

Časové rady

Ján Pekár
Prednáška 6

Odhady parametrov

Predošlá prednáška

- Výberová PACF
- Rekurzívne metódy: Durbin-Levinson
- Rerezentácia inovácií
- Rekurzívne metódy: Algoritmus inovácií
- Príklad: Algoritmus inovácií pre predpoveď pomocou MA(1)
- Lineárna predikcia založená na nekonečnej minulosti



Dnešná prednáška

- Odseknutý prediktor
- Odhad parametrov
- Estimátor maximálnej vierohodnosti
- Yuleho – Walkerov estimátor
- Integrované ARMA modely(?)
- Sezónne ARMA modely(?)



Opakovanie: Predikčný operátor

- Pre náhodné premenné Y, Z_1, Z_2, \dots, Z_n , definujeme **najlepšiu lineárnu predikciu Y vzhľadom na $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$** ako operátor $P(.|Z)$ aplikovaný na Y :

$$P(Y|Z) = \mu_Y + \phi'(Z - \mu_Z)$$

s

$$\Gamma\phi = \gamma,$$

kde

$$\gamma = \text{Cov}(Y, Z)$$

$$\Gamma = \text{Cov}(Z, Z).$$



Opakovanie: Jednokroková dopredná lineárna predikcia

$$X_{n+1}^n = \phi_{n1}X_n + \phi_{n2}X_{n-1} + \cdots + \phi_{nn}X_1$$

$$\Gamma_n \phi_n = \gamma_n,$$

$$P_{n+1}^n = \mathbf{E} (X_{n+1} - X_{n+1}^n)^2 = \gamma(0) - \gamma_n' \Gamma_n^{-1} \gamma_n,$$

$$\Gamma_n = \begin{bmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \cdots & \gamma(n-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & & \gamma(n-2) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \gamma(n-1) & \gamma(n-2) & \cdots & \gamma(0) \end{bmatrix},$$

$$\phi_n = (\phi_{n1}, \phi_{n2}, \dots, \phi_{nn})', \quad \gamma_n = (\gamma(1), \gamma(2), \dots, \gamma(n))'.$$



Opakovanie: Reprezentácia inovácií

- Namiesto najlepšieho lineárneho prediktora $X_{n+1}^n = \phi_{n1}X_n + \phi_{n2}X_{n-1} + \dots + \phi_{nn}X_1$ môžeme písať

$$X_{n+1}^n = \theta_{n1} \underbrace{(X_n - X_n^{n-1})} + \theta_{n2} (X_{n-1} - X_{n-1}^{n-2}) + \dots + \theta_{nn} (X_1 - X_1^0)$$

Označme $U_n = X_n - X_n^{n-1}$.

Toto je stále lineárne v X_1, X_2, \dots, X_n .
Inovácie sú nekorelované

$$\text{Cov}(X_j - X_j^{j-1}, X_i - X_i^{i-1}) = 0 \quad | \quad i \neq j$$



Opakovanie: Predikcia h krokov napred pomocou inovácií

- Reprezentácia inovácií pre jednokrokovú naprednú predikciu je

$$P(X_{n+1}|X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n \theta_{ni} (X_{n+1-i} - X_{n+1-i}^{n-i})$$

Ako vyzerá reprezentácia inovácií pre

$$P(X_{n+h}|X_1, \dots, X_n)?$$

Takto: $P(X_{n+h}|X_1, \dots, X_{n+h-1})$

pozor, nepozorované predikcie od $n+1$ do $n+h-1$ položíme rovné nule!



Opakovanie: Lineárna predikcia založená na nekonečnej minulosti

- Zatiaľ sme uvažovali lineárne prediktory založené na n pozorovaných hodnotách časového radu

$$X_{n+m}^n = P(X_{n+m} | X_n, X_{n-1}, \dots, X_1)$$

Čo sa stane, ak máme prístup ku **všetkým** predošlým hodnotám $X_n, X_{n-1}, X_{n-2}, \dots$?



Opakovanie: Lineárna predikcia založená na nekonečnej minulosti

■ Označme

$$\begin{aligned}\tilde{X}_{n+m} &= P(X_{n+m} | X_n, X_{n-1}, \dots) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i X_{n+1-i}.\end{aligned}$$

Z vlastnosti ortogonalnosti optimálneho lineárneho prediktora vyplýva

$$E \left[(\tilde{X}_{n+m} - X_{n+m}) X_{n+1-i} \right] = 0, \quad i = 1, 2, \dots$$



Opakovanie: Lineárna predikcia založená na nekonečnej minulosti

- Teda, ak $\{X_t\}$ je stacionárny časový rad s nulovou strednou hodnotou, tak

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \gamma(i-j) = \gamma(m-1+i), \quad i = 1, 2, \dots$$

- Ak $\{X_t\}$ je kauzálny, invertovateľný lineárny proces, tak môžeme napísať

$$X_{n+m} = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j W_{n+m-j} + W_{n+m},$$

$$W_{n+m} = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j X_{n+m-j} + X_{n+m}$$



Opakovanie: Lineárna predikcia založená na nekonečnej minulosti

$$\tilde{X}_{n+m} = - \sum_{j=1}^{m-1} \pi_j P(X_{n+m-j} | X_n, \dots) - \sum_{j=m}^{\infty} \pi_j X_{n+m-j}$$

Teda

$$\tilde{X}_{n+1} = - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j X_{n+1-j},$$

$$\tilde{X}_{n+2} = -\pi_1 \tilde{X}_{n+1} - \sum_{j=2}^{\infty} \pi_j X_{n+2-j},$$

$$\tilde{X}_{n+3} = -\pi_1 \tilde{X}_{n+2} - \pi_2 \tilde{X}_{n+1} - \sum_{j=3}^{\infty} \pi_j X_{n+3-j}.$$

Invertovateľná (AR(∞)) reprezentácia dáva
predpoveď \tilde{X}_{n+m}^n



Odseknutý prediktor

- Pre veľké n odseknutie predpovede založenej na nekonečnej minulosti dáva dobrú aproximáciu:

$$\tilde{X}_{n+m} = - \sum_{j=1}^{m-1} \pi_j \tilde{X}_{n+m-j} - \sum_{j=m}^{\infty} \pi_j X_{n+m-j}$$
$$\tilde{X}_{n+m}^n = - \sum_{j=1}^{m-1} \pi_j \tilde{X}_{n+m-j}^n - \sum_{j=m}^{n+m-1} \pi_j X_{n+m-j}.$$



Odseknutý prediktor

$$\tilde{X}_{n+m} = - \sum_{j=1}^{m-1} \pi_j \tilde{X}_{n+m-j} - \sum_{j=m}^{\infty} \pi_j X_{n+m-j}$$

$$\tilde{X}_{n+m}^n = - \sum_{j=1}^{m-1} \pi_j \tilde{X}_{n+m-j}^n - \sum_{j=m}^{n+m-1} \pi_j X_{n+m-j}.$$

- Táto aproximácia je presná pre AR(p), keď $n \geq p$, pretože $\pi_j = 0$ pre $j > p$. Vo všeobecnosti, toto je dobrá aproximácia v prípade, že π_j konvergujú rýchlo k nule.



Odseknutý prediktor

$$\tilde{X}_{n+m} = - \sum_{j=1}^{m-1} \pi_j \tilde{X}_{n+m-j} - \sum_{j=m}^{\infty} \pi_j X_{n+m-j}$$

$$\tilde{X}_{n+m}^n = - \sum_{j=1}^{m-1} \pi_j \tilde{X}_{n+m-j}^n - \sum_{j=m}^{n+m-1} \pi_j X_{n+m-j}.$$

- Táto aproximácia je presná pre AR(p), keď $n \geq p$, pretože $\pi_j = 0$ pre $j > p$. Vo všeobecnosti, toto je dobrá aproximácia v prípade, že π_j konvergujú rýchlo k nule.



Príklad: Predpoveď modelu ARMA(p,q)

- Uvažujme model ARMA(p,q)

$$X_t - \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} = W_t + \sum_{i=1}^q \theta_i W_{t-i}$$

Predpokladajme, že poznáme X_1, X_2, \dots, X_n , a chceme predpovedať X_{n+m} .
Môžeme použiť najlepšiu lineárnu predikciu X_{n+m}^n .



Príklad: Predpoveď modelu ARMA(p,q)

- Uvažujme model ARMA(p,q)

$$X_t - \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} = W_t + \sum_{i=1}^q \theta_i W_{t-i}$$

Pre model AR(p), teda $q=0$, môžeme priamo napísať koeficienty ϕ_n , v opačnom prípade musíme riešiť lineárnu sústavu $n \times n$.

Ak n je veľké, odseknutá predpoveď \tilde{X}_{n+m}^n dáva dobrú aproximáciu. Aby sme ju vypočítali, vypočítame π_i a odsekneme.

Existuje však metóda vyžadujúca počet operácií

$$O((n+m)(p+q))$$



Rekurzívna odseknutá predpoveď modelu ARMA(p,q)

$$\tilde{W}_t^n = 0 \quad \text{for } t \leq 0. \quad \tilde{X}_t^n = \begin{cases} 0 & \text{for } t \leq 0, \\ X_t & \text{for } 1 \leq t \leq n. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \tilde{W}_t^n = \tilde{X}_t^n - \phi_1 \tilde{X}_{t-1}^n - \dots - \phi_p \tilde{X}_{t-p}^n \\ - \theta_1 \tilde{W}_{t-1}^n - \dots - \theta_q \tilde{W}_{t-q}^n \quad \text{for } t = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

$$\tilde{W}_t^n = 0 \quad \text{for } t > n.$$

$$\begin{aligned} \tilde{X}_t^n = \phi_1 \tilde{X}_{t-1}^n + \dots + \phi_p \tilde{X}_{t-p}^n + \theta_1 \tilde{W}_{t-1}^n + \dots + \theta_q \tilde{W}_{t-q}^n \\ \text{for } t = n + 1, \dots, n + m. \end{aligned}$$



Opakovanie: Modelovanie časových radov a predpovedanie

- Vykreslíme časový rad. Pozreme na trend, sezónne zložky, zlomy, outliersy.
- Transformujeme údaje tak, že reziduá sú stacionárne
 - odstránením trend a sezónne zložky;
 - diferencovaním;
 - nelineárnou transformáciou (logaritmovanie, odmocnina).



Opakovanie: Modelovanie časových radov a predpovedanie

- Prispôsobíme model reziduám.
- Predpovedáme časový rad pomocou predpovede reziduí a inverziou všetkých transformácií



Opakovanie: Modelovanie časových radov a predpovedanie

- Stacionárne modely časových radov: ARMA(p,q).
 - p=0: MA(q)
 - q=0: AR(p)
- Videli sme, že každý kauzálny a invertovateľný lineárny proces má
 - reprezentáciu $MA(\infty)$ (z kauzality)
 - reprezentáciu $AR(\infty)$ (z invertovateľnosti)



Modelovanie časových radov a predpovedanie

- Reálne dáta nemôžu byť *presne* modelované použitím konečného počtu parametrov
- Zvolíme p a q tak, aby sme dostali jednoduchý ale vhodný model.



Modelovanie časových radov a predpovedanie

- Ako použijeme dáta na určenie p a q ?
 - Použijeme výberovú ACF a PACF na predbežný výber rádu modelu.
 - Odhadneme parametre modelu pre každý výber rádu modelu.
 - Porovnáme prediktívnu presnosť /komplexnosť každého z nich (napríklad použitím informačných kritérií)



Modelovanie časových radov a predpovedanie

■ *Poznámka:*

Potrebuje vypočítať odhady parametrov pre niekoľko rôznych rádov modelu.

Teda, rekurzívne algoritmy na odhady parametrov sú dôležité.

Uvidíme, že niektoré z nich sú identické s rekurzívnymi algoritmami na výpočet predpovedí.



Modelovanie časových radov a predpovedanie

■ *Model*

ACF

PACF

□ MA(q)

nulová pre $|h| > q$

exponenciálny
pokles

□ AR(p)

exponenciálny
pokles

nulová pre $|h| > p$

□ ARMA(p,q)

exponenciálny
pokles

exponenciálny
pokles



Odhad parametrov

- Chceme odhadnúť parametre modelu ARMA(p, q). Budeme (teraz) predpokladať, že
 - rád modelu (p a q) je známy;
 - dáta majú nulovú strednú hodnotu.



Odhad parametrov

- Ak druhý predpoklad nie je splnený, môžeme od dát odrátať výberový priemer \bar{y} , identifikovať pre údaje

$$X_t = Y_t - \bar{y}$$

model ARMA $\phi(B)X_t = \theta(B)W_t$

s nulovou strednou hodnotou, a potom použiť $X_t + \bar{y}$ ako model pre Y_t



Odhad parametrov: metóda maximálnej vierohodnosti

- Jeden z prístupov: Predpokladáme, že $\{X_t\}$ je gaussovský proces, teda platí

$$\phi(B)X_t = \theta(B)W_t$$

kde W_t je i.i.d. z $N(0, \sigma^2)$



Odhad parametrov: metóda maximálnej vierohodnosti

- Zvolíme ϕ_i, θ_j tak, aby sme maximalizovali *vierohodnosť*:

$$L(\phi, \theta, \sigma^2) = f(X_1, \dots, X_n)$$

kde f je združená (gaussovská) hustota pre daný ARMA model.

Teda: volíme také parametre, ktoré maximalizujú pravdepodobnosť dát.



Odhad parametrov: metóda maximálnej vierohodnosti

■ Výhody MLE:

- efektivita – odhady s nízkou varianciou;
- predpoklad gaussovskosti je často zmysluplný;
- hoci aj $\{X_t\}$ nie je gaussovský, asymptotické rozdelenie $(\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\sigma}^2)$ je rovnaké ako v gaussovskom prípade.



Odhad parametrov: metóda maximálnej vierohodnosti

■ Nevýhody MLE:

- ťažký optimalizačný problém;
- potreba voľby vhodného štartovacieho bodu pre iterácie.



Metóda maximálnej vierohodnosti

- Predpokladajme, že X_1, X_2, \dots, X_n sú generované procesom ARMA(p,q) s nulovou strednou hodnotou.

Vierohodnosť parametrov

$$\phi \in \mathbb{R}^p, \theta \in \mathbb{R}^q, \sigma_w^2 \in \mathbb{R}_+$$

je definovaná ako hustota $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$ Gaussovho modelu s týmito parametrami

$$L(\phi, \theta, \sigma_w^2) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Gamma_n|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} X' \Gamma_n^{-1} X\right)$$



Metóda maximálnej vierohodnosti

- Tu $|A|$ označuje determinat matice A a Γ_n je variančno-kovariančná matica X . Estimátor maximálnej vierohodnosti pre ϕ, θ, σ_w^2 maximalizuje túto hodnotu.
- Výraz pre maximálnu vierohodnosť môžeme zjednodušiť, ak si ho vyjadríme pomocou inovácií.



Metóda maximálnej vierohodnosti

- Pretože inovácie sú lineárne v predchádzajúcej a aktuálnej hodnote, môžeme písať:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}}_X = C \underbrace{\begin{pmatrix} X_1 - X_1^0 \\ \vdots \\ X_n - X_n^{n-1} \end{pmatrix}}_U$$

kde C je dolná trojuholníková matica s jednotkami na diagonále, pričom pre varianciu oboch strán platí $\Gamma_n = CDC'$, kde

$$D = \text{diag}(P_1^0, \dots, P_n^{n-1})$$



Metóda maximálnej vierohodnosti

■ Teda, $|\Gamma_n| = |C|^2 P_1^0 \cdots P_n^{n-1} = P_1^0 \cdots P_n^{n-1}$ a

$$X' \Gamma_n^{-1} X = U' C' \Gamma_n^{-1} C U = U' C' C^{-T} D^{-1} C^{-1} C U = U' D^{-1} U$$

takže vierohodnosť môžeme prepísať

$$\begin{aligned} L(\phi, \theta, \sigma_w^2) &= \frac{1}{((2\pi)^n P_1^0 \cdots P_n^{n-1})^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (X_i - X_i^{i-1})^2 / P_i^{i-1}\right) \\ &= \frac{1}{((2\pi \sigma_w^2)^n r_1^0 \cdots r_n^{n-1})^{1/2}} \exp\left(-\frac{S(\phi, \theta)}{2\sigma_w^2}\right), \end{aligned}$$

kde $r_i^{i-1} = P_i^{i-1} / \sigma_w^2$ a $S(\phi, \theta) = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - X_i^{i-1})^2}{r_i^{i-1}}$



Metóda maximálnej vierohodnosti

- Logaritmus vierohodnosti ϕ, θ, σ_w^2 je

$$\begin{aligned}l(\phi, \theta, \sigma_w^2) &= \log(L(\phi, \theta, \sigma_w^2)) \\ &= -\frac{n}{2} \log(2\pi\sigma_w^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log r_i^{i-1} - \frac{S(\phi, \theta)}{2\sigma_w^2}\end{aligned}$$

Diferencovaním podľa σ_w^2 dostávame, že
MLE(ϕ, θ, σ_w^2) vyhovuje

$$\frac{n}{2\hat{\sigma}_w^2} = \frac{S(\hat{\phi}, \hat{\theta})}{2\hat{\sigma}_w^4} \Leftrightarrow \hat{\sigma}_w^2 = \frac{S(\hat{\phi}, \hat{\theta})}{n}$$

a $\hat{\phi}, \hat{\theta}$ minimalizujú

$$\log \left(\frac{S(\hat{\phi}, \hat{\theta})}{n} \right) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log r_i^{i-1}$$



Metóda maximálnej vierohodnosti

- Minimalizáciu prevádzame numericky, napríklad Newtonovou – Raphsonovou metódou
- Výpočtové zjednodušenia:
 - Nepodmienené najmenšie štvorce – vynechaním $\log r_i^{i-1}$
 - Podmienené najmenšie štvorce – vynechaním začiatočných členov v S



Metóda maximálnej vierohodnosti: intervaly spoľahlivosti

- Pre procesy ARMA(p,q), MLE a estimátory podmienených / nepodmienených najmenších štvorcov vyhovujú

$$\begin{pmatrix} \hat{\phi} \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \phi \\ \theta \end{pmatrix} \sim AN \left(0, \frac{\sigma_w^2}{n} \begin{pmatrix} \Gamma_{\phi\phi} & \Gamma_{\phi\theta} \\ \Gamma_{\theta\phi} & \Gamma_{\theta\theta} \end{pmatrix}^{-1} \right)$$

kde $\begin{pmatrix} \Gamma_{\phi\phi} & \Gamma_{\phi\theta} \\ \Gamma_{\theta\phi} & \Gamma_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \text{Cov}((X, Y), (X, Y))$

$$X = (X_1, \dots, X_p)' \quad \phi(B)X_t = W_t,$$

$$Y = (Y_1, \dots, Y_p)' \quad \theta(B)Y_t = W_t.$$



Predbežný odhad parametrov

- Použitie Yuleho – Walkerovej metódy pre $AR(p)$ – Durbinov – Levinsonov algoritmus s $\hat{\gamma}$ namiesto γ .
- Použitie Yuleho – Walkerovej metódy pre $ARMA(p,q)$
- Algoritmus inovácií pre $MA(q)$
- Hannanov – Rissanenov algoritmus pre $ARMA(p,q)$



Predbežný odhad parametrov

■ Použitie metódy Yule – Walker pre AR (p):

- urobíme regresiu X_t na $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p}$;
- použijeme Durbinov-Levinsonov algoritmus s použitím $\hat{\gamma}$ namiesto γ .



Yuleho – Walkerov estimátor

- Pre kauzálny model AR(p) v tvare

$$\phi(B)X_t = W_t$$

máme

$$E \left(X_{t-i} \left(X_t - \sum_{j=1}^p \phi_j X_{t-j} \right) \right) = E(X_{t-i} W_t)$$

pre $i = 0, \dots, p$ | čo je vtedy a len vtedy, ak

$$\begin{aligned} \gamma(0) - \phi' \gamma_p &= \sigma^2 \\ \gamma_p - \Gamma_p \phi &= 0, \end{aligned}$$



Yuleho – Walkerov estimátor

kde $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_p)'$ a kde sme použili
kauzálnu reprezentáciu

$$X_t = W_t + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j W_{t-j}$$



Predbežný odhad parametrov

- Použitie Yuleho – Walkerovej metódy pre AR(p)
- Použitie Yuleho – Walkerovej metódy pre ARMA(p,q) – Metóda momentov (neefektívna)
- Algoritmus inovácií pre MA(q)
- Hannanov – Rissanenov algoritmus pre ARMA(p,q)



Yuleho – Walkerov estimátor

- **Metóda momentov** - zvolíme parametre, pre ktoré sú momenty rovné empirickým momentom. V tomto prípade zvolíme ϕ tak, že $\gamma = \hat{\gamma}$

Yuleho-Walkerove rovnice pre $\hat{\phi}$ majú tvar:

$$\begin{cases} \hat{\Gamma}_p \hat{\phi} = \hat{\gamma}_p, \\ \hat{\sigma}^2 = \hat{\gamma}(0) - \hat{\phi}' \hat{\gamma}_p \end{cases}$$

Toto sú predpovedné rovnice.

Môžeme použiť aj Durbinov – Levinsonov algoritmus



Niekoľko faktov o Yuleho – Walkerovom estimátore

- Ak $\hat{\gamma}(0) > 0$, tak $\hat{\Gamma}_m$ je nonsingulárna.
- V takomto prípade, $\hat{\phi} = \hat{\Gamma}_p^{-1} \gamma_p$ definuje kauzálny model

$$X_t - \hat{\phi}_1 X_{t-1} - \cdots - \hat{\phi}_p X_{t-p} = W_t, \quad \{W_t\} \sim WN(0, \hat{\sigma}^2)$$



Niekoľko faktov o Yuleho – Walkerovom estimátore

- Ak $\{X_t\}$ je proces AR(p), tak

$$\hat{\phi} \sim AN \left(\phi, \frac{\sigma^2}{n} \Gamma_p^{-1} \right), \quad \hat{\sigma}^2 \xrightarrow{P} \sigma^2.$$

$$\hat{\phi}_{hh} \sim AN \left(0, \frac{1}{n} \right) \quad \text{for } h > p.$$

teda, môžeme použiť výberovú PACF na testovanie rádu AR, rovnako ako môžeme vypočítať približný interval spoľahlivosti pre parametre ϕ .



Yuleho – Walkerov estimátor: Interval spoľahlivosti

■ Ak $\{X_t\}$ je proces AR(p), a n je veľké, tak

□ $\sqrt{n}(\hat{\phi}_p - \phi_p) \sim N(0, \hat{\sigma}^2 \hat{\Gamma}_p^{-1})$

□ s pravdepodobnosťou blízkou $1 - \alpha$ ležia ϕ_{pj} v intervale

$$\hat{\phi}_{pj} \pm \Phi_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \left(\hat{\Gamma}_p^{-1} \right)_{jj}^{1/2}$$

kde: $\Phi_{1-\alpha/2}$ je $1 - \alpha/2$ kvantil $N(0,1)$



Yuleho – Walkerov estimátor: Interval spoľahlivosti

■ Ak $\{X_t\}$ je proces AR(p), a n je veľké, tak

□ s pravdepodobnosťou blízkou $1 - \alpha$ leží $\hat{\phi}_p$ v elipse $\left\{ \phi \in \mathbb{R}^p : (\hat{\phi}_p - \phi)' \hat{\Gamma}_p (\hat{\phi}_p - \phi) \leq \frac{\hat{\sigma}_w^2}{n} \chi_{1-\alpha}^2(p) \right\}$

kde $\chi_{1-\alpha}^2(p)$ je $(1 - \alpha)$ kvantil rozdelenia χ^2 s p stupňami voľnosti.

Aby sme to videli, všimnime si:

$$\text{Var} \left(\Gamma_p^{1/2} (\hat{\phi}_p - \phi_p) \right) = \Gamma_p^{1/2} \text{var}(\hat{\phi}_p - \phi_p) \Gamma_p^{1/2} = \frac{\sigma_w^2}{n} I.$$

Teda, $v = \Gamma_p^{1/2} (\hat{\phi}_p - \phi_p) \sim N(0, \hat{\sigma}_w^2/nI)$

Odtiaľ $\frac{n}{\hat{\sigma}_w^2} v'v \sim \chi^2(p)$



Predbežný odhad parametrov

- Použitie Yuleho – Walkerovej metódy pre AR(p)
- Použitie Yuleho – Walkerovej metódy pre ARMA(p,q) – Metóda momentov (neefektívna)
- Algoritmus inovácií pre MA(q)
- Hannanov – Rissanenov algoritmus pre ARMA(p,q)



Yuleho – Walkerov estimátor pre ARMA(p,q)

- Je možné definovať analogický estimátor aj pre modely ARMA(p,q) s $q > 0$:

$$\hat{\gamma}(j) - \phi_1 \hat{\gamma}(j-1) - \dots - \phi_p \hat{\gamma}(j-p) = \sigma^2 \sum_{i=j}^q \theta_i \psi_{i-j}$$

kde $\psi(B) = \theta(B)/\phi(B)$

Vzhľadom na nezávislosť ψ_{i_j} , rovnice sú nelineárne v premenných ϕ_i, θ_i , takže riešenie nemusí existovať ani byť jediné. Rovnako, asymptotická efektívnosť tohto estimátora je zlá, má veľmi vysokú variáciu



Efektivita estimátorov

- Nech $\hat{\phi}^{(1)}$ a $\hat{\phi}^{(2)}$ sú dva estimátory, pričom

$$\hat{\phi}^{(1)} \sim AN(\phi, \sigma_1^2), \quad \hat{\phi}^{(2)} \sim AN(\phi, \sigma_2^2)$$

Asymptotickou efektivitou estimátora $\hat{\phi}^{(1)}$ vzhľadom na $\hat{\phi}^{(2)}$ je číslo

$$e\left(\phi, \hat{\phi}^{(1)}, \hat{\phi}^{(2)}\right) = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$$

Ak $e\left(\phi, \hat{\phi}^{(1)}, \hat{\phi}^{(2)}\right) \leq 1$ pre všetky ϕ , tak hovoríme, že $\hat{\phi}^{(2)}$ je efektívnejší estimátor ϕ než $\hat{\phi}^{(1)}$.



Efektivita estimátorov

- Pre procesy $AR(p)$ sú oba estimátory (metóda momentov a maximálnej vierohodnosti) rovnako efektívne
- Pre procesy $MA(q)$ je estimátor momentov menej efektívny než estimátor inovácií a ten je menej nefektívny, než estimátor maximálnej vierohodnosti



Yuleho – Walkerov estimátor: Príklad

■ AR(1): $\gamma(0) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1^2}$

$$\hat{\phi}_1 \sim AN \left(\phi_1, \frac{\sigma^2}{n} \Gamma_1^{-1} \right) = AN \left(\phi_1, \frac{1 - \phi_1^2}{n} \right)$$

■ AR(2):
$$\begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \end{pmatrix} \sim AN \left(\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \frac{\sigma^2}{n} \Gamma_2^{-1} \right)$$

$$\frac{\sigma^2}{n} \Gamma_2^{-1} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 - \phi_2^2 & -\phi_1(1 + \phi_2) \\ -\phi_1(1 + \phi_2) & 1 - \phi_2^2 \end{pmatrix}$$



Yuleho – Walkerov estimátor: Príklad

- Predpokladajme, že $\{X_t\}$ je proces AR(1) a veľkosť súboru n je veľká.

Ak odhadujeme ϕ_1 , tak

$$\text{Var}(\hat{\phi}_1) \approx \frac{1 - \phi_1^2}{n}$$

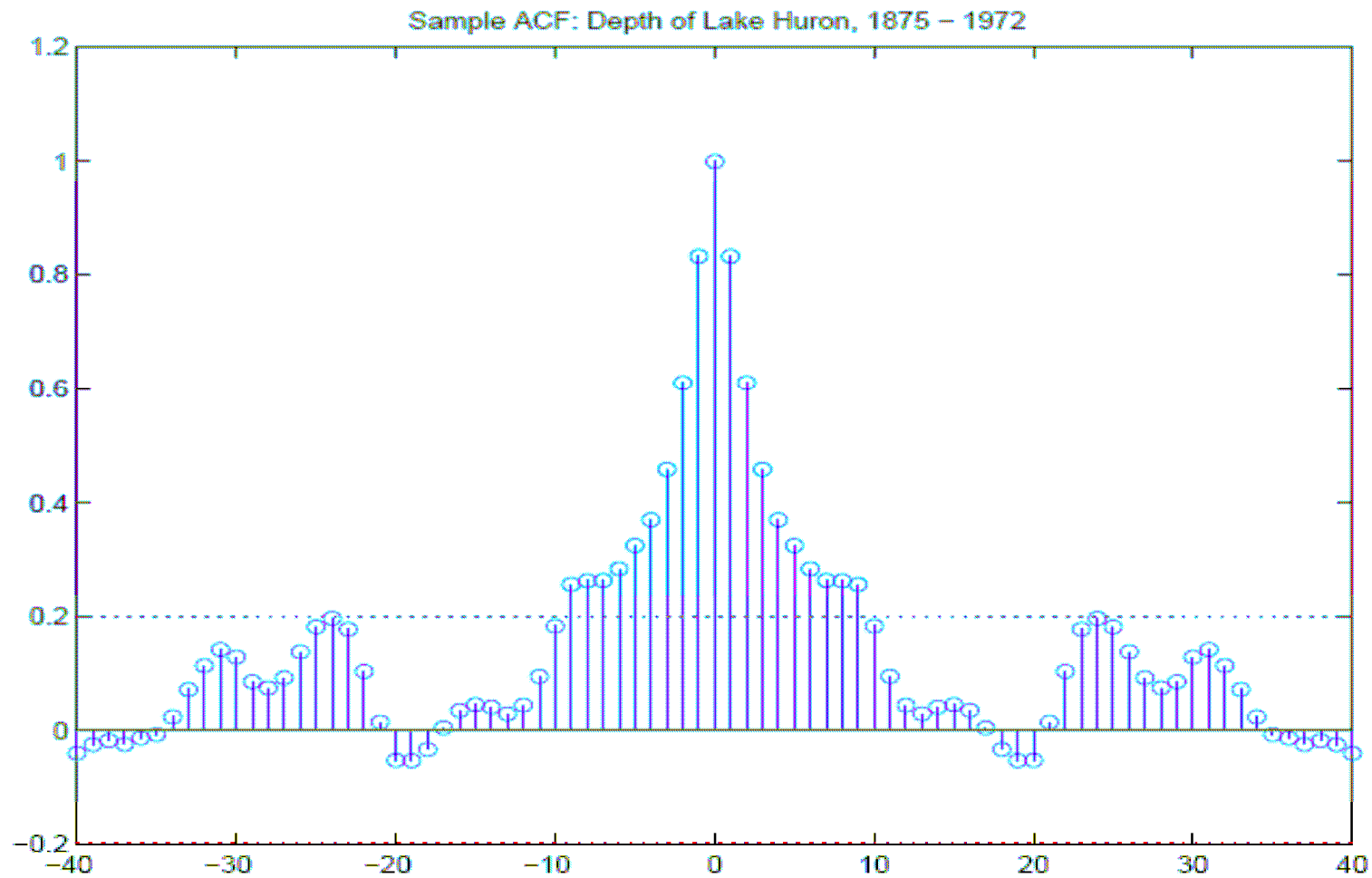
Ak použijeme na AR(1) model vyššieho rádu, napríklad AR(2), tak

$$\text{Var}(\hat{\phi}_1) \approx \frac{1 - \phi_2^2}{n} = \frac{1}{n} > \frac{1 - \phi_1^2}{n}$$

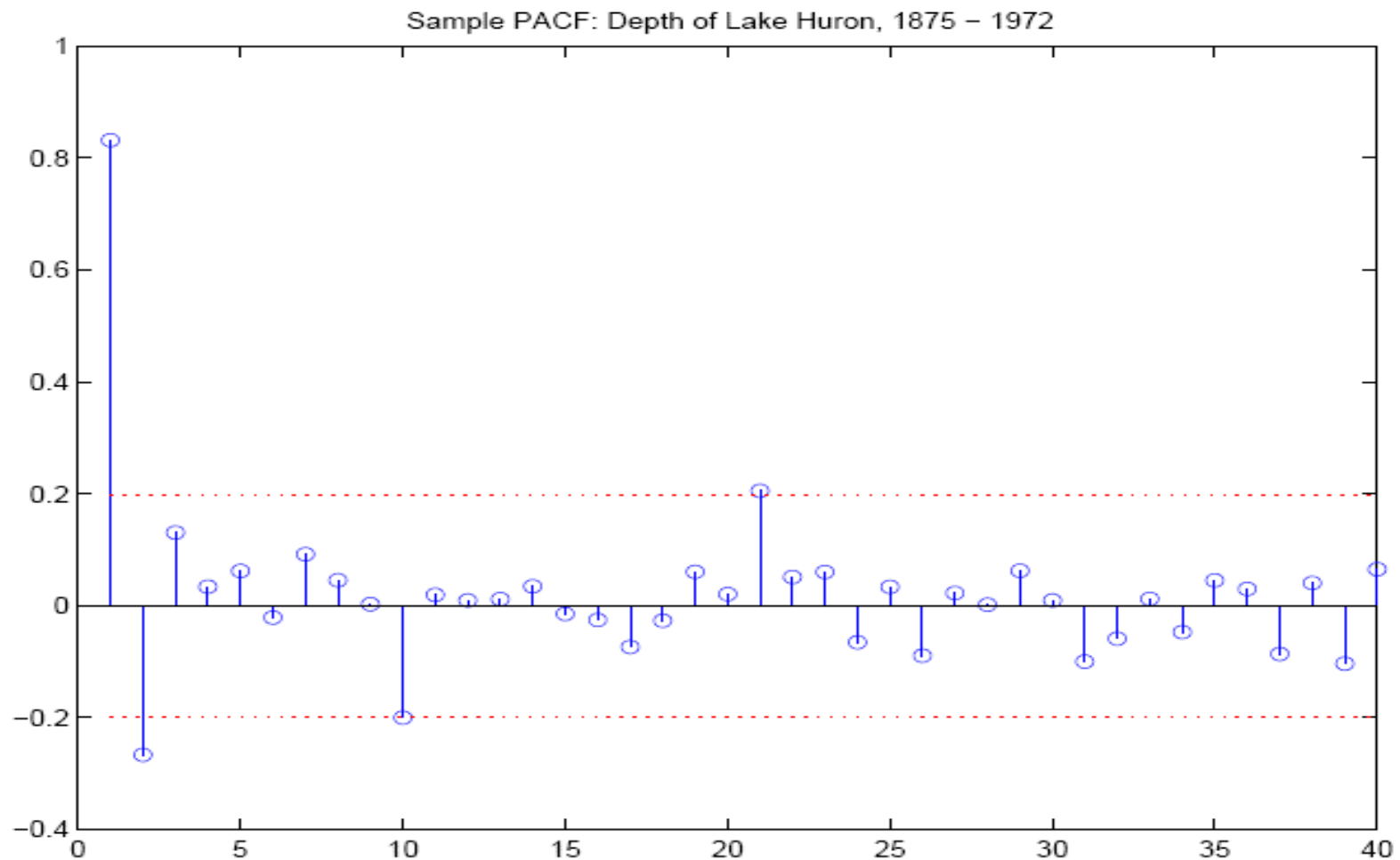
teda, stratili sme efektívnosť.



Yuleho – Walkerov estimátor: Príklad



Yuleho – Walkerov estimátor: Príklad



Yuleho – Walkerov estimátor: Príklad



$$\hat{\Gamma}_2 = \begin{pmatrix} 1.7379 & 1.4458 \\ 1.4458 & 1.7379 \end{pmatrix} \quad \hat{\gamma}_2 = \begin{pmatrix} 1.4458 \\ 1.0600 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\phi}_2 = \hat{\Gamma}_2^{-1} \hat{\gamma}_2 = \begin{pmatrix} 1.0538 \\ -0.2668 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_w^2 = \hat{\gamma}(0) - \hat{\phi}'_2 \hat{\gamma}_2 = 0.4971$$

$$\hat{\phi}_1 \pm \Phi_{1-\alpha/2} \left(\hat{\sigma}_w^2 \hat{\Gamma}_2^{-1} / n \right)_{11}^{1/2} = 1.0538 \pm 0.1908$$

$$\hat{\phi}_2 \pm \Phi_{1-\alpha/2} \left(\hat{\sigma}_w^2 \hat{\Gamma}_2^{-1} / n \right)_{22}^{1/2} = -0.2668 \pm 0.1908$$



Integrované ARMA modely: ARIMA(p,d,q)

■ Definícia.

Hovoríme, že časový rad $\{X_t\}$ je **proces ARIMA(p,d,q)**, ak

$$Y_t = \nabla^d X_t = (1 - B)^d X_t$$

je proces ARMA(p,q).

Môžeme operátorovo písať

$$\phi(B)(1 - B)^d X_t = \theta(B)W_t$$



Integrované ARMA modely: ARIMA(p,d,q)

- Pripomeňme si náhodný chod

$$X_t = X_{t-1} + W_t$$

X_t nie je stacionárny proces, avšak

$$Y_t = (1 - B)X_t = W_t$$

už je. V tomto prípade ide o biely šum, takže $\{X_t\}$ je proces ARIMA(0,1,0).

Rovnako, ak X_t obsahuje lineárnu trendovú zložku a stacionárny proces, jeho prvá diferencia je stacionárna.



Modely ARIMA: príklad

- Predpokladajme, že $\{X_t\}$ je proces ARIMA(0,1,1):

$$X_t = X_{t-1} + W_t - \theta_1 W_{t-1}$$

Ak $|\theta_1| < 1$, tak môžeme ukázať

$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty} (1 - \theta_1) \theta_1^{j-1} X_{t-j} + W_t$$

a
$$\tilde{X}_{n+1} = \sum_{j=1}^{\infty} (1 - \theta_1) \theta_1^{j-1} X_{n+1-j}$$

$$= (1 - \theta_1) X_n + \sum_{j=2}^{\infty} (1 - \theta_1) \theta_1^{j-1} X_{n+1-j}$$

$$= (1 - \theta_1) X_n + \theta_1 \tilde{X}_n.$$

Sú to exponenciálne vážené kĺzavé priemery



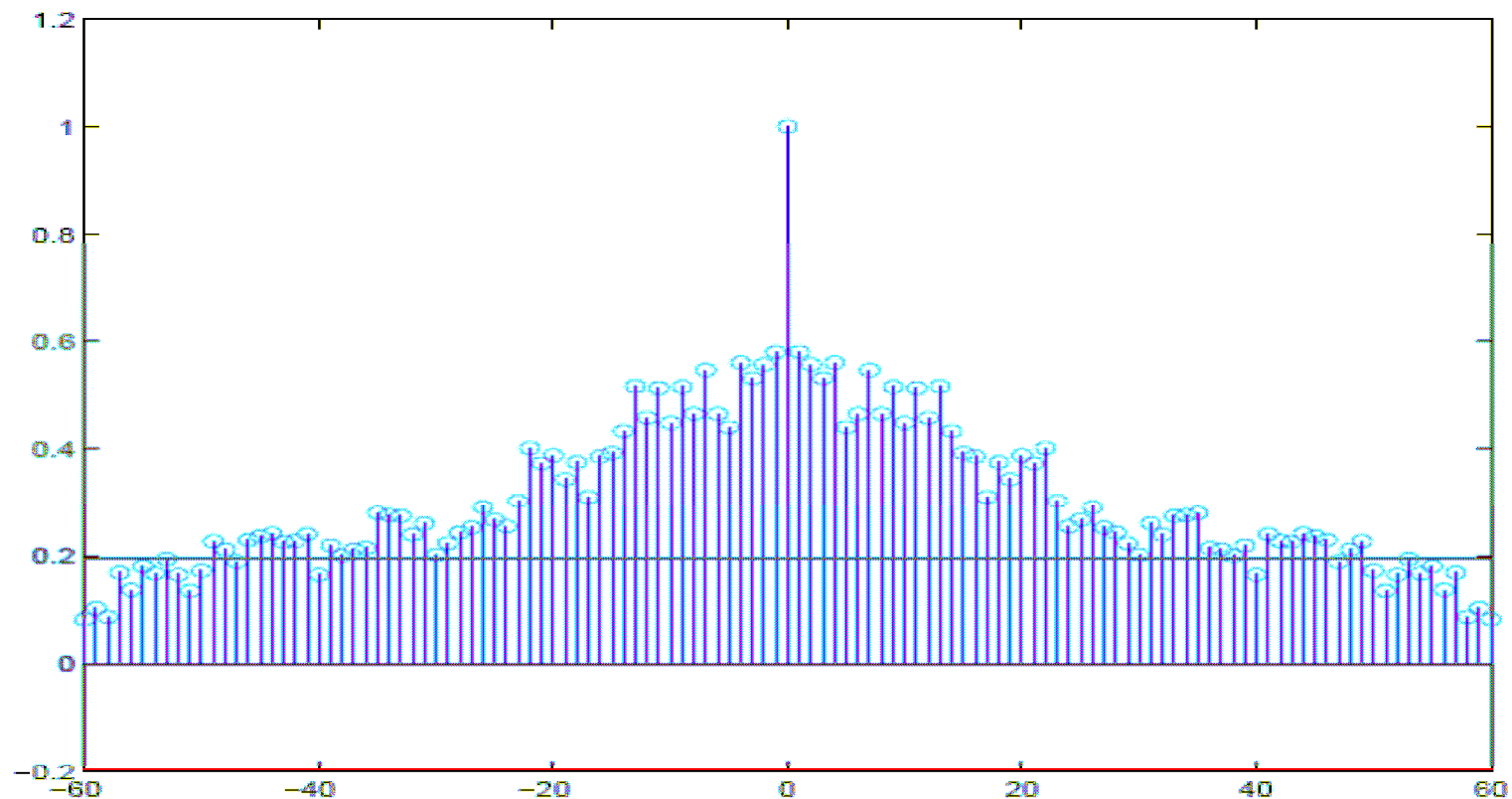
Modely ARIMA: tvorba

- Vykreslíme časový rad. Pozreme na trend, sezónne zložky, zlomy, outliersy.
- Transformujeme údaje tak, že reziduá sú stacionárne
- Identifikujeme predbežné hodnoty d , p a q
- Odhadneme parametre
- Použijeme diagnostiku na potvrdenie, že reziduá sú bielym šumom.
- Stanovíme model



Identifikácia predbežnej hodnoty d : Výberová ACF

- Trendy sú vyjadrené pomalým poklesom výberovej ACF



Identifikácia predbežných hodnôt d , p a q

- Na identifikovanie predbežnej hodnoty d zvyčajne postačí vykreslenie časového radu
 - ak diferencujeme málo – rad ostane nestacionárny
 - ak diferencujeme veľa – vznikne nová závislosť



Identifikácia predbežných hodnôt d , p a q

- Na identifikovanie predbežnej hodnoty p a q použijeme výberovú ACF a PACF radu

$M(1 - B)^d X_t$	ACF	PACF
□ MA(q)	nulová pre $ h > q$	exponenciálny pokles
□ AR(p)	exponenciálny pokles	nulová pre $ h > p$
□ ARMA(p,q)	exponenciálny pokles	exponenciálny pokles



Diagnostika

■ Ako skontrolujeme kvalitu modelu?

- rezíduá (inovácie, $x_t - \hat{x}_t^{t-1}$) majú byť bielym šumom

Uvažujme *standardizované* inovácie

$$e_t = \frac{x_t - \hat{x}_t^{t-1}}{\sqrt{\hat{P}_t^{t-1}}}$$

Tieto sa majú správať ako i.i.d. rad s nulovou strednou hodnotou a jednotkovou varianciou



Diagnostika

■ Ako skontrolujeme kvalitu modelu?

- rezíduá (inovácie, $x_t - x_t^{t-1}$) majú byť bielym šumom, preto
 - Skontrolujeme graf rezíduí
 - Použijeme test bodu otočenia
 - Použijeme test znamienka zmeny
 - Použijeme test rozsahu
 - Q-Q plot, histogram, normalita



Stanovenie modelu

- Predstavme si, že sme použili dáta x na odhad parametrov v niekoľkých modeloch. Modely sú vybraté dobre (rezíduá sú bielym šumom). Potrebujeme z nich zvolit' jediný model, ktorý použijeme na predikciu. Ako to urobíme?



Stanovenie modelu

- Ak máme prístup k nezávislým dátam y z toho istého procesu, môžeme porovnať vierohodnosť $L_y(\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\sigma}_w^2)$
- Môžeme získať y vynechaním niektorých dát z dát, pomocou ktorých sme budovali model a rezervovať ich na overenie modelu. Tento proces voláme *krížová validácia* modelu.



Stanovenie modelu: AIC

- Vierohodnosť môžeme aproximovať asymptoticky pomocou opraveného Akaikeho informačného kritéria AIC_c :

$$-\ln L_y(\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\sigma}_w^2) \approx -\ln L_y(\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\sigma}_w^2) + \frac{(p+q+1)n}{n-p-q-2}$$

- Všimnite si:
 - Viac parametrov vedie k vyššej penalizácii
 - Minimalizovanie kritéria cez všetky hodnoty $p, q, \hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\sigma}_w^2$ zodpovedá výberu optimálneho $\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\sigma}_w^2$ pre každé p, q , a následnému porovnaniu penalizovaných vierohodností



Čisto sezónne modely ARMA

■ Definícia.

Hovoríme, že časový rad $\{X_t\}$ je **proces ARIMA(P,Q)_s**, ak $\Phi(B^s)X_t = \Theta(B^s)W_t$, kde

$$\begin{aligned}\Phi(B^s) &= 1 - \sum_{j=1}^P \Phi_j B^{js}, \\ \Theta(B^s) &= 1 + \sum_{j=1}^Q \Theta_j B^{js}.\end{aligned}$$

Proces je *kauzálny*, ak korene $\Phi(z^s)$ ležia mimo jednotkového kruhu.

Proces je *invertovateľný*, ak korene $\Theta(z^s)$ ležia mimo jednotkového kruhu.



Čisto sezónne modely ARMA: Príklad

$$P = 0, Q = 1, s = 12. X_t = W_t + \Theta_1 W_{t-12}.$$

$$\gamma(0) = (1 + \Theta_1^2) \sigma_w^2,$$

$$\gamma(12) = \Theta_1 \sigma_w^2,$$

$$\gamma(h) = 0 \quad \text{for } h = 1, 2, \dots, 11, 13, 14, \dots$$



Čisto sezónne modely ARMA: Príklad

$$P = 1, Q = 0, s = 12. X_t = \Phi_1 X_{t-12} + W_t.$$

$$\gamma(0) = \frac{\sigma_w^2}{1 - \Phi_1^2},$$

$$\gamma(12i) = \frac{\sigma_w^2 \Phi_1^i}{1 - \Phi_1^2},$$

$$\gamma(h) = 0 \quad \text{for other } h.$$



Nabudúce



Nabudúce

- Integrované ARMA modely(?)
- Sezónne ARMA modely(?)
- Spektrálna analýza

