Časové rady

Ján Pekár

Prednáška 4

Lineárna predikcia

Časové rady

Predošlá prednáška

- Kauzalita
- Invertovateľnosť
- Modely AR(p)
- Modely ARMA(p,q)
- Stacionarita, kauzalita a invertovateľnosť
- Reprezentácia procesov ARMA lineárnymi procesmi
- Autokorelačná a parciálna autokorelačná funkcia procesov ARMA

Obsah prednášky

- PACF
- Rekurzívne metódy: Durbin-Levinson
- Reprezentácia inovácií
- Rekurzívne metódy: Algoritmus inovácií
- Príklad: Algoritmus inovácií pre predpoveď pomocou MA(1)

Opakovanie: Kauzalita

- Definícia. Lineárny proces $\{X_t\}$ je kauzálny (presnejšie povedané, je kauzálnou funkciou $\{W_t\}$), ak existuje taký operátor

$$\psi(B) = \psi_0 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \cdots$$

s

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$$

a

$$X_t = \psi(B) W_t$$

Opakovanie: Invertovateľnosť

- Lineárny proces $\{X_t\}$ je invertovateľný (presnejšie povedané, je invertovateľnou funkciou $\{W_t\}$), ak existuje

$$\pi(B) = \pi_0 + \pi_1 B + \pi_2 B^2 + \cdots$$

s

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty$$

a

$$W_t = \pi(B) X_t$$

Opakovanie: AR(p) - Autoregresívne modely rádu p

- Definícia. Proces AR(p) (časového radu $\{X_t\}$) je taký stacionárny proces, ktorý spĺňa

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p} = W_t$$

kde $\{W_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$

Ekvivalentne $\phi(B)X_t = W_t$

kde $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p$

Opakovanie: AR(p) - Stacionarita a kauzalita

- Veta. (Jediné) stacionárne riešenie

$$\phi(B)X_t = W_t$$

existuje vtedy a len vtedy, ak

$$|z| = 1 \Rightarrow \phi(z) = 1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p \neq 0$$

Tento AR(p) proces je kauzálny vtedy a len vtedy, ak

$$|z| \leq 1 \Rightarrow \phi(z) = 1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p \neq 0$$

Opakovanie: ARMA(p,q)

- Definícia. Proces ARMA(p,q) (časového radu $\{X_t\}$) je taký stacionárny proces, ktorý spĺňa

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p} = W_t + \theta_1 W_{t-1} + \cdots + \theta_q W_{t-q}$$

kde $\{W_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$

- AR(p)=ARMA(p,0): $\theta(B) = 1$
- MA(q)=ARMA(0,q): $\phi(B) = 1$

Opakovanie: Procesy ARMA(p,q)

- Veta. Pre ľubovolný stacionárny proces s autokovarianciou γ a pre každé k>0, existuje taký proces ARMA časového radu $\{X_t\}$, pre ktorý

$$\gamma_X(h) = \gamma(h), \qquad h = 0, 1, \ldots, k$$

Opakovanie: ARMA(p,q) – Stacionarita a kauzalita

- Veta. Ak Φ a Θ nemajú spoločné korene, tak (jediné) stacionárne riešenie $\phi(B)X_t = \theta(B)W_t$ existuje vtedy a len vtedy, ak

$$|z| = 1 \Rightarrow \phi(z) = 1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p \neq 0$$

Tento proces ARMA(p,q) je kauzálny vtedy a len vtedy, ak

$$|z| \leq 1 \Rightarrow \phi(z) = 1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p \neq 0$$

Opakovanie: ARMA(p,q) - invertovateľnosť

- Veta. Ak Φ a Θ nemajú spoločné korene, tak (jediné) stacionárne riešenie $\phi(B)X_t = \theta(B)W_t$ existuje vtedy a len vtedy, ak

$$|z| = 1 \;\Rightarrow\; \phi(z) = 1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p \neq 0$$

Tento proces ARMA(p,q) je invertovateľný vtedy a len vtedy, ak

$$|z| \leq 1 \;\Rightarrow\; \theta(z) = 1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_q z^q \neq 0$$

Opakovanie: Kauzalita a invertovateľnosť

- Veta. Nech $\{X_t\}$ je proces ARMA určený

$$\phi(B)X_t = \theta(B)W_t$$

Ak $\theta(z) \neq 0$ pre všetky $|z| = 1$, tak existujú také polynómy $\tilde{\phi}$ a $\tilde{\theta}$ a biely šum $\tilde{W}_t$, že $\{X_t\}$ vyhovuje

$$\tilde{\phi}(B)X_t = \tilde{\theta}(B)\tilde{W}_t$$

pričom tento proces ARMA je kauzálny a invertovateľný.

Opakovanie: Výberová PACF

- Pre realizáciu x_1, x_2, ..., x_n, časového radu výberová PACF je

$$\hat{\phi}_{00} = 1$$

$$\hat{\phi}_{hh} = \text{ posledná zložka } \hat{\phi}_h$$

kde $\hat{\phi}_h = \hat{\Gamma}_h^{-1} \hat{\gamma}_h$

Opakovanie: Jednokroková dopredná lineárna predikcia

$$X_{n+1}^{n} = \phi_{n1} X_n + \phi_{n2} X_{n-1} + \cdots + \phi_{nn} X_1$$

$$\Gamma_n \phi_n = \gamma_n,$$

$$P_{n+1}^{n} = \mathrm{E}\left(X_{n+1} - X_{n+1}^{n}\right)^2 = \gamma(0) - \gamma_n' \Gamma_n^{-1} \gamma_n,$$

$$\Gamma_n = \begin{bmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \cdots & \gamma(n-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & & \gamma(n-2) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \gamma(n-1) & \gamma(n-2) & \cdots & \gamma(0) \end{bmatrix},$$

$$\phi_n = (\phi_{n1}, \phi_{n2}, \ldots, \phi_{nn})', \quad \gamma_n = (\gamma(1), \gamma(2), \ldots, \gamma(n))'.$$

Opakovanie: Predikčný operátor

- Pre náhodné premenné $Y, Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$, definujeme **najlepšiu lineárnun predikciu Y vzhľadom na $Z = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)'$** ako operátor $P(.|Z)$ aplikovaný na Y:

$$P(Y|Z) = \mu_Y + \phi'(Z - \mu_Z)$$

s

$$\Gamma\phi = \gamma,$$

kde

$$\gamma = \mathrm{Cov}(Y, Z)$$

$$\Gamma = \mathrm{Cov}(Z, Z).$$

Opakovanie: Vlastnosti predikčný operátor

1. $\mathrm{E}(Y - P(Y|Z)) = 0$, $\mathrm{E}((Y - P(Y|Z))Z) = 0$.

2. $\mathrm{E}((Y - P(Y|Z))^2) = \mathrm{Var}(Y) - \phi'\gamma$.

3. $P(\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \alpha_0|Z) = \alpha_0 + \alpha_1 P(Y_1|Z) + \alpha_2 P(Y_2|Z)$.

4. $P(Z_i|Z) = Z_i$.

5. $P(Y|Z) = \mathrm{E}Y$ if $\gamma = 0$.

Opakovanie: Parciálna autokorelačná funkcia (PACF)

- Definícia. PACF stacionárneho časového radu $\{X_t\}$ je

$$\phi_{11} = \mathrm{Corr}(X_1, X_0) = \rho(1)$$

$$\phi_{hh} = \mathrm{Corr}(X_h - X_h^{h-1}, X_0 - X_0^{h-1}) \qquad h = 2, 3, \ldots$$

- Takto eliminujeme lineárne efekty X_1, X_2, ..., X_{h-1}:

$$\ldots, X_{-1}, \underline{X_0}, \underbrace{X_1, X_2, \ldots, X_{h-1}}, \underline{X_h}, X_{h+1}, \ldots$$

Opakovanie: ACF a PACF

Model	*ACF*	*PACF*
MA(q)	nulová pre |h|>q	exponenciálny pokles
AR(p)	exponenciálny pokles	nulová pre |h|>p
ARMA(p,q)	exponenciálny pokles	exponenciálny pokles

Opakovanie: Výberová PACF

- Kde

$$\hat{\Gamma}_n = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}(0) & \hat{\gamma}(1) & \cdots & \hat{\gamma}(n-1) \\ \hat{\gamma}(1) & \hat{\gamma}(0) & \cdots & \hat{\gamma}(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\gamma}(n-1) & \hat{\gamma}(n-2) & \cdots & \hat{\gamma}(0) \end{pmatrix}$$

je kovariančná matica

Dôležitosť predikcie P^n_{n+1}: Interval predikcie

$$X^n_{n+1} = \phi_{n1}X_n + \phi_{n2}X_{n-1} + \cdots + \phi_{nn}X_1$$

$$\Gamma_n \phi_n = \gamma_n,$$

$$P^n_{n+1} = \mathrm{E}\left(X_{n+1} - X^n_{n+1}\right)^2 = \gamma(0) - \gamma_n' \Gamma_n^{-1} \gamma_n$$

Po pozorovaní X_1, X_2, ..., X_n, predpovedáme X_{n+1}. Očakávanou kvadratickou chybou našej predikcie je P^n_{n+1}

Dôležitosť predikcie P^n_{n+1}: Interval predikcie

Môžeme zostrojiť interval predikcie

$$X^n_{n+1} \pm c_{\alpha/2} \sqrt{P^n_{n+1}}.$$

Pre Gaussovský proces, chyba predikcie má distribúciu $\mathcal{N}(0, P^n_{n+1})$ takže $c_{0.05/2} = 1.96$

dáva 95% interval predikcie.

Výpočet koeficientov predikcie

$$X_{n+1}^{n} = \phi_{n1} X_n + \phi_{n2} X_{n-1} + \cdots + \phi_{nn} X_1$$

$$\Gamma_n \phi_n = \gamma_n,$$

$$P_{n+1}^{n} = \mathrm{E}\left(X_{n+1} - X_{n+1}^{n}\right)^2 = \gamma(0) - \gamma_n' \Gamma_n^{-1} \gamma_n$$

Ako môžeme vypočítať tieto veličiny rekurzívne? T.j. ako vieme pomocou ϕ_{n-1} z X_n^{n-1} vypočítať ϕ_n z X_{n+1}^{n} bez riešenia inej lineárnej sústavy $\Gamma_n \phi_n = \gamma_n$?

Durbin - Levinson

$$\phi_0 = 0, \qquad \phi_{00} = 0;$$

$$\phi_1 = \phi_{11}, \qquad \phi_{11} = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)};$$

$$\phi_n = \begin{pmatrix} \phi_{n-1} - \phi_{nn}\tilde{\phi}_{n-1} \\ \phi_{nn} \end{pmatrix}, \quad \phi_{nn} = \frac{\gamma(n) - \phi'_{n-1}\tilde{\gamma}_{n-1}}{\gamma(0) - \phi'_{n-1}\gamma_{n-1}}.$$

$$\phi_n = (\phi_{n1}, \ldots, \phi_{nn})' \qquad \tilde{\phi}_n = (\phi_{nn}, \ldots, \phi_{n1})',$$

$$\gamma_n = (\gamma(1), \ldots, \gamma(n))' \qquad \tilde{\gamma}_n = (\gamma(n), \ldots, \gamma(1))'.$$

Durbin – Levinson: Príklad

$$\phi_0 = 0, \qquad \phi_{00} = 0;$$

$$\phi_1 = \phi_{11}, \qquad \phi_{11} = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)};$$

$$\phi_n = \begin{pmatrix} \phi_{n-1} - \phi_{nn}\tilde{\phi}_{n-1} \\ \phi_{nn} \end{pmatrix}, \quad \phi_{nn} = \frac{\gamma(n) - \phi'_{n-1}\tilde{\gamma}_{n-1}}{\gamma(0) - \phi'_{n-1}\gamma_{n-1}}.$$

Tento algoritmus počíta $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \ldots,$ kde

$$X_2^1 = X_1\phi_1, \quad X_3^2 = (X_2, X_1)\phi_2, \quad X_4^3 = (X_3, X_2, X_1)\phi_3, \ldots$$

Durbin – Levinson: Príklad

$$\phi_0 = 0, \qquad \phi_{00} = 0;$$

$$\phi_1 = \phi_{11}, \qquad \phi_{11} = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)};$$

$$\phi_n = \begin{pmatrix} \phi_{n-1} - \phi_{nn}\tilde{\phi}_{n-1} \\ \phi_{nn} \end{pmatrix}, \quad \phi_{nn} = \frac{\gamma(n) - \phi'_{n-1}\tilde{\gamma}_{n-1}}{\gamma(0) - \phi'_{n-1}\gamma_{n-1}}.$$

$$\phi_1 = \gamma(1)/\gamma(0),$$

$$\phi_2 = \begin{pmatrix} \phi_1 - \phi_{22}\phi_{11} \\ \phi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)}\left(1 - \frac{\gamma(2)-\gamma(1)}{\gamma(0)-\gamma(1)}\right) \\ \frac{\gamma(2)-\gamma(1)}{\gamma(0)-\gamma(1)} \end{pmatrix},$$

Durbin – Levinson: Ako to funguje?

Jasne: $\Gamma_1 \phi_1 = \gamma_1.$

Predpokladáme: $\Gamma_{n-1} \phi_{n-1} = \gamma_{n-1}.$

Potom $\Gamma_{n-1} \tilde{\phi}_{n-1} = \tilde{\gamma}_{n-1}$

Durbin – Levinson: Ako to funguje?

a

$$\Gamma_n \phi_n = \begin{pmatrix} \Gamma_{n-1} & \tilde{\gamma}_{n-1} \\ \tilde{\gamma}'_{n-1} & \gamma(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{n-1} - \phi_{nn}\tilde{\phi}_{n-1} \\ \phi_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \gamma_{n-1} \\ \tilde{\gamma}'_{n-1}\phi_{n-1} + \phi_{nn}\left(\gamma(0) - \gamma'_{n-1}\phi_{n-1}\right) \end{pmatrix}$$
$$= \gamma_n .$$

Durbin – Levinson: Chyba v najmenších štvorcoch

$$P_{n+1}^{n} = \gamma(0) - \phi_n' \gamma_n$$

$$= \gamma(0) - \begin{pmatrix} \phi_{n-1} - \phi_{nn}\tilde{\phi}_{n-1} \\ \phi_{nn} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \gamma_{n-1} \\ \gamma(n) \end{pmatrix}$$

$$= P_n^{n-1} - \phi_{nn}\left(\gamma(n) - \tilde{\phi}_{n-1}' \gamma_{n-1}\right)$$

$$= P_n^{n-1} - \phi_{nn}^2 \left(\gamma(0) - \phi_{n-1}' \gamma_{n-1}\right)$$

z výrazu pre ϕ_{nn}

$$= P_n^{n-1}\left(1 - \phi_{nn}^2\right).$$

t.j. variancia sa redukuje faktorom $1 - \phi_{nn}^2$

Reprezentácia inovácií

- Namiesto najlepšieho lineárneho prediktora $X_{n+1}^{n} = \phi_{n1} X_n + \phi_{n2} X_{n-1} + \cdots + \phi_{nn} X_1$ môžeme písať

$$X_{n+1}^{n} = \theta_{n1} \underline{\left(X_n - X_n^{n-1}\right)} + \theta_{n2} \left(X_{n-1} - X_{n-1}^{n-2}\right) + \cdots + \theta_{nn} \left(X_1 - X_1^{0}\right)$$

Označme = U_n.

Toto je stále lineárne v X_1, X_2, ..., X_n. Inovácie sú nekorelované

$$\mathrm{Cov}(X_j - X_j^{j-1}, X_i - X_i^{i-1}) = 0 \qquad i \neq j$$

Porovnanie reprezentácií U_n a X_n

- $\{U_t\}$ vytvára dekorelovanú reprezentáciu $\{X_t\}$

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\phi_{11} & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ -\phi_{n-1,n-1} & -\phi_{n-1,n-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

Porovnanie reprezentácií U_n a X_n

- $\{U_t\}$ vytvára dekorelovanú reprezentáciu $\{X_t\}$

$$\begin{pmatrix} X_1^0 \\ X_2^1 \\ \vdots \\ X_n^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \theta_{11} & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \theta_{n-1,n-1} & \theta_{n-1,n-2} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}$$

Algoritmus inovácií

$$X_1^0 = 0, \qquad X_{n+1}^n = \sum_{i=1}^{n} \theta_{ni} \left(X_{n+1-i} - X_{n+1-i}^{n-i} \right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \theta_{n,n-i} &= \frac{1}{P_{i+1}^i} \left(\gamma(n-i) - \sum_{j=0}^{i-1} \theta_{i,i-j} \theta_{n,n-j} P_{j+1}^j \right). \\ P_1^0 = \gamma(0) \qquad P_{n+1}^n &= \gamma(0) - \sum_{i=0}^{n-1} \theta_{n,n-i}^2 P_{i+1}^i. \end{aligned}}$$

Algoritmus inovácií: príklad

$$\theta_{n,n-i} = \frac{1}{P_{i+1}^{i}} \left(\gamma(n-i) - \sum_{j=0}^{i-1} \theta_{i,i-j} \theta_{n,n-j} P_{j+1}^{j} \right).$$

$$P_1^0 = \gamma(0) \qquad P_{n+1}^{n} = \gamma(0) - \sum_{i=0}^{n-1} \theta_{n,n-i}^2 P_{i+1}^{i}.$$

$$\theta_{1,1} = \gamma(1)/P_1^0, \qquad P_2^1 = \gamma(0) - \theta_{1,1}^2 P_1^0$$

$$\theta_{2,2} = \gamma(2)/P_1^0, \quad \theta_{2,1} = \left(\gamma(1) - \theta_{1,1}\theta_{2,2}P_1^0\right)/P_2^1,$$

$$P_3^2 = \gamma(0) - \left(\theta_{2,2}^2 P_1^0 + \theta_{2,1}^2 P_2^1\right)$$

$$\theta_{3,3}, \quad \theta_{3,2}, \quad \theta_{3,1}, \quad P_4^3, \ldots$$

Predikcia *h* krokov napred pomocou inovácií

- Reprezentácia inovácií pre jednokrokovú naprednú predikciu je

$$P(X_{n+1}|X_1,\ldots,X_n)=\sum_{i=1}^{n}\theta_{ni}\left(X_{n+1-i}-X_{n+1-i}^{n-i}\right)$$

Ako vyzerá reprezentácia inovácií pre

$$P(X_{n+h}|X_1,\ldots,X_n)?$$

Takto: $P(X_{n+h}|X_1,\ldots,X_{n+h-1})$
pozor, nepozorované predikcie od *n+1* do *n+h-1* položíme rovné nule!

Predikcia *h* krokov napred pomocou inovácií

- Ako vyzerá reprezentácia inovácií pre

$$P(X_{n+h}|X_1,\ldots,X_n)?$$

Fakt: Pre $h \geq 1$ a $1 \leq i \leq n$ máme

$$\mathrm{Cov}(X_{n+h} - P(X_{n+h}|X_1,\ldots,X_{n+h-1}), X_i) = 0$$

Teda, najlepšou predikciou X_{n+h} je najlepšia predikcia jednokrokovej predpovede X_{n+h}

Predikcia *h* krokov napred pomocou inovácií

- Ako vyzerá reprezentácia inovácií pre
$$P(X_{n+h}|X_1,\dots,X_n)?$$

Fakt: Najlepšou predikciou $X_{n+1}-X_{n+1}^n$ vzhľadom na X_1, X_2, ..., X_n je 0. Podobne pre n+2, ..., n+h-1.

- Reprezentácia inovácií má tvar

$$P(X_{n+h}|X_1,\dots,X_n)=\sum_{i=1}^{n}\theta_{n+h-1,h-1+i}\left(X_{n+1-i}-X_{n+1-i}^{n-i}\right)$$

Predikcia *h* krokov napred pomocou inovácií (detail)

$$
\begin{aligned}
&P(X_{n+h}|X_1,\dots,X_n)\\
&= P\left(P(X_{n+h}|X_1,\dots,X_{n+h-1})|X_1,\dots,X_n\right)\\
&= P\left(\sum_{i=1}^{n+h-1}\theta_{n+h-1,i}\left(X_{n+h-i}-X_{n+h-i}^{n+h-i-1}\right)|X_1,\dots,X_n\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n+h-1}\theta_{n+h-1,i}P\left(\left(X_{n+h-i}-X_{n+h-i}^{n+h-i-1}\right)|X_1,\dots,X_n\right)\\
&= \sum_{i=h}^{n+h-1}\theta_{n+h-1,i}P\left(\left(X_{n+h-i}-X_{n+h-i}^{n+h-i-1}\right)|X_1,\dots,X_n\right)\\
&= \sum_{i=h}^{n+h-1}\theta_{n+h-1,i}\left(X_{n+h-i}-X_{n+h-i}^{n+h-i-1}\right)
\end{aligned}
$$

Predikcia *h* krokov napred pomocou inovácií (detail)

$$P(X_{n+1}|X_1,\ldots,X_n) = \sum_{i=1}^{n} \theta_{ni} \left(X_{n+1-i} - X_{n+1-i}^{n-i}\right)$$

$$P(X_{n+h}|X_1,\ldots,X_n) = \sum_{j=h}^{n+h-1} \theta_{n+h-1,j} \left(X_{n+h-j} - X_{n+h-j}^{n+h-j-1}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \theta_{n+h-1,h-1+i} \left(X_{n+1-i} - X_{n+1-i}^{n-i}\right)$$

$(j = i + h - 1)$

Predikcia h krokov napred - chyba v najmenších štvorcoch

- Reprezentácia inovácií má tvar

$$P(X_{n+h}|X_1,\dots,X_n)=\sum_{i=1}^{n}\theta_{n+h-1,h-1+i}\left(X_{n+1-i}-X_{n+1-i}^{n-i}\right)$$

Predikcia *h* krokov napred - chyba v najmenších štvorcoch

- Z ortogonality prediktorov a chyby máme

$$\mathrm{E}\left(\left(X_{n+h} - P(X_{n+h}|X_1,\ldots,X_n)\right) P(X_{n+h}|X_1,\ldots,X_n)\right) = 0.$$

Teda

$$\mathrm{E}\left(X_{n+h} P(X_{n+h}|X_1,\ldots,X_n)\right) = \mathrm{E}\left(P(X_{n+h}|X_1,\ldots,X_n)^2\right).$$

Predikcia *h* krokov napred - chyba v najmenších štvorcoch

Chybu v najmenších štvorcoch si teda môžeme vyjadriť ako

$$
\begin{aligned}
P_{n+h}^{n} &= \mathrm{E}\left(X_{n+h} - P(X_{n+h}|X_1,\ldots,X_n)\right)^2 \\
&= \gamma(0) + \mathrm{E}\left(P(X_{n+h}|X_1,\ldots,X_n)\right)^2 \\
&\quad - 2\mathrm{E}\left(X_{n+h}P(X_{n+h}|X_1,\ldots,X_n)\right) \\
&= \gamma(0) - \mathrm{E}\left(P(X_{n+h}|X_1,\ldots,X_n)\right)^2 .
\end{aligned}
$$

Predikcia *h* krokov napred - chyba v najmenších štvorcoch

Avšak inovácie sú nekorelované, takže

$$
\begin{aligned}
P_{n+h}^{n} &= \gamma(0) - \mathrm{E}\left(P(X_{n+h}|X_1,\ldots,X_n)\right)^2 \\
&= \gamma(0) - \mathrm{E}\left(\sum_{j=h}^{n+h-1} \theta_{n+h-1,j}\left(X_{n+h-j} - X_{n+h-j}^{n+h-j-1}\right)\right)^2 \\
&= \gamma(0) - \sum_{j=h}^{n+h-1} \theta_{n+h-1,j}^2\, \mathrm{E}\left(X_{n+h-j} - X_{n+h-j}^{n+h-j-1}\right)^2 \\
&= \gamma(0) - \sum_{j=h}^{n+h-1} \theta_{n+h-1,j}^2\, P_{n+h-j}^{n+h-j-1}.
\end{aligned}
$$

Algoritmus inovácií pre MA(1)

- Predpokladajme, že máme pre $\{X_t\}$ proces MA(1), ktorý vyhovuje

$$X_t = W_t + \theta_1 W_{t-1}$$

Pre dané $X_1, X_2, \ldots, X_n$ chceme vypočítať najlepšiu predpoveď X_{n+1} využijúc reprezentáciu inovácií.

$$X_1^0 = 0, \qquad X_{n+1}^n = \sum_{i=1}^{n} \theta_{ni} \left(X_{n+1-i} - X_{n+1-i}^{n-i} \right).$$

Algoritmus inovácií pre MA(1)

- Odbočka: Lineárne predikcie sú v tvare

$$X_{n+1}^{n} = \sum_{i=1}^{n} \theta_{ni} Z_{n+1-i}$$

pre nekorelované náhodné premenné Z_i, s nulovou strednou hodnotou. Špeciálne, $X_{n+1} = Z_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \theta_{ni} Z_{n+1-i},$

kde $Z_{n+1} = X_{n+1} - X_{n+1}^{n}$ (a všetky Z_i) sú nekorelované. To naznačuje MA reprezentáciu.

Algoritmus inovácií pre MA(1) - príklad

$$\theta_{n,n-i} = \frac{1}{P_{i+1}^{i}} \left(\gamma(n-i) - \sum_{j=0}^{i-1} \theta_{i,i-j}\theta_{n,n-j}P_{j+1}^{j} \right).$$

$$P_1^0 = \gamma(0) \qquad P_{n+1}^{n} = \gamma(0) - \sum_{i=0}^{n-1} \theta_{n,n-i}^2 P_{i+1}^{i}.$$

- Algoritmus počíta $P_1^0 = \gamma(0), \theta_{1,1}$ pomocou $\gamma(1)$ ďalej $P_2^1, \theta_{2,2}$ pomocou $\gamma(2)$, $\theta_{2,1}; P_3^2, \theta_{3,3}$ pomocou $\gamma(3)$, atď.

Algoritmus inovácií pre MA(1) - príklad

$$\theta_{n,n-i} = \frac{1}{P^i_{i+1}} \left(\gamma(n-i) - \sum_{j=0}^{i-1} \theta_{i,i-j}\theta_{n,n-j}P^j_{j+1} \right).$$

- Pre MA(1): $\gamma(0) = \sigma^2(1+\theta_1^2)$, $\gamma(1) = \theta_1\sigma^2$.

Teda $\theta_{1,1} = \gamma(1)/P_1^0$;

$\theta_{2,2} = 0$, $\theta_{2,1} = \gamma(1)/P_2^1$;

$\theta_{3,3} = \theta_{3,2} = 0$; $\theta_{3,1} = \gamma(1)/P_3^2$

Pretože $\gamma(n-i) \neq 0$ len pre $i = n-1$ len $\theta_{n,1} \neq 0$

Algoritmus inovácií pre MA(1) - príklad

- Pre proces MA(1) pre $\{X_t\}$ vyhovujúci

$$X_t = W_t + \theta_1 W_{t-1}$$

reprezentácia inovácií najlepšej lineárnej predpovede je

$$X_1^0 = 0, \qquad X_{n+1}^n = \theta_{n1}\left(X_n - X_n^{n-1}\right)$$

Vo všeobecnosti, pre proces MA(q) platí pre $i > q$: $\theta_{ni} = 0$

Algoritmus inovácií pre MA(1) - príklad

- Pre proces MA(1) pre $\{X_t\}$ máme

$$X_1^0 = 0, \qquad X_{n+1}^n = \theta_{n1}\left(X_n - X_n^{n-1}\right)$$

Toto je konzistentné so zistením, že

$$X_{n+1} = Z_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \theta_{ni} Z_{n+1-i}$$

kde $Z_t = X_t - X_t^{t-1}$, $t = 1, \ldots, n+1$ sú nekorelované. Skutočne, ako *n* rastie, tak $P_{n+1}^n \to \mathrm{Var}(W_t)$ (rekurzia P_{n+1}^n) a

$$\theta_{n1} = \gamma(1)/P_n^{n-1} \to \theta_1$$

Opakovanie: AR(p)

- Pre proces AR(p) pre $\{X_t\}$ vyhovujúci

$$X_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i} + W_t$$

pre $n \geq p$ máme

$$X_1^0 = 0, \qquad X_{n+1}^n = \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{n+1-i}$$

Potom

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{n+1-i} + Z_{n+1}$$

Opakovanie: AR(p)

kde

$$Z_{n+1} = X_{n+1} - X_{n+1}^{n}$$

Durbinov – Levinsonov algoritmus je vhodný pre procesy AR(p)

Algoritmus inovácií je vhodný pre procesy MA(q).

Predpoveď pomocou ARMA(p,q)

- Existuje reprezentácia procesov ARMA(p,q) založená na algoritme inovácií. Predpokladajme, že $\{X_t\}$ je proces ARMA(p,q) :

$$X_t = \sum_{j=1}^{p} \phi_j X_{t-j} + W_t + \sum_{j=1}^{q} \theta_j W_{t-j}$$

Predpoveď pomocou ARMA(p,q)

- Uvažujme transformovaný proces

$$Z_t = \begin{cases} X_t/\sigma & t = 1, \ldots, p, \\ \phi(B)X_t/\sigma & t > p \end{cases}$$

Ak $p > 0,$ tak proces nie je stacionárny.

Predpoveď pomocou ARMA(p,q)

Napriek tomu existuje všeobecnejšia verzia algoritmu inovácií, ktorú môžeme použiť na nestacionárne procesy.

Predpoveď pomocou ARMA(p,q)

- Nech $\theta_{n,j}$ sú koeficienty získané pomocou algoritmu inovácií na proces Z_j. Dostaneme tak reprezentáciu

$$X_{n+1}^n = \begin{cases} \sum_{j=1}^n \theta_{nj}\left(X_{n+1-j} - X_{n+1-j}^{n-j}\right) & n < p, \\ \sum_{j=1}^p \phi_j X_{n+1-j} + \sum_{j=1}^q \theta_{nj}\left(X_{n+1-j} - X_{n+1-j}^{n-j}\right) & n \geq p \end{cases}$$

Pre kauzálny, invertovateľný $\{X_t\}$

$$\mathrm{E}(X_n - X_n^{n-1} - W_n)^2 \to 0,\ \theta_{nj} \to \theta_j,\ P_n^{n+1} \to \sigma^2.$$

Lineárna predikcia založená na nekonečnej minulosti

- Zatiaľ sme uvažovali lineárne prediktory založené na *n* pozorovaných hodnotách časového radu

$$X_{n+m}^{n} = P(X_{n+m} | X_n, X_{n-1}, \ldots, X_1)$$

Čo sa stane, ak máme prístup ku ***všetkým*** predošlým hodnotám X_n, X_{n-1}, X_{n-2}, ...?

Lineárna predikcia založená na nekonečnej minulosti

- Označme

$$\tilde{X}_{n+m} = P(X_{n+m}|X_n, X_{n-1}, \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i X_{n+1-i}.$$

Z vlastnosti ortogonality optimálneho lineárneho prediktora vyplýva

$$\mathrm{E}\left[(\tilde{X}_{n+m} - X_{n+m})X_{n+1-i}\right] = 0, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Lineárna predikcia založená na nekonečnej minulosti

- Teda, ak $\{X_t\}$ je stacionárny časový rad s nulovou strednou hodnotou, tak

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \gamma(i-j) = \gamma(m-1+i), \quad i = 1, 2, \ldots$$

- Ak $\{X_t\}$ je kauzálny, invertovateľný lineárny proces, tak môžeme napísať

$$X_{n+m} = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j W_{n+m-j} + W_{n+m},$$

$$W_{n+m} = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j X_{n+m-j} + X_{n+m}$$

Lineárna predikcia založená na nekonečnej minulosti

- V takomto prípade

$$
\begin{aligned}
\tilde{X}_{n+m} &= P(X_{n+m}|X_n, X_{n-1}, \ldots) \\
&= P(W_{n+m}|X_n, \ldots) - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j P(X_{n+m-j}|X_n, \ldots) \\
&= -\sum_{j=1}^{m-1} \pi_j P(X_{n+m-j}|X_n, \ldots) - \sum_{j=m}^{\infty} \pi_j X_{n+m-j}.
\end{aligned}
$$

Lineárna predikcia založená na nekonečnej minulosti

$$\tilde{X}_{n+m} = -\sum_{j=1}^{m-1} \pi_j P(X_{n+m-j}|X_n, \ldots) - \sum_{j=m}^{\infty} \pi_j X_{n+m-j}$$

Teda

$$\tilde{X}_{n+1} = -\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j X_{n+1-j},$$

$$\tilde{X}_{n+2} = -\pi_1 \tilde{X}_{n+1} - \sum_{j=2}^{\infty} \pi_j X_{n+2-j},$$

$$\tilde{X}_{n+3} = -\pi_1 \tilde{X}_{n+2} - \pi_2 \tilde{X}_{n+1} - \sum_{j=3}^{\infty} \pi_j X_{n+3-j}.$$

Invertovateľná (AR(∞)) reprezentácia dáva predpoveď $\tilde{X}_{n+m}^{n}$

Lineárna predikcia založená na nekonečnej minulosti

- Aby sme vypočítali chybu v najmenších štvorcoch, musíme si uvedomiť, že

$$\begin{aligned}\tilde{X}_{n+m} = P(X_{n+m}|X_n, X_{n-1}, \ldots) &= \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j P(W_{n+m-j}|X_n, X_{n-1}, \ldots) \\ &\qquad + P(W_{n+m}|X_n, X_{n-1}, \ldots) \\ &= \sum_{j=m}^{\infty} \psi_j W_{n+m-j}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(X_{n+m} - P(X_{n+m}|X_n, X_{n-1}, \ldots)\right)^2 &= \mathrm{E}\left(\sum_{j=0}^{m-1} \psi_j W_{n+m-j}\right)^2 \\ &= \sigma_w^2 \sum_{j=0}^{m-1} \psi_j^2.\end{aligned}$$

Lineárna predikcia založená na nekonečnej minulosti

- Teda, chyba v najmenších štvorcoch predpovede založenej na nekonečnej minulosti je daná začiatočnými členmi kauzálnej (MA(∞)) reprezentácie

$$\mathrm{E}\left(X_{n+m} - \tilde{X}_{n+m}\right)^2 = \sigma_w^2 \sum_{j=0}^{m-1} \psi_j^2$$

Špeciálne pre *m*=1 chyba v najmenších štvorcoch je σ_w^2

Nabudúce

- Odseknutý prediktor
- Odhad parametrov
- Estimátor maximálnej vierohodnosti
- Yuleho – Walkerov odhad