\gamma(h-2) = 0 \quad |$$

pre $h \geq 2$ so začiatočnými podmienkami

$$\gamma(0) + 0.25\gamma(-2) = \sigma_w^2 (1 + 1/25) \quad |$$

$$\gamma(1) + 0.25\gamma(-1) = \sigma_w^2/5. \quad |$$



Lineárna predikcia

Pre dané $X_1, X_2, \dots, X_n$, najlepší lineárny prediktor X_{n+m} v tvare

$$X_{n+m}^n = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$$

vyhovuje predikčným rovniciam

$$\left. \begin{aligned} E(X_{n+m} - X_{n+m}^n) &= 0 \\ E[(X_{n+m} - X_{n+m}^n) X_i] &= 0 \end{aligned} \right| \quad i = 1, \dots, n$$



Lineárna predikcia

- Chyba lineárneho prediktora je nekorelovaná s predikovanou premennou:

$$E(X_{n+m}^n - X_{n+m}) = 0$$

$$\Leftrightarrow E\left(\alpha_0 + \sum_i \alpha_i X_i - X_{n+m}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu\left(1 - \sum_i \alpha_i\right) = \alpha_0.$$

takže

$$X_{n+m}^n = \alpha_0 + \sum_i \alpha_i X_i \quad \Leftrightarrow \quad X_{n+m}^n - \mu = \sum_i \alpha_i (X_i - \mu)$$

Pre predikciu môžeme predpokladať $\mu = 0$,
takže budeme α_0 ignorovať.



Parciálna autokorelačná funkcia (PACF)

■ Model AR(1)

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + W_t$$

$$\gamma(1) = \text{Cov}(X_0, X_1) = \phi_1 \gamma(0)$$

$$\gamma(2) = \text{Cov}(X_0, X_2)$$

$$= \text{Cov}(X_0, \phi_1 X_1 + W_2)$$

$$= \text{Cov}(X_0, \phi_1^2 X_0 + \phi_1 W_1 + W_2)$$

$$= \phi_1^2 \gamma(0).$$

Vidíme, že X_0 a X_2 sú korelované cez X_1 . V PACF odstránime túto závislosť pomocou kovariancie predikčných chýb X_2^1 a X_0^1



Parciálna autokorelačná funkcia (PACF)

■ Pre AR(1)

$$\left. \begin{aligned} X_2^1 &= \phi_1 X_1 \\ X_0^1 &= \phi_1 X_1 \end{aligned} \right|$$

takže

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_2^1 - X_2, X_0^1 - X_0) &= \text{Cov}(\phi_1 X_1 - X_2, \phi_1 X_1 - X_0) \\ &= \text{Cov}(W_2, \phi_1 X_1 - X_0) \\ &= 0. \end{aligned}$$



Parciálna autokorelačná funkcia (PACF)

- Definícia. PACF stacionárneho časového radu $\{X_t\}$ je

$$\phi_{11} = \text{Corr}(X_1, X_0) = \rho(1)$$

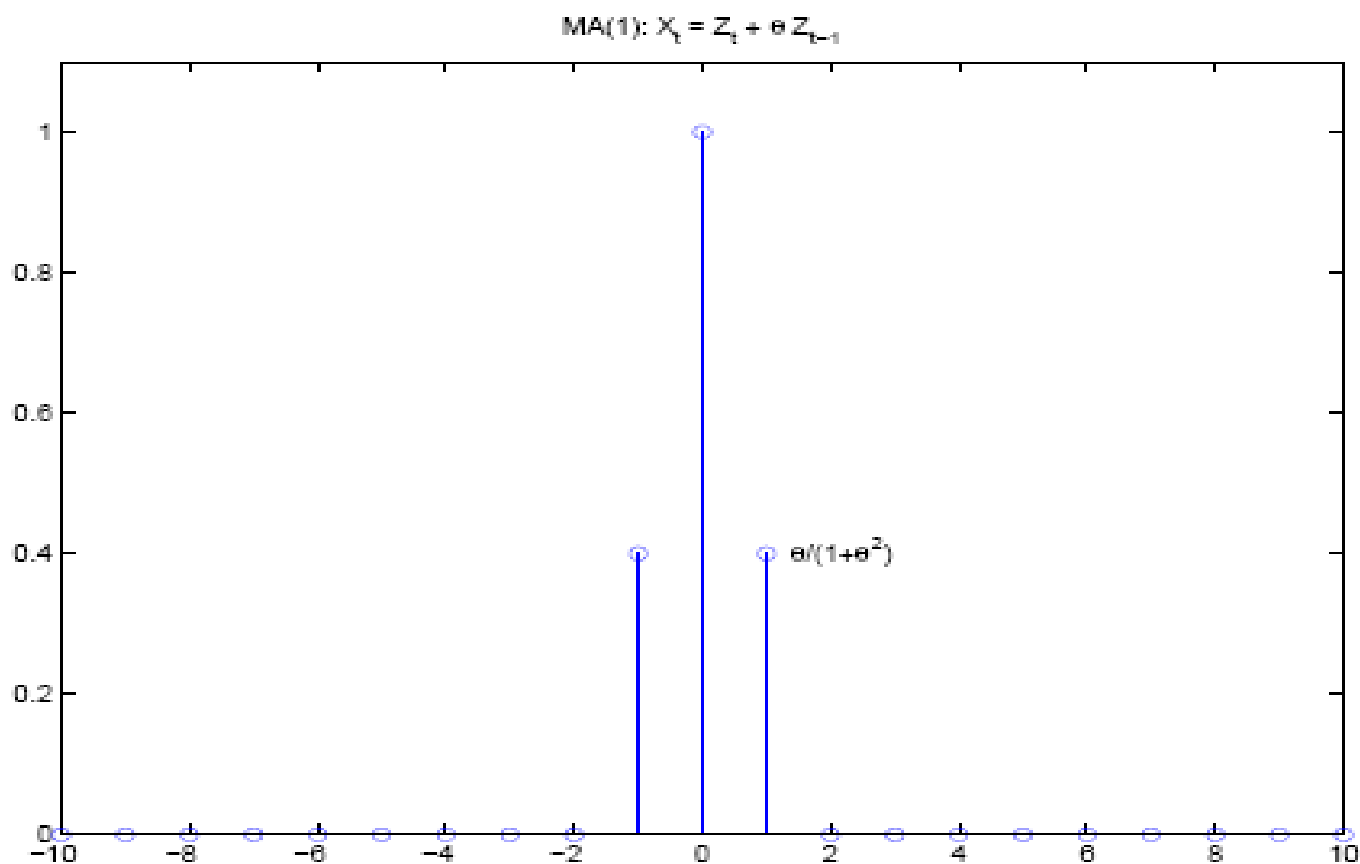
$$\phi_{hh} = \text{Corr}(X_h - X_h^{h-1}, X_0 - X_0^{h-1}) \quad \left| \quad h = 2, 3, \dots \right|$$

- Takto eliminujeme lineárne efekty $X_1, X_2, \dots, X_{h-1}$:

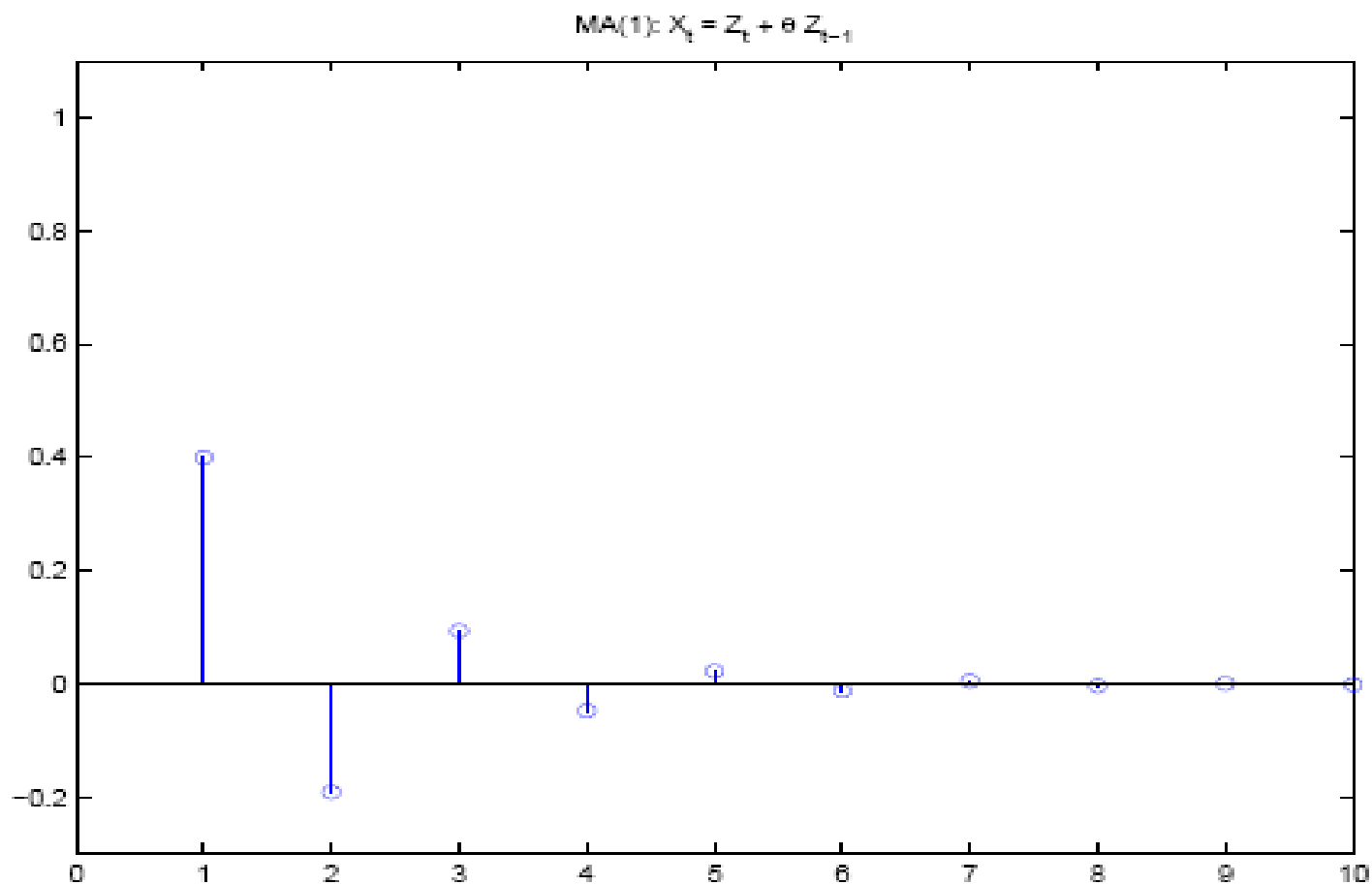
$$\dots, X_{-1}, \underline{X_0}, \underbrace{X_1, X_2, \dots, X_{h-1}}, \underline{X_h}, X_{h+1}, \dots \quad \left| \right.$$



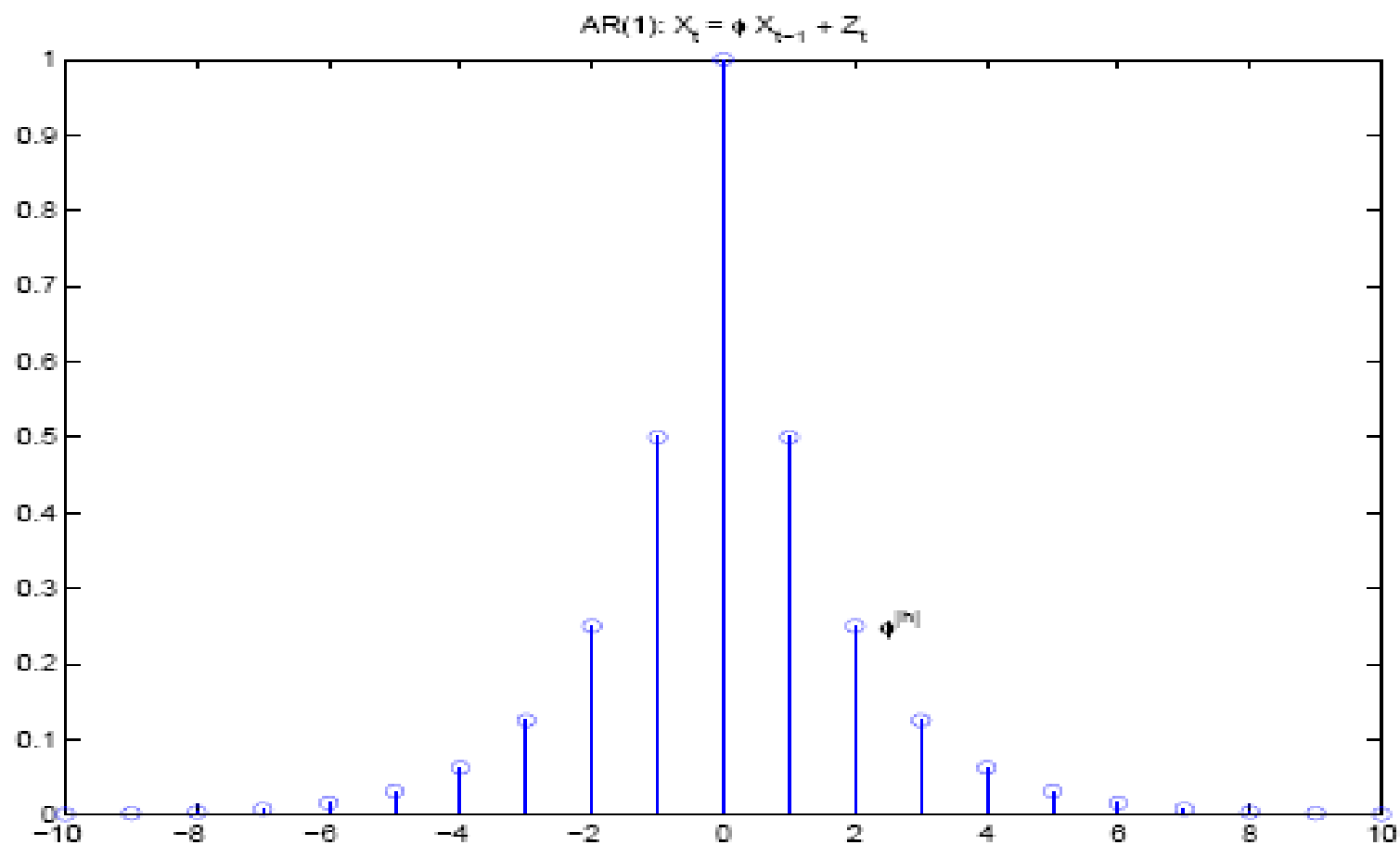
ACF procesu MA(1)



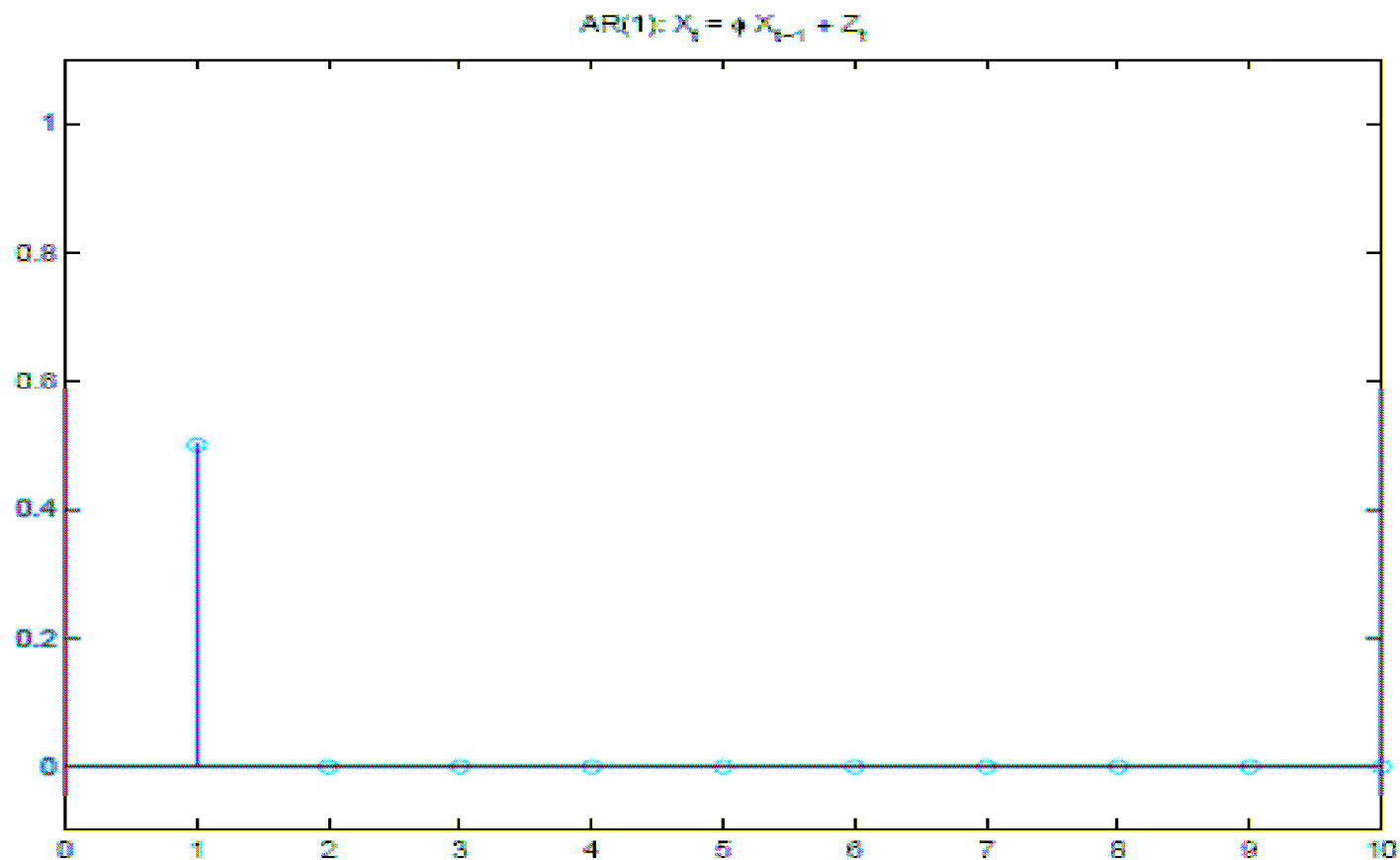
PACF procesu MA(1)



ACF procesu AR(1)



PACF procesu AR(1)



ACF a PACF

■ *Model*

ACF

PACF

□ MA(q)

nulová pre $|h| > q$

exponenciálny
pokles

□ AR(p)

exponenciálny
pokles

nulová pre $|h| > p$

□ ARMA(p,q) exponenciálny
pokles

exponenciálny
pokles

