

Časové rady

Ján Pekár
Prednáška 7

Spektrálna analýza

Obsah prednášky

- Spektrálna analýza
- Príklady
- Lineárne filtre
- Frekvenčná odozva lineárnych filtrov
- Spektrálne odhady
- Diskrétne Fourierova transformácia a periodogram



Spektrálna analýza

- Myšlienka: Rozložiť stacionárny časový rad $\{X_t\}$ do kombinácie sínusoíd s náhodnými (a nekorelovanými) koeficientami
- Podobne, ako pri Fourierovej analýze rozložíme (deterministické) funkcie do kombinácie sínusíd
- Tento postup poznáme ako „spektrálnu analýzu“ alebo „frekvenčnú analýzu“ ako protiklad časovej analýzy, ktorú sme používali doteraz



Spektrálna analýza

- Frekvenčná analýza predpokladá regresiu na sínusoidoch, kým časová analýza predpokladá regresiu na minulých hodnotách časového radu.



Periodické časové rady

■ Uvažujme

$$X_t = A \sin(2\pi\nu t) + B \cos(2\pi\nu t)$$

kde A , B sú nekorelované s nulovou strednou hodnotou a varianciou σ^2 .

Využijúc $C^2 = A^2 + B^2$ a $\tan \phi = B/A$ môžeme

$$\begin{aligned} X_t &= C \cos \phi \sin(2\pi\nu t) + C \sin \phi \cos(2\pi\nu t) \\ &= C \sin(2\pi\nu t + \phi). \end{aligned}$$

Z toho dostávame, že $A^2 + B^2$ určuje amplitúdu a B/A určuje fázu



Periodické časové rady

■ Pre $X_t = A \sin(2\pi\nu t) + B \cos(2\pi\nu t)$ s nekorelovanými A, B má sínusoidnú autokovarianciu $\gamma(h) = \cos(2\pi\nu h)$

Autokovariancia súčtu dvoch nekorelovaných časových radov je súčet ich autokovariancií, teda

$$X_t = \sum_{j=1}^k (A_j \sin(2\pi\nu_j t) + B_j \cos(2\pi\nu_j t))$$

$$\gamma(h) = \sum_{j=1}^k \sigma_j^2 \cos(2\pi\nu_j h),$$

kde A_j, B_j sú nekorelované, s nulovou strednou hodnotou a $\text{Var}(A_j) = \text{Var}(B_j) = \sigma_j^2$



Periodické časové rady

■ Máme $X_t = A \sin(2\pi\nu t) + B \cos(2\pi\nu t)$

$$\gamma(h) = \sum_{j=1}^k \sigma_j^2 \cos(2\pi\nu_j h)$$

Teda, môžeme $\gamma(h)$ reprezentovať pomocou Fourierovho radu.

Koeficientmi sú variancie sínusoidných zložiek.

Spektrálna hustota je spojitou analógiou – Fourierovou transformáciou γ



Periodické časové rady

- Analogická spektrálna reprezentácia stacionárneho procesu X_t zahŕňa stochastický integrál – súčet diskretných zložiek v konečnom počte frekvencií v špeciálnom prípade.



Periodické časové rady

- Náhodný sinusoid $X_t = A \sin(2\pi\nu t) + B \cos(2\pi\nu t)$ máme

$$\mu_t = E[X_t] = 0$$

$$\begin{aligned}\gamma(t, t+h) &= \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) \\ &= \sin(2\pi\nu t) \sin(2\pi\nu(t+h)) + \cos(2\pi\nu t) \cos(2\pi\nu(t+h)) \\ &= \cos(2\pi\nu t - 2\pi\nu(t+h)) \\ &= \cos(2\pi\nu h).\end{aligned}$$

teda, $\{X_t\}$ je stacionárny časový rad, hoci stále neplatí $\sum_h |\gamma(h)| < \infty$.



Spektrálna hustota

- Ak časový rad $\{X_t\}$ má autokovarianciu, ktorá spĺňa predpoklad

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma(h)| < \infty$$

tak môžeme definovať spektrálnu hustotu

$$f(\nu) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) e^{-2\pi i \nu h}$$

pre $-\infty < \nu < \infty$



Spektrálna hustota: niekoľko skutočností

■ Rad $\sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) e^{-2\pi i \nu h}$ |
absolútne konverguje.

Toto vyplýva z

$$|e^{i\theta}| = |\cos \theta + i \sin \theta| = (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^{1/2} = 1$$

a absolútnej konvergencie γ



Spektrálna hustota: niekoľko skutočností

- Funkcia f je periodická s periódou 1. Toto vyplýva z toho, že $e^{-2\pi i\nu h}$ je periodickou funkciou ν s periódou 1. Teda, definičný obor f môžeme ohraničiť na množinu $-1/2 \leq \nu \leq 1/2$



Spektrálna hustota: niekoľko skutočností

■ Funkcia f je párnou funkciou ($f(\nu) = f(-\nu)$)

Aby sme to videli, tak napíšme

$$f(\nu) = \sum_{h=-\infty}^{-1} \gamma(h) e^{-2\pi i \nu h} + \gamma(0) + \sum_{h=1}^{\infty} \gamma(h) e^{-2\pi i \nu h},$$

$$f(-\nu) = \sum_{h=-\infty}^{-1} \gamma(h) e^{-2\pi i \nu (-h)} + \gamma(0) + \sum_{h=1}^{\infty} \gamma(h) e^{-2\pi i \nu (-h)},$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} \gamma(-h) e^{-2\pi i \nu h} + \gamma(0) + \sum_{h=-\infty}^{-1} \gamma(-h) e^{-2\pi i \nu h}$$

$$= f(\nu).$$



Spektrálna hustota: niekoľko skutočností

■ $f(\nu) \geq 0$

■ $\gamma(h) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i\nu h} f(\nu) d\nu.$

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i\nu h} f(\nu) d\nu &= \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\nu(j-h)} \gamma(j) d\nu \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma(j) \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i\nu(j-h)} d\nu \\ &= \gamma(h) + \sum_{j \neq h} \frac{\gamma(j)}{2\pi i(j-h)} \left(e^{\pi i(j-h)} - e^{-\pi i(j-h)} \right) \\ &= \gamma(h) + \sum_{j \neq h} \frac{\gamma(j) \sin(\pi(j-h))}{\pi(j-h)} = \gamma(h). \end{aligned}$$



Príklad: biely šum

- Pre biely šum $\{W_t\}$ sme videli, že $\gamma(0) = \sigma_w^2$
a $\gamma(h) = 0$ pre $h \neq 0$

Teda
$$f(\nu) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) e^{-2\pi i \nu h} = \gamma(0) = \sigma_w^2.$$

Z toho vyplýva, že spektrálna hustota je konštantná pre všetky frekvencie; každá frekvencia v spektre prispieva rovnakým dielom k variancii. Toto je pôvodom mena biely šum – je ako biele svetlo, ktoré je rovnomernou zmesou všetkých frekvencií vo viditeľnom spektre.



Príklad: AR(1)

■ Pre $X_t = \phi_1 X_{t-1} + W_t$

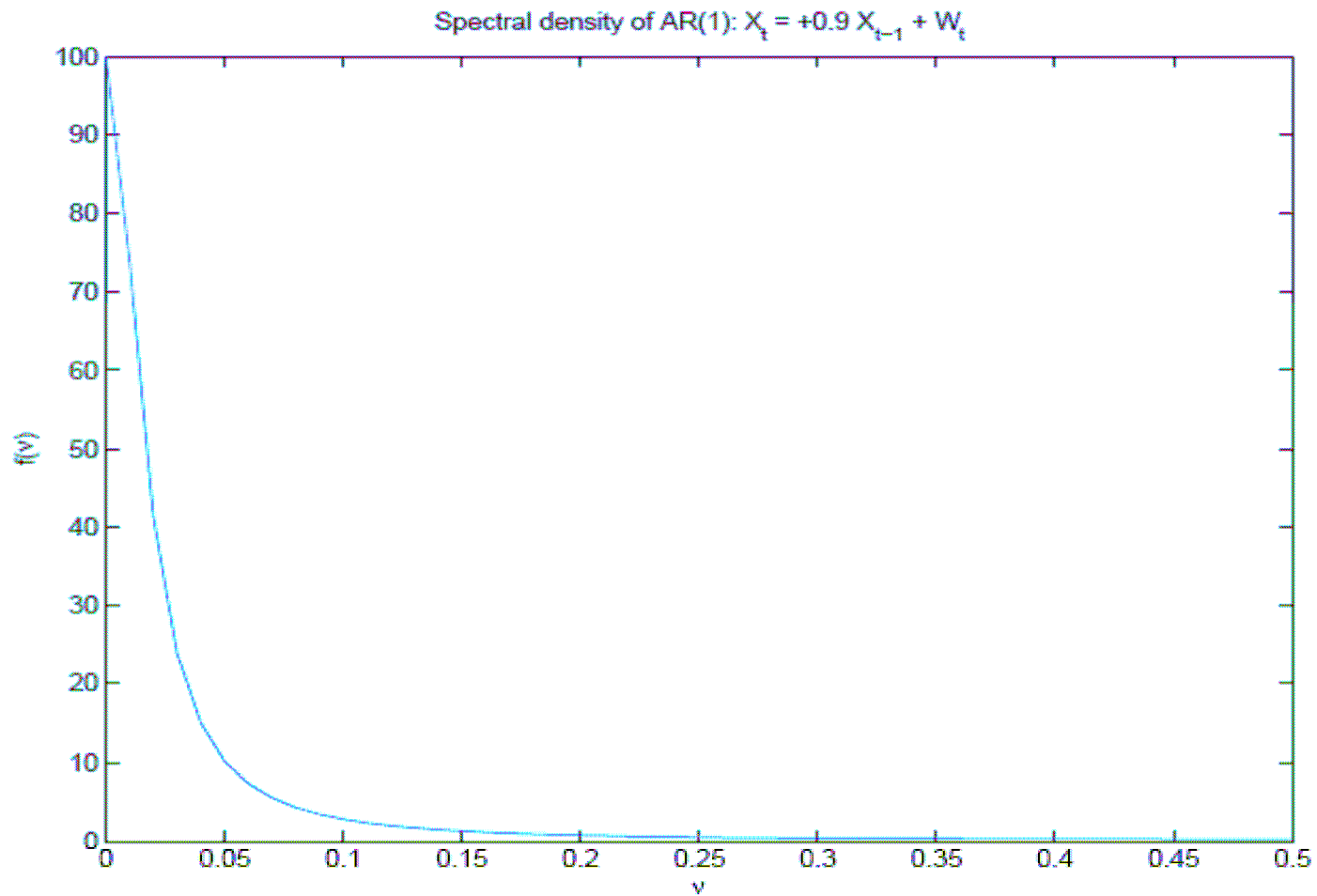
sme ukázali, že $\gamma(h) = \sigma_w^2 \phi_1^{|h|} / (1 - \phi_1^2)$

Teda

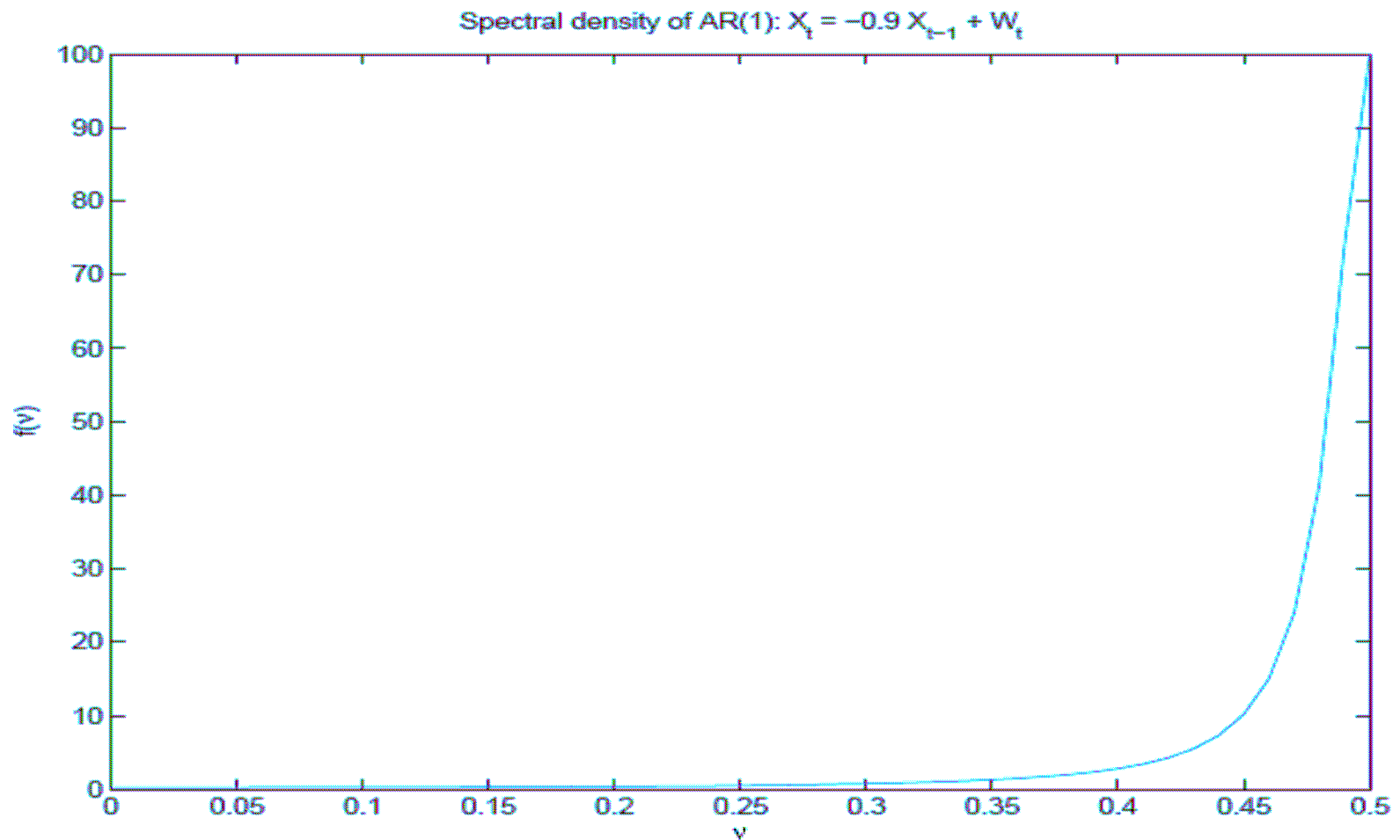
$$\begin{aligned} f(\nu) &= \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) e^{-2\pi i \nu h} = \frac{\sigma_w^2}{1 - \phi_1^2} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \phi_1^{|h|} e^{-2\pi i \nu h} \\ &= \frac{\sigma_w^2}{1 - \phi_1^2} \left(1 + \sum_{h=1}^{\infty} \phi_1^h (e^{-2\pi i \nu h} + e^{2\pi i \nu h}) \right) \\ &= \frac{\sigma_w^2}{1 - \phi_1^2} \left(1 + \frac{\phi_1 e^{-2\pi i \nu}}{1 - \phi_1 e^{-2\pi i \nu}} + \frac{\phi_1 e^{2\pi i \nu}}{1 - \phi_1 e^{2\pi i \nu}} \right) \\ &= \frac{\sigma_w^2}{(1 - \phi_1^2)} \frac{1 - \phi_1 e^{-2\pi i \nu} \phi_1 e^{2\pi i \nu}}{(1 - \phi_1 e^{-2\pi i \nu})(1 - \phi_1 e^{2\pi i \nu})} \\ &= \frac{\sigma_w^2}{1 - 2\phi_1 \cos(2\pi \nu) + \phi_1^2}. \end{aligned}$$



Príklad: AR(1)



Príklad: AR(1)



Príklad: MA(1)

$$X_t = W_t + \theta_1 W_{t-1}.$$

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sigma_w^2 (1 + \theta_1^2) & \text{if } h = 0, \\ \sigma_w^2 \theta_1 & \text{if } |h| = 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(\nu) &= \sum_{h=-1}^1 \gamma(h) e^{-2\pi i \nu h} \\ &= \gamma(0) + 2\gamma(1) \cos(2\pi\nu) \\ &= \sigma_w^2 (1 + \theta_1^2 + 2\theta_1 \cos(2\pi\nu)) \end{aligned}$$



Príklad: MA(1)

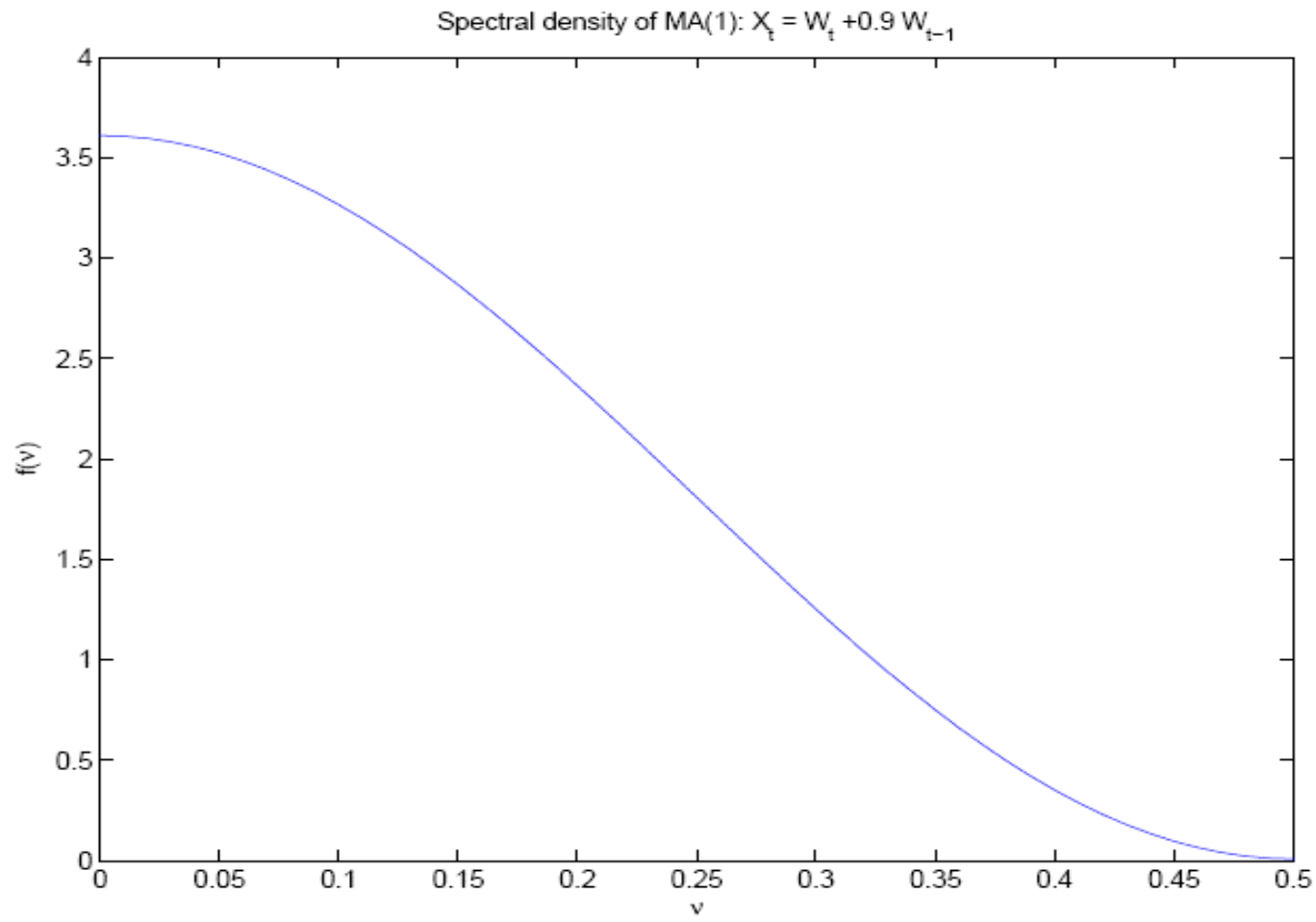
$$X_t = W_t + \theta_1 W_{t-1}.$$

$$f(\nu) = \sigma_w^2 (1 + \theta_1^2 + 2\theta_1 \cos(2\pi\nu))$$

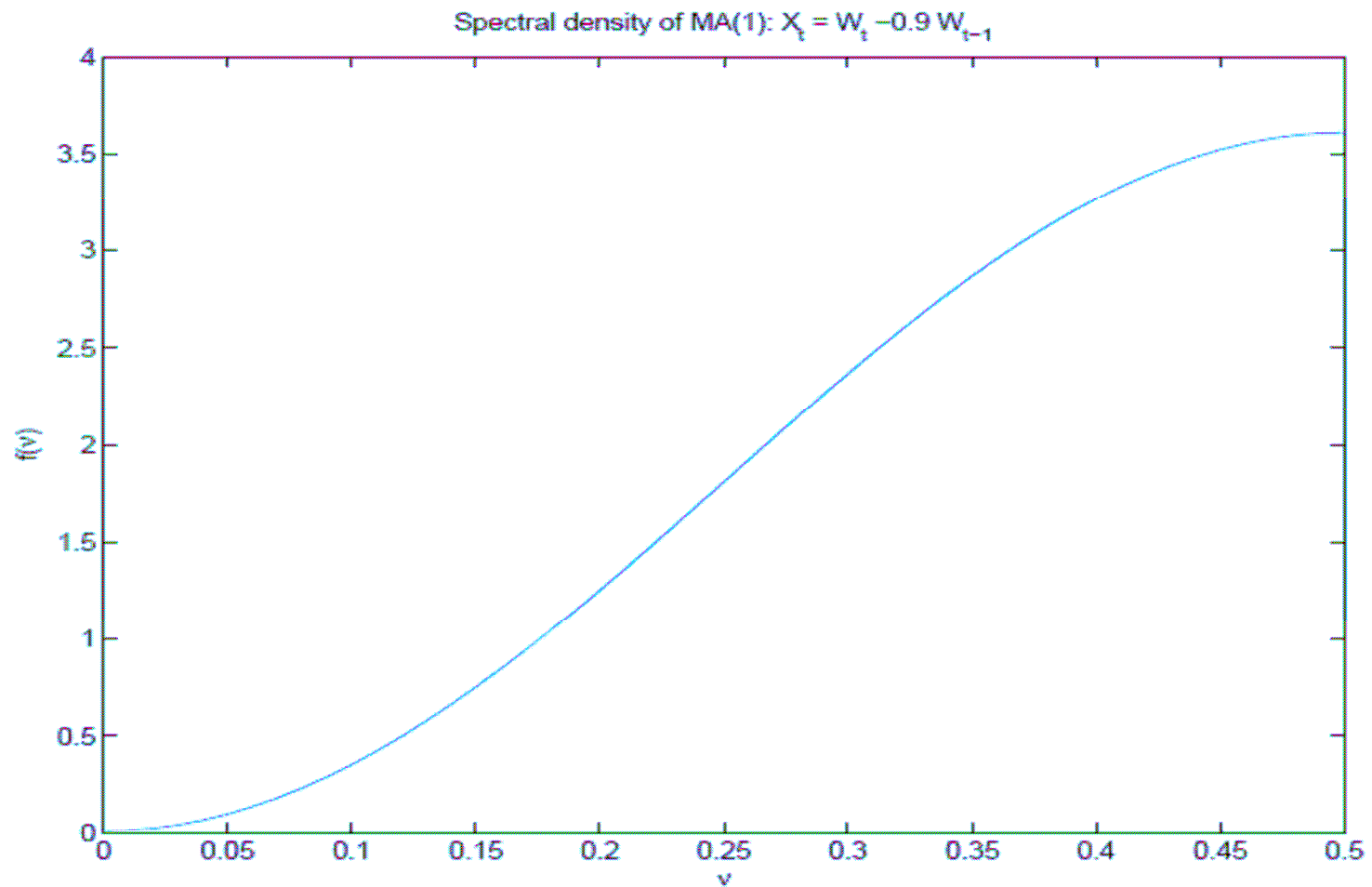
- Ak $\theta_1 > 0$ (kladná autokorelácia), v spektre dominujú zložky nízkych frekvencií
- Ak $\theta_1 < 0$ (záporná autokorelácia), v spektre dominujú zložky vysokých frekvencií



Príklad: MA(1)



Príklad: MA(1)



Opakovanie: Periodické časové rady

$$\begin{aligned} X_t &= \sum_{j=1}^k (A_j \sin(2\pi\nu_j t) + B_j \cos(2\pi\nu_j t)) \\ &= \sum_{j=1}^k (A_j^2 + B_j^2)^{1/2} \sin(2\pi\nu_j t + \tan^{-1}(B_j/A_j)). \end{aligned}$$

$$E[X_t] = 0$$

$$\gamma(h) = \sum_{j=1}^k \sigma_j^2 \cos(2\pi\nu_j h)$$

$$\sum_h |\gamma(h)| = \infty.$$



Diskrétna spektrálna distribučná funkcia

■ Pre $X_t = A \sin(2\pi\lambda t) + B \cos(2\pi\lambda t)$

máme $|\gamma(h) = \sigma^2 \cos(2\pi\lambda h)|$

a môžeme písať

$$\gamma(h) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i\nu h} dF(\nu)$$

kde F je diskkrétne rozdelenie

$$F(\nu) = \begin{cases} 0 & \text{if } \nu < -\lambda, \\ \frac{\sigma^2}{2} & \text{if } -\lambda \leq \nu < \lambda, \\ \sigma^2 & \text{otherwise.} \end{cases}$$



Spektrálna distribučná funkcia

- Pre každý stacionárny diskretný časový rad $\{X_t\}$ s autokovarianciou γ_h , môžeme písať

$$\gamma(h) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i\nu h} dF(\nu)$$

kde F spektrálna distribučná funkcia $\{X_t\}$.



Spektrálna distribučná funkcia

- Funkciu F môžeme rozložiť na tri zložky:
 - diskretnu
 - spojitú
 - singulárnu
- Ak γ je absolútne konvergentná, tak F je spojitá a $dF(\nu) = f(\nu)d\nu$
- Ak γ je súčet sínusoíd, tak F je diskretná



Spektrálna distribučná funkcia

■ Pre $X_t = \sum_{j=1}^k (A_j \sin(2\pi\nu_j t) + B_j \cos(2\pi\nu_j t))$ spektrálna distribučná funkcia má tvar

$$F(\nu) = \sum_{j=1}^k \sigma_j^2 F_j(\nu)$$

kde

$$F_j(\nu) = \begin{cases} 0 & \text{if } \nu < -\nu_j, \\ \frac{1}{2} & \text{if } -\nu_j \leq \nu < \nu_j, \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$



Woldova dekompozícia

- Všimnime si, že

$$X_t = \sum_{j=1}^k (A_j \sin(2\pi\nu_j t) + B_j \cos(2\pi\nu_j t))$$

je deterministické (akonáhle sme videli minulosť, môžeme predpovedať budúcnosť bez chýb)



Woldova dekompozícia

- Wold ukázal, že každý stacionárny proces môže byť reprezentovaný v tvare $X_t = X_t^{(d)} + X_t^{(n)}$

kde: $X_t^{(d)}$ je čisto deterministické a $X_t^{(n)}$ je čisto nedeterministické, teda ide o rozklad spektrálnej distribučnej funkcie, ako $F^{(d)} + F^{(c)}$

Napríklad: $X_t = A \sin(2\pi\lambda t) + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} W_t$



Funkcia vytvárajúca autokovarianciu a spektrálna hustota

- Predpokladajme, že $\{X_t\}$ je lineárny proces, takže ho môžeme zapísať v tvare $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i W_{t-i} = \psi(B)W_t$

Uvažujme postupnosť autokovariancií

$$\begin{aligned}\gamma_h &= \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) \\ &= \text{E} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i W_{t-i} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j W_{t+h-j} \right] \\ &= \sigma_w^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{i+h}.\end{aligned}$$



Funkcia vytvárajúca autokovarianciu a spektrálna hustota

- Definujme funkciu vytvárajúcu autokovarianciu ako

$$\gamma(B) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_h B^h$$

Potom

$$\gamma(B) = \sigma_w^2 \sum_{h=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{i+h} B^h$$

$$= \sigma_w^2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_i \psi_j B^{j-i}$$

$$= \sigma_w^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i B^{-i} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j = \sigma_w^2 \psi(B^{-1}) \psi(B).$$



Funkcia vytvárajúca autokovarianciu a spektrálna hustota

■ Všimnime si, že

$$\gamma(B) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_h B^h.$$

$$\begin{aligned} f(\nu) &= \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_h e^{-2\pi i\nu h} \\ &= \gamma(e^{-2\pi i\nu}) \\ &= \sigma_w^2 \psi(e^{-2\pi i\nu}) \psi(e^{2\pi i\nu}) \\ &= \sigma_w^2 |\psi(e^{2\pi i\nu})|^2. \end{aligned}$$



Funkcia vytvárajúca autokovarianciu a spektrálna hustota

- Napríklad, pre proces MA(q), $\psi(B) = \theta(B)$, máme

$$\begin{aligned} f(\nu) &= \sigma_w^2 \theta(e^{-2\pi i\nu}) \theta(e^{2\pi i\nu}) \\ &= \sigma_w^2 |\theta(e^{-2\pi i\nu})|^2. \end{aligned}$$

- Pre MA(1)

$$\begin{aligned} f(\nu) &= \sigma_w^2 |1 + \theta_1 e^{-2\pi i\nu}|^2 \\ &= \sigma_w^2 |1 + \theta_1 \cos(-2\pi\nu) + i\theta_1 \sin(-2\pi\nu)|^2 \\ &= \sigma_w^2 (1 + 2\theta_1 \cos(2\pi\nu) + \theta_1^2). \end{aligned}$$



Funkcia vytvárajúca autokovarianciu a spektrálna hustota

- Pre proces AR(p), $\psi(B) = 1/\phi(B)$ máme

$$\begin{aligned} f(\nu) &= \frac{\sigma_w^2}{\phi(e^{-2\pi i\nu})\phi(e^{2\pi i\nu})} \\ &= \frac{\sigma_w^2}{|\phi(e^{-2\pi i\nu})|^2}. \end{aligned}$$

- Pre AR(1)

$$\begin{aligned} f(\nu) &= \frac{\sigma_w^2}{|1 - \phi_1 e^{-2\pi i\nu}|^2} \\ &= \frac{\sigma_w^2}{1 - 2\phi_1 \cos(2\pi\nu) + \phi_1^2}. \end{aligned}$$



Spektrálna hustota lineárneho procesu

- Pre proces ARMA(p,q), $\psi(B) = \theta(B)/\phi(B)$ máme

$$\begin{aligned} f(\nu) &= \sigma_w^2 \frac{\theta(e^{-2\pi i\nu})\theta(e^{2\pi i\nu})}{\phi(e^{-2\pi i\nu})\phi(e^{2\pi i\nu})} \\ &= \sigma_w^2 \left| \frac{\theta(e^{-2\pi i\nu})}{\phi(e^{-2\pi i\nu})} \right|^2. \end{aligned}$$

Toto poznáme ako racionálne spektrum.



Racionálne spektrá

- Uvažujme rozklad θ a ϕ v tvare

$$\theta(z) = \theta_q(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_q)$$

$$\phi(z) = \phi_p(z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_p)$$

$$\begin{aligned} f(\nu) &= \sigma_w^2 \left| \frac{\theta_q \prod_{j=1}^q (e^{-2\pi i\nu} - z_j)}{\phi_p \prod_{j=1}^p (e^{-2\pi i\nu} - p_j)} \right|^2 \\ &= \sigma_w^2 \frac{\theta_q^2 \prod_{j=1}^q |e^{-2\pi i\nu} - z_j|^2}{\phi_p^2 \prod_{j=1}^p |e^{-2\pi i\nu} - p_j|^2}. \end{aligned}$$

- Korene z_j voláme nuly a p_j póly.



Racionálne spektrá

■ Odtiaľ

$$f(\nu) = \sigma_w^2 \frac{\theta_q^2 \prod_{j=1}^q |e^{-2\pi i\nu} - z_j|^2}{\phi_p^2 \prod_{j=1}^p |e^{-2\pi i\nu} - p_j|^2}$$

Ako sa ν mení od 0 do $1/2$, tak $e^{-2\pi i\nu}$ sa pohybuje v smere hodinových ručičiek okolo jednotkovej kružnice od 1 do $e^{-\pi i} = -1$.



Príklad: AR(1)

■ AR(1): $\phi(z) = 1 - \phi_1 z$

Pól je $1/\phi_1$. Ak $\phi_1 > 0$, tak pól je napravo od 1, takže spektrálna hustota rastie, keď v sa pohybuje od 0. Ak $\phi_1 < 0$, tak pól je naľavo od -1, takže spektrálna hustota je maximálna pre $v=0$.



Príklad: MA(1)

■ MA(1): $\theta(z) = 1 + \theta_1 z$

Nula je $-1/\theta_1$. Ak $\theta_1 > 0$, tak nula je naľavo od -1, takže spektrálna hustota klesá, keď v sa pohybuje smerom k -1. Ak $\theta_1 < 0$, tak nula je napravo od 1, takže spektrálna hustota je minimálna pre $v=0$.



Príklad: AR(2)

■ AR(2): $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + W_t$

Ak $\phi_1 = 1, \phi_2 = -0.9 \mid \sigma_w^2 = 1$, tak póly sú

$$p_1, p_2 \approx 0.5555 \pm i0.8958 \approx 1.054e^{\pm i1.01567} \approx 1.054e^{\pm 2\pi i 0.16165}$$

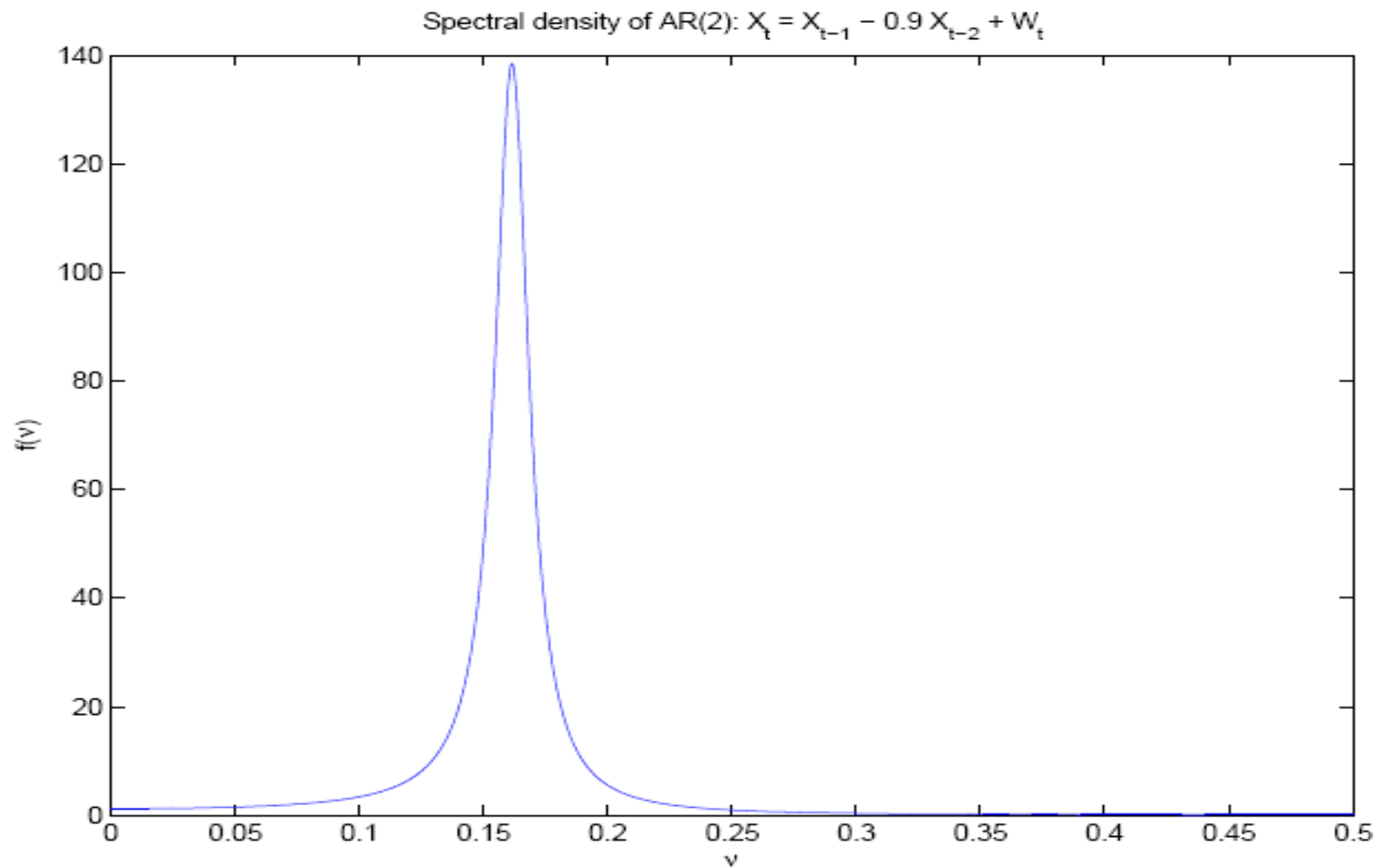
Odtiaľ dostávame

$$f(\nu) = \frac{\sigma_w^2}{|e^{-2\pi i \nu} - p_1|^2 |e^{-2\pi i \nu} - p_2|^2}$$

čo je veľmi špicatá funkcia, ak $e^{-2\pi i \nu}$
prechádza vedľa $1.054e^{-2\pi i 0.16165}$



Príklad: AR(2)



Príklad: SARMA

■ Uvažujme $X_t = \Phi_1 X_{t-12} + W_t$

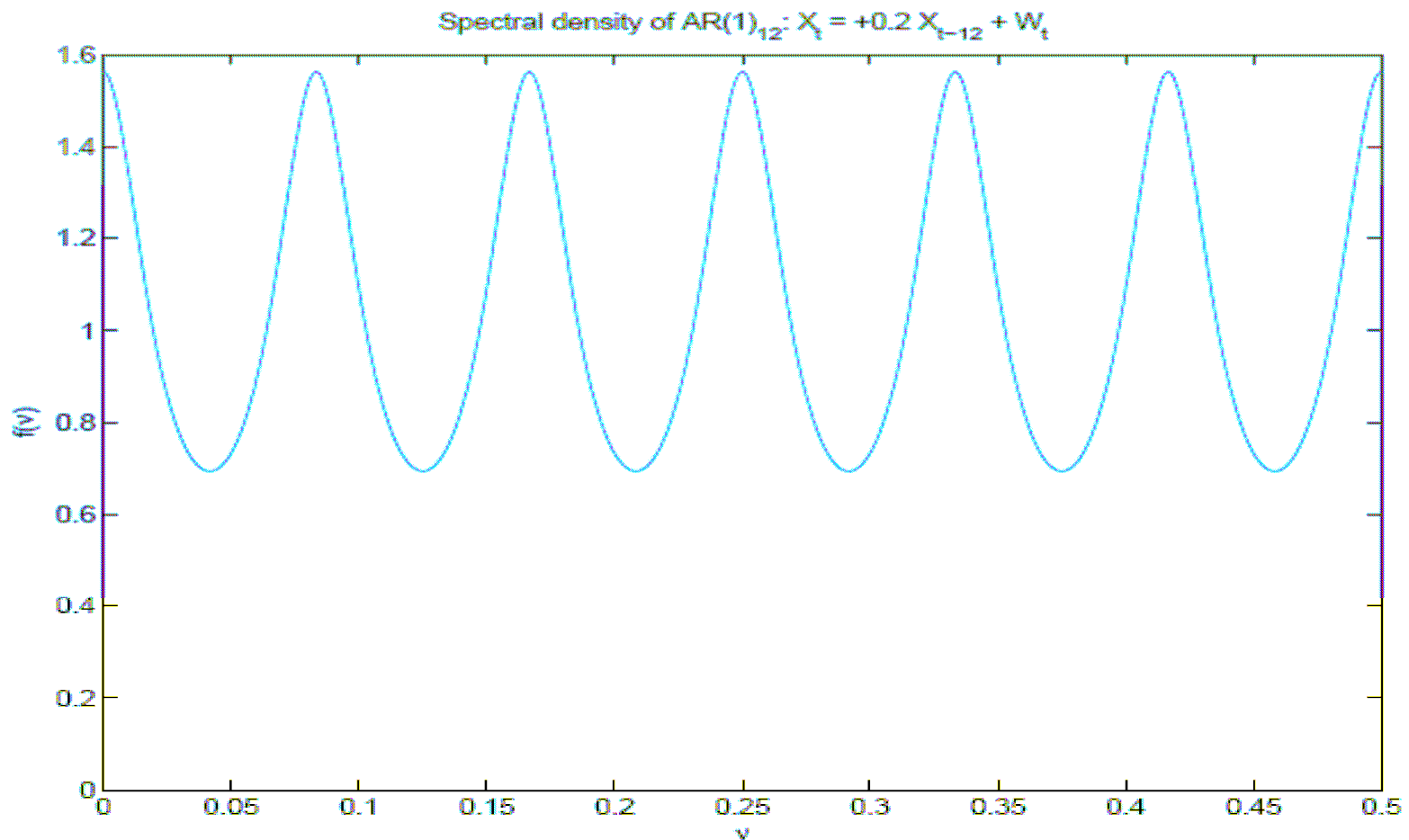
$$\psi(B) = \frac{1}{1 - \Phi_1 B^{12}},$$

$$\begin{aligned} f(\nu) &= \sigma_w^2 \frac{1}{(1 - \Phi_1 e^{-2\pi i 12\nu})(1 - \Phi_1 e^{2\pi i 12\nu})} \\ &= \sigma_w^2 \frac{1}{1 - 2\Phi_1 \cos(24\pi\nu) + \Phi_1^2}. \end{aligned}$$

Funkcia $f(\nu)$ je periodická s periódou $1/12$



Príklad: SARMA



Príklad: SARMA

■ Iný pohľad:

$$1 - \Phi_1 z^{12} = 0 \Leftrightarrow z = r e^{i\theta},$$

$$s \quad r = |\Phi_1|^{-1/12}, \quad e^{i12\theta} = e^{-i \arg(\Phi_1)}.$$

Pre $\Phi_1 > 0$, existuje 12 pólův $|\Phi_1|^{-1/12} e^{ik\pi/6}$

$k = 0, \pm 1, \dots, \pm 5, 6$.

Takže, spektrálna hustota dosahuje vrchol, keď $e^{-2\pi i\nu}$ prechádza blízko

$$|\Phi_1|^{-1/12} \times \{1, e^{-i\pi/6}, e^{-i\pi/3}, e^{-i\pi/2}, e^{-i2\pi/3}, e^{-i5\pi/6}, -1\}$$



Príklad: SARMA

■ Iný model: $(1 - \Phi_1 B^{12})(1 - \phi_1 B)X_t = W_t$

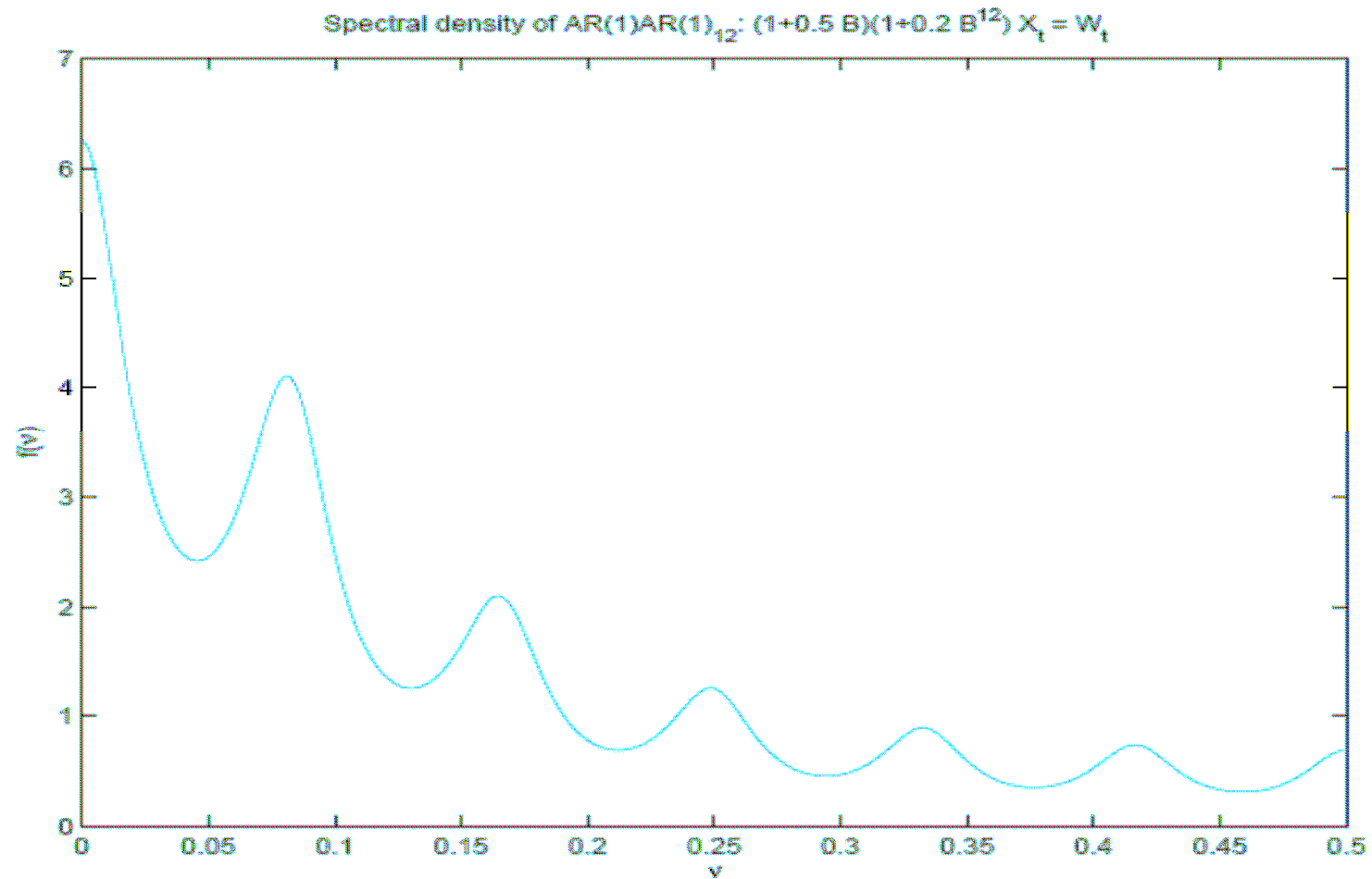
$$f(\nu) = \sigma_w^2 \frac{1}{(1 - 2\Phi_1 \cos(24\pi\nu) + \Phi_1^2)(1 - 2\phi_1 \cos(2\pi\nu) + \phi_1^2)}$$

Spektrum je zoškálované zo spektra AR(1) a (periodického) AR(1)₁₂.

Póly AR(1)₁₂ vedú k špičke, keď $|e^{-2\pi i\nu}|$ je blízko jedného z 12 koreňov a pól AR(1) vedie k špičke blízko $|e^{-2\pi i\nu} = 1|$



Príklad: SARMA



Časovo invariantné lineárne filtre

- Filter je operátor, ktorý zobrazuje časový rad $\{X_t\}$ do iného časového radu $\{Y_t\}$. Lineárny proces $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j W_{t-j}$ môžeme chápať ako výstup kauzálneho lineárneho filtra s bielym šumom ako vstupom.



Časovo invariantné lineárne filtre

■ Definícia.

Časový rad $\{Y_t\}$ je výstupom lineárneho filtra $A = \{a_{t,j} : t, j \in \mathbb{Z}\}$ so vstupom $\{X_t\}$, ak

$$Y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{t,j} X_j$$

Ak $a_{t,t-j}$ je nezávislé na t ($a_{t,t-j} = \psi_j$), tak hovoríme, že filter je časovo invariantný.

Ak $\psi_j = 0$ pre $j < 0$, tak hovoríme, že filter je kauzálny.



Časovo invariantné lineárne filtre

- Filter $Y_t = X_{-t}$ je lineárny, no nie je časovo invariantný.
- Filter $Y_t = \frac{1}{3}(X_{t-1} + X_t + X_{t+1})$ je lineárny, časovo invariantný, no nie je kauzálny

$$\psi_j = \begin{cases} \frac{1}{3} & |j| \leq 1 \\ 0 & \text{inde} \end{cases}$$



Časovo invariantné lineárne filtre

- Pre polynómy $\phi(B), \theta(B)$ s koreňami mimo jednotkového kruhu je filter

$$\psi(B) = \theta(B)/\phi(B)$$

lineárny, časovo invariantný a kauzálny.

- Operáciu

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j X_{t-j}$$

voláme *konvolúcia* X s ψ .



Frekvenčná odozva časovo invariantného lineárneho filtra

- Predpokladajme, že $\{X_t\}$ má spektrálnu hustotu $f_x(\nu)$ a ψ je *stabilné*, t.j. $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$.
Potom $Y_t = \psi(B)X_t$ má spektrálnu hustotu

$$f_y(\nu) = |\psi(e^{2\pi i\nu})|^2 f_x(\nu)$$

- Funkciu $\nu \mapsto |\psi(e^{2\pi i\nu})|$ (hodnota polynómu na jednotkovej kružnici) voláme *funkcia frekvenčnej odpovede* alebo *transferová funkcia*.



Frekvenčná odozva časovo invariantného lineárneho filtra

- Predpokladajme, že $\{X_t\}$ má spektrálnu hustotu $f_x(\nu)$ a ψ je *stabilné*, t.j. $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$.
Potom $Y_t = \psi(B)X_t$ má spektrálnu hustotu

$$f_y(\nu) = |\psi(e^{2\pi i\nu})|^2 f_x(\nu)$$

- Funkciu $\nu \mapsto |\psi(e^{2\pi i\nu})|^2$ voláme *mocninová transferová funkcia*.



Frekvenčná odozva časovo invariantného lineárneho filtra

■ Pre stabilné ψ má $Y_t = \psi(B)X_t$ spektrálnu hustotu $f_y(\nu) = |\psi(e^{2\pi i\nu})|^2 f_x(\nu)$

■ Videli sme, že lineárny proces $Y_t = \psi(B)W_t$ je špeciálnym prípadom, pretože

$$f_y(\nu) = |\psi(e^{2\pi i\nu})|^2 \sigma_w^2 = |\psi(e^{2\pi i\nu})|^2 f_w(\nu)$$

■ Keď pustíme časový rad $\{X_t\}$ cez lineárny filter, spektrálna hustota je vynásobená (frekvencia po frekvencii) štvorcem modulu frekvenčnej odpovede

$$\nu \mapsto |\psi(e^{2\pi i\nu})|^2$$



Frekvenčná odozva časovo invariantného lineárneho filtra

■ Prečo je $f_y(\nu) = |\psi(e^{2\pi i\nu})|^2 f_x(\nu)$?

Najskôr

$$\begin{aligned}\gamma_y(h) &= \mathbb{E} \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j X_{t-j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_k X_{t+h-k} \right] \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_k \mathbb{E} [X_{t+h-k} X_{t-j}] \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_k \gamma_x(h+j-k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \sum_{l=-\infty}^{\infty} \psi_{h+j-l} \gamma_x(l).\end{aligned}$$



Frekvenčná odozva časovo invariantného lineárneho filtra

■ Prečo je $f_y(\nu) = |\psi(e^{2\pi i\nu})|^2 f_x(\nu)$?

Ľahko sa dá ukázať, že

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$$

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma_x(h)| < \infty$$

implikujú

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma_y(h)| < \infty$$

Teda, spektrálna hustota y je definovaná



Frekvenčná odozva časovo invariantného lineárneho filtra

■ Prečo je $f_y(\nu) = |\psi(e^{2\pi i\nu})|^2 f_x(\nu)$?

Konečne,

$$\begin{aligned} f_y(\nu) &= \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) e^{-2\pi i\nu h} \\ &= \sum_{h=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \sum_{l=-\infty}^{\infty} \psi_{h+j-l} \gamma_x(l) e^{-2\pi i\nu h} \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j e^{2\pi i\nu j} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \gamma_x(l) e^{-2\pi i\nu l} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \psi_{h+j-l} e^{-2\pi i\nu(h+j-l)} \\ &= \psi(e^{2\pi i\nu j}) f_x(\nu) \sum_{h=-\infty}^{\infty} \psi_h e^{-2\pi i\nu h} \\ &= |\psi(e^{2\pi i\nu j})|^2 f_x(\nu). \end{aligned}$$



Frekvenčná odozva: Príklady

- Lineárny proces $Y_t = \psi(B)W_t$ má

$$f_y(\nu) = |\psi(e^{2\pi i\nu})|^2 \sigma_w^2$$

- ARMA model je $\psi(B) = \theta(B)/\phi(B)$, takže $\{Y_t\}$ má racionálne spektrum

$$f_y(\nu) = \sigma_w^2 \left| \frac{\theta(e^{-2\pi i\nu})}{\phi(e^{-2\pi i\nu})} \right|^2 = \sigma_w^2 \frac{\theta_q^2 \prod_{j=1}^q |e^{-2\pi i\nu} - z_j|^2}{\phi_p^2 \prod_{j=1}^p |e^{-2\pi i\nu} - p_j|^2},$$

kde z_j a p_j sú nuly a póly racionálnej funkcie $z \mapsto \theta(z)/\phi(z)$



Frekvenčná odozva: Príklady

■ Kízavé priemery

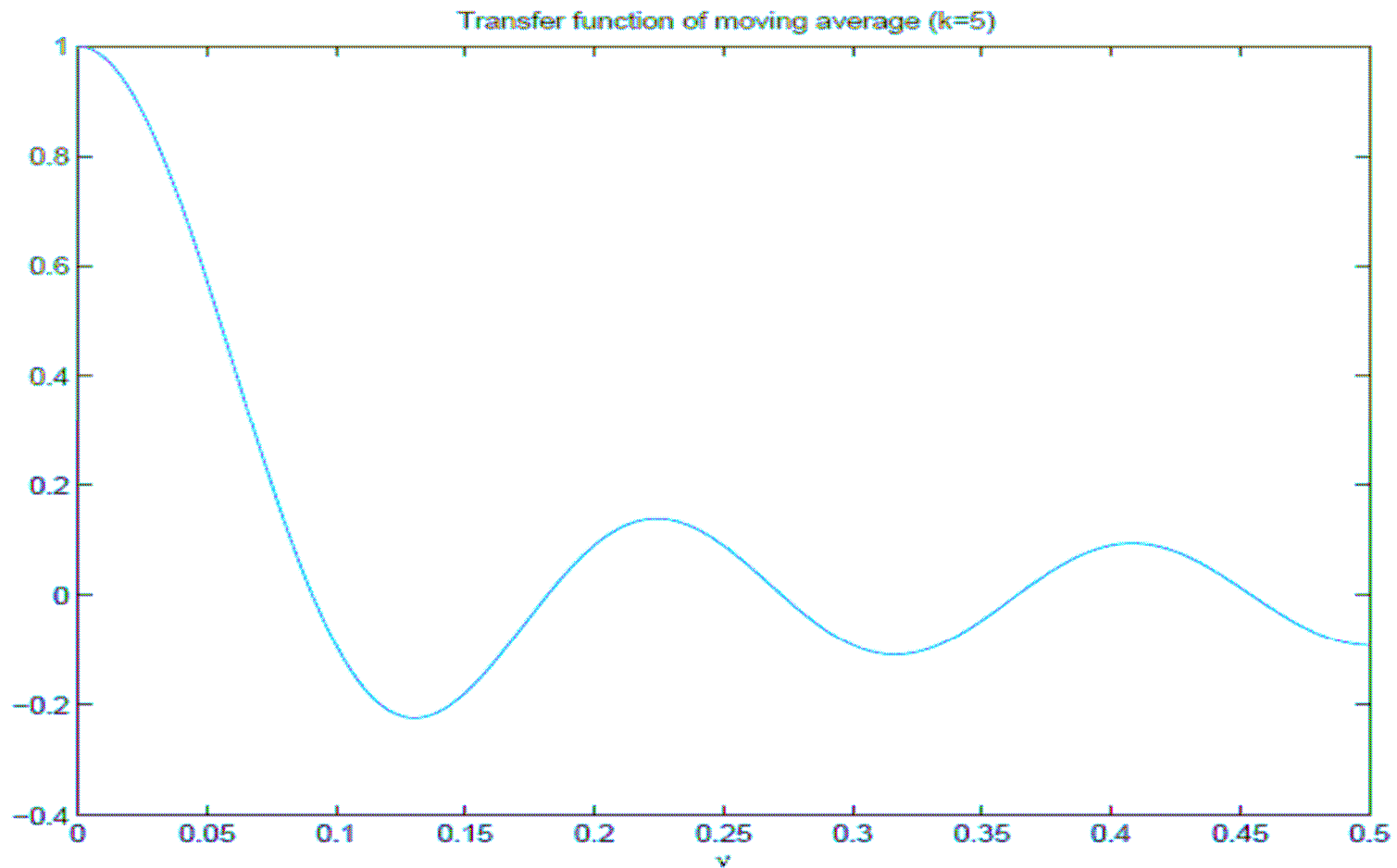
$$Y_t = \frac{1}{2k+1} \sum_{j=-k}^k X_{t-j}$$

sú časovo invariantný lineárny filter (avšak nie kauzálny). Ich transferovou funkciou je Dirichletovo jadro

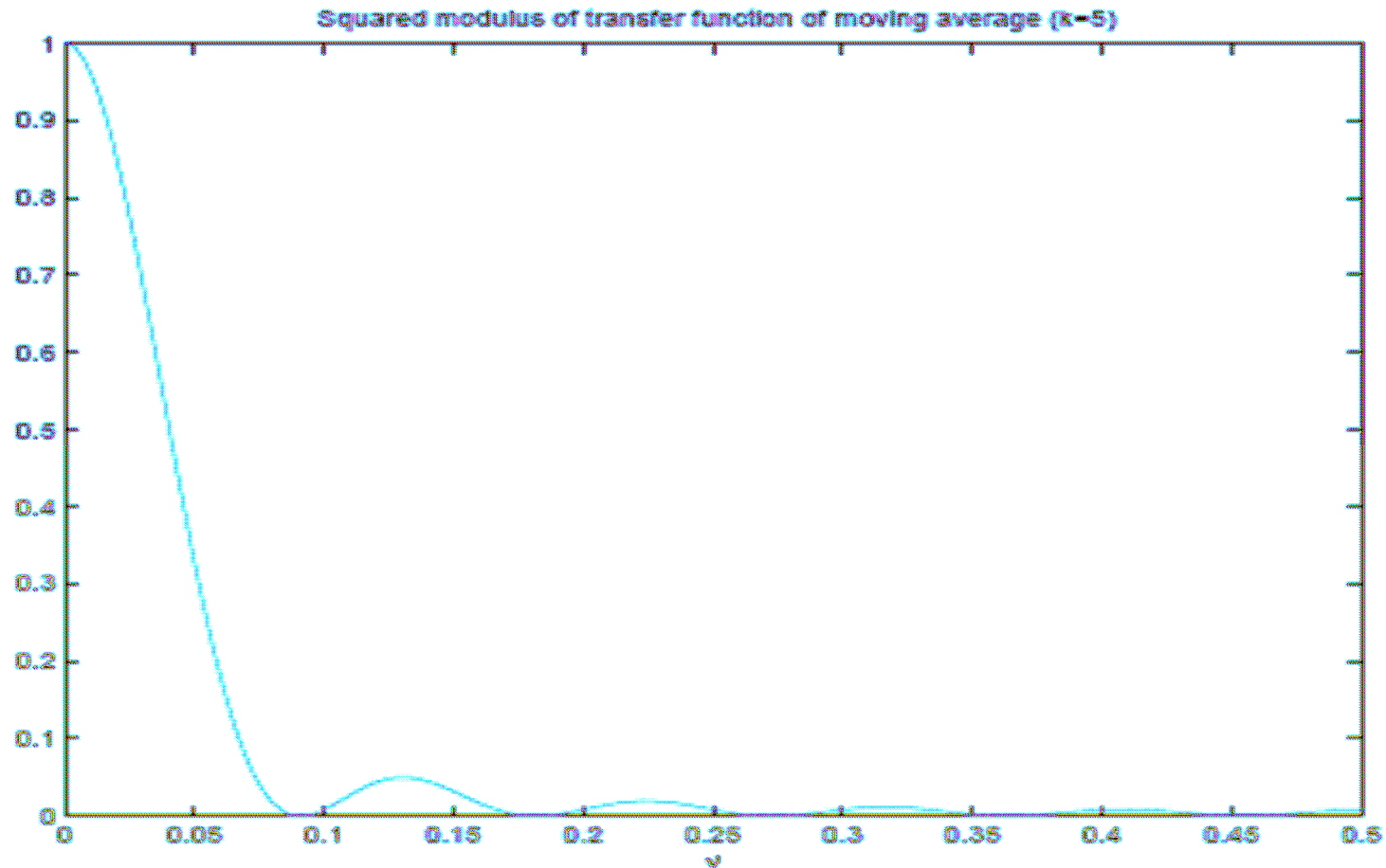
$$\psi(e^{-2\pi i\nu}) = D_k(2\pi\nu) = \frac{1}{2k+1} \sum_{j=-k}^k e^{-2\pi i j\nu} = \begin{cases} 1 & \nu=0 \\ \frac{\sin(2\pi(k+1/2)\nu)}{(2k+1)\sin(\pi\nu)} & \text{inak} \end{cases}$$



Frekvenčná odozva: Príklady



Frekvenčná odozva: Príklady



Frekvenčná odozva: Príklady

- Kízavé priemery sú filtrom, ktorý zachováva nízke frekvencie a odstraňuje vysoké frekvencie. Často sa používa na odhad monotónnej trendovej zložky časového radu.



Frekvenčná odozva: Príklady

■ Diferencovanie

$$Y_t = (1 - B)X_t$$

je časovo invariantný, kauzálny lineárny filter. Jeho transferová funkcia má tvar

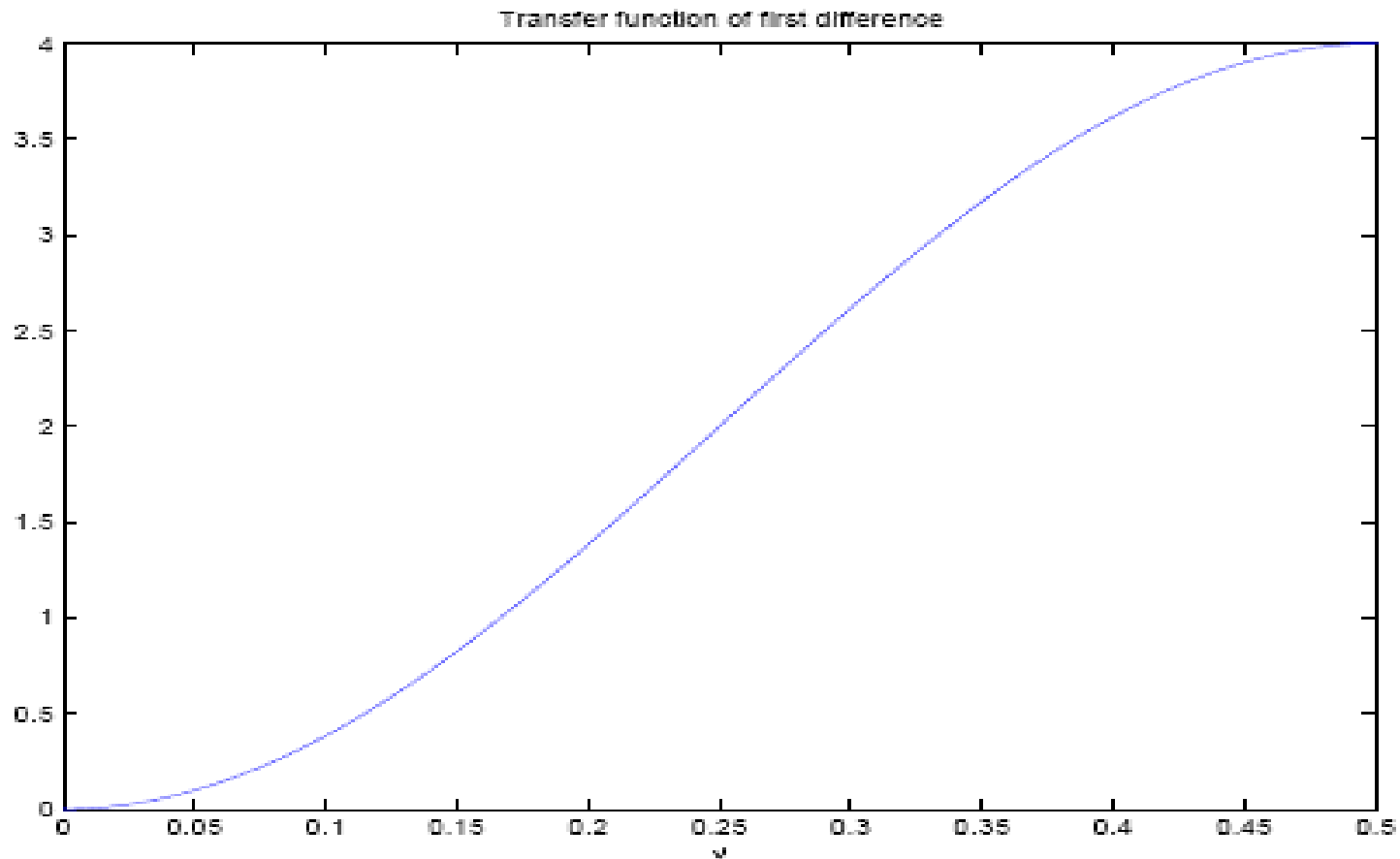
$$\psi(e^{-2\pi i\nu}) = 1 - e^{-2\pi i\nu}$$

takže

$$|\psi(e^{-2\pi i\nu})|^2 = 2(1 - \cos(2\pi\nu))$$



Frekvenčná odozva: Príklady



Frekvenčná odozva: Príklady

- Diferencovanie sú filtrom, ktorý zachováva vysoké frekvencie a odstraňuje nízke frekvencie. Často sa používa na elimináciu trendovej zložky časového radu.



Odhad spektra: Úvod

- Videli sme, že spektrálna hustota poskytuje iný pohľad na stacionárne časové rady
- Otázka znie, ako vieme odhadnúť spektrálnu hustotu, ak máme realizáciu časového radu x_1, x_2, \dots, x_n ?
 - Jedným z možných prístupov je, že v definícii $f(\nu) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h)e^{-2\pi i\nu h}$ nahradíme $\gamma(\cdot)$ výberovou autokovarianciou $\hat{\gamma}(\cdot)$



Odhad spektra: Úvod

- Druhým prístupom je *periodogram*:
vypočítame $I(\nu)$, štvorec modulu diskkrétnej Fourierovej analýzy pre frekvencie $\nu = k/n$
- Oba prístupy sú vo Fourierových frekvenciách $\nu = k/n$ identické.
- Asymptotické očakávanie periodogramu $I(\nu)$ je $f(\nu)$. Môžeme odvodiť niekoľko asymptotických vlastností, a teda testovať hypotézu.



Odhad spektra: Úvod

- Nanešťastie, asymptotická variancia $I(\nu)$ je konštantná, takže nie je konzistentným odhadom $f(\nu)$
- Môžeme redukovať varianciu vyhladením periodogramu – spriemerovaním susediacich frekvencií. Ak spriemerujeme cez užší rozsah než $n \rightarrow \infty$, môžeme dostať konzistentný odhad spektrálnej hustoty



Odhad spektra: Výberová autokovariancia

- Základná myšlienka: ako odhad autokovariancie $\gamma(\cdot)$ použijeme výberovú autokovarianciu $\hat{\gamma}(\cdot)$ definovanú

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-|h|} (x_{t+|h|} - \bar{x})(x_t - \bar{x}), \quad -n < h < n$$

a potom použijeme výberovú verziu

$$f(\nu) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) e^{-2\pi i \nu h}$$

t.j. pre $-1/2 \leq \nu \leq 1/2$ odhadneme

$$\hat{f}(\nu) = \sum_{h=-n+1}^{n-1} \hat{\gamma}(h) e^{-2\pi i \nu h}$$



Odhad spektra: Periodogram

- Iný prístup: Arthur Schuster (1897), zemetrasenie, slnečné škvrny
- Potrebujeme však si zopakovať diskretnú Fourierovu transformáciu x_1, x_2, \dots, x_n .



Diskrétna Fourierova transformácia

- Pre postupnosť (x_1, x_2, \dots, x_n) definujeme diskrétnu Fourierovu transformáciu (DFT) ako $(X(\nu_0), X(\nu_1), \dots, X(\nu_{n-1}))$, kde

$$X(\nu_k) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n x_t e^{-2\pi i \nu_k t}$$

- a $\nu_k = k/n$, $k=0, 1, \dots, n-1$ sa volajú Fourierove frekvencie (diskrétna verzia intervalu $[0, 1]$).



Diskrétna Fourierova transformácia

- Najskôr si ukážeme, že na DFT môžeme nazerať ako na reprezentáciu x vo Fourierovej báze.
- Uvažujme priestor \mathbb{C}^n vektorov n komplexných čísiel so skalárnym súčinom $\langle a, b \rangle = a^* b$, kde a^* je konjugovaný transponovaný vektor a .



Diskrétna Fourierova transformácia

- Predpokladajme, že $\{\phi_j : j = 0, 1, \dots, n-1\}$ je ortonormálna množina n vektorov z \mathbb{C}^n

$$\langle \phi_j, \phi_k \rangle = \begin{cases} 1 & j=k \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

Potom vektory $\{\phi_j\}$ vytvárajú vektorový priestor \mathbb{C}^n , a teda každý vektor x z \mathbb{C}^n sa dá napísať pomocou novej ortonormálnej bázy

$$x = \sum_{j=0}^{n-1} \langle \phi_j, x \rangle \phi_j$$



Diskrétna Fourierova transformácia

- Uvažujme nasledujúcu množinu vektorov v \mathbb{C}^n :

$$\left\{ e_j = \frac{1}{\sqrt{n}} (e^{2\pi i \nu_j}, e^{2\pi i 2\nu_j}, \dots, e^{2\pi i n \nu_j})' : j = 0, \dots, n-1 \right\}$$

Lahko overíme, že sú ortonormálne

$$\begin{aligned} \langle e_j, e_k \rangle &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n e^{2\pi i t(\nu_k - \nu_j)} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(e^{2\pi i(k-j)/n} \right)^t \\ &= \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{n} e^{2\pi i(k-j)/n} \frac{1 - (e^{2\pi i(k-j)/n})^n}{1 - e^{2\pi i(k-j)/n}} \end{cases} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} j=k \\ \text{inak} \end{array} \end{aligned}$$



Diskrétna Fourierova transformácia

- Využili sme pri tom fakt, že $S_n = \sum_{t=1}^n \alpha^t$ |
vyhovuje $\alpha S_n = S_n + \alpha^{n+1} - \alpha$ |
a tak $S_n = \alpha(1 - \alpha^n)/(1 - \alpha)$ | pre $\alpha \neq 1$ |
- Takže môžeme reálny vektor $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ' reprezentovať pomocou ortonormálnej bázy ako

$$x = \sum_{j=0}^{n-1} \langle e_j, x \rangle e_j = \sum_{j=0}^{n-1} X(\nu_j) e_j$$



Diskrétna Fourierova transformácia

- Takže vektor $(X(v_0), X(v_1), \dots, X(v_{n-1}))$ koeficientov DFT je reprezentáciou x vo Fourierovej báze.



Diskrétna Fourierova transformácia

- Alternatívnou cestou, ako sa reprezentovať DFT je uvažovať oddelene reálne a imaginárne zložky

$$\begin{aligned}X(\nu_j) &= \langle e_j, x \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n e^{-2\pi i t \nu_j} x_t \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \cos(2\pi t \nu_j) x_t - i \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \sin(2\pi t \nu_j) x_t \\ &= X_c(\nu_j) - i X_s(\nu_j),\end{aligned}$$

Toto nám definuje sínusovú (X_s) a kosínusovú (X_c) transformáciu x .



Periodogram

- Periodogram je definovaný ako

$$\begin{aligned} I(\nu) &= |X(\nu)|^2 \\ &= \frac{1}{n} \left| \sum_{t=1}^n e^{-2\pi i t \nu} x_t \right|^2 \\ &= X_c^2(\nu) + X_s^2(\nu). \end{aligned}$$

