Veta 10. *Nech je* $(X, \mathcal{S}, \mu)$ *priestor s mierou a* $f_j : X \to \mathbb{R}$ *sú merateľné.*

(i) (Jegorov) *Ak* $\mu(X) < \infty$ *a* $f_j(x) \to f(x)$ *pre každé* $x \in X$, *potom* $f_j \to f$ μ*-skoro rovnomerne.*

(ii) *Ak* $f_j \to f$ μ*-skoro rovnomerne, potom* $f_j \to f$ *v miere.*

(iii) *Ak* $f_j \to f$ *v miere a* $f_j \to g$ *v miere, potom* $f = g$ *s.v.*

Dôkaz tvrdení (i) *a* (ii).

(i) Najprv dokážeme pomocné tvrdenie:

$$(\forall \varepsilon, \eta > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\exists A \in \mathcal{S})\ \mu(A^c) < \eta \ \text{ a } \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \text{ pre každé } x \in A \text{ a } n \geq k. \tag{1}$$

Zvoľme si $\varepsilon > 0$ a $\eta > 0$ a položme

$$X_k = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \text{ pre každé } n \geq k\}.$$

Potom zrejme platí $X_k \in \mathcal{S}$, $X = \bigcup_k X_k$, $X_k \subset X_{k+1}$, a teda $\mu(X) = \lim_{k\to\infty} \mu(X_k)$. Existuje teda k tak, že $\mu(X_k) > \mu(X) - \eta$, a v dôkaze (1) stačí zvoliť $A := X_k$.

Zvoľme teraz $\delta > 0$ v definícii μ-skoro rovnomernej konvergencie. Pre $j \in \mathbb{N}$ použijeme (1) s $\varepsilon = \frac{1}{j}$ a $\eta = \delta 2^{-j}$: dostaneme existenciu $k_j \in \mathbb{N}$ a $A_j \in \mathcal{S}$ takých, že $\mu(A_j^c) < \delta 2^{-j}$ a $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{j}$ pre $x \in A_j$ a $n \geq k_j$. Položme $A = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$. Potom platí $\mu(A^c) = \mu(\bigcup_j A_j^c) < \delta$ a pre každé $x \in A$ a $n \geq k_j$ platí tiež odhad $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{j}$ (pretože $A \subset A_j$), takže f_j konvergujú k f na množine A rovnomerne.

(ii) Zvoľme $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$. Potom existuje $A \in \mathcal{S}$ tak, že $\mu(A^c) < \delta$ a f_j konvergujú k f na množine A rovnomerne. Existuje teda $k \in \mathbb{N}$ tak, že $|f_j(x) - f(x)| < \varepsilon$ pre každé $x \in A$ a $j \geq k$. Pre $j \geq k$ zrejme platí

$$\mu\{x \in X : |f_j(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \leq \mu(A^c) < \delta,$$

takže $\mu\{x \in X : |f_j(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \to 0$ pre $j \to \infty$.