Veta 12(ii). (Linearita Lebesgueovho integrálu) *Nech je* $(X, \mathcal{S}, \mu)$ *priestor s mierou,* $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Potom* $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *a* $\int_X (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int_X f\, d\mu + \beta \int_X g\, d\mu$.

Dôkaz. (a) Najprv ukážeme, že ak $f \in \mathcal{L}^1$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, potom $\alpha f \in \mathcal{L}^1$ a

$$\int_X (\alpha f)\, d\mu = \alpha \int_X f\, d\mu. \tag{1}$$

Tvrdenie je zrejmé z definície pre $\alpha = 0$ aj pre $\alpha = -1$ (lebo $f^+ = (-f)^-$ a $f^- = (-f)^+$), takže môžeme predpokladať $\alpha > 0$ (pre všeobecné $\alpha < 0$ stačí potom použiť tvrdenie pre násobenie skalárom $|\alpha|$ a následne pre násobenie skalárom -1).

Nech je najprv $f : X \to [0, \infty)$ jednoduchá a integrovateľná a $\alpha > 0$. Potom $f = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{A_i}$, kde $\alpha_i \geq 0$, $A_i \in \mathcal{S}$ sú navzájom disjunktné a $\int_X f\, d\mu = \sum_i \alpha_i \mu(A_i) < \infty$. Funkcia $\alpha f = \sum_{i=1}^k (\alpha\alpha_i)\chi_{A_i}$ je tiež jednoduchá a nezáporná a

$$\int_X (\alpha f)\, d\mu = \sum_i (\alpha\alpha_i)\mu(A_i) = \alpha \sum_i \alpha_i \mu(A_i) = \alpha \int_X f\, d\mu,$$

takže $\alpha f \in \mathcal{L}^1$ a platí (1).

Nech je teraz $f : X \to [0, \infty]$ integrovateľná a $\alpha > 0$. Potom je $\alpha f : X \to [0, \infty]$ merateľná, a teda (použitím (1) pre nezáporné jednoduché integrovateľné funkcie a označením $\tilde{h} = h/\alpha$) dostávame

$$\begin{aligned}
\int_X (\alpha f)\, d\mu &= \sup\{\int_X h\, d\mu : 0 \leq h \leq \alpha f;\ h \text{ jednoduchá}\} \\
&= \sup\{\alpha \int_X (h/\alpha)\, d\mu : 0 \leq h/\alpha \leq f;\ h \text{ jednoduchá}\} \\
&= \alpha \sup\{\int_X \tilde{h}\, d\mu : 0 \leq \tilde{h} \leq f;\ \tilde{h} \text{ jednoduchá}\} \\
&= \alpha \int_X f\, d\mu,
\end{aligned}$$

takže $\alpha f \in \mathcal{L}^1$ a platí (1).

Nech je nakoniec $f \in \mathcal{L}^1$ a $\alpha > 0$. Potom $f = f^+ - f^-$, kde $f^+, f^- : X \to [0, \infty]$ sú integrovateľné, a $\alpha f = (\alpha f)^+ - (\alpha f)^- = \alpha f^+ - \alpha f^-$. S využitím vyššie dokázaného dostávame $\alpha f^+, \alpha f^- \in \mathcal{L}^1$, $\int_\alpha \alpha f^+\, d\mu = \alpha \int_X f^+\, d\mu$, $\int_\alpha \alpha f^-\, d\mu = \alpha \int_X f^-\, d\mu$, a teda tiež $\alpha f \in \mathcal{L}^1$ a platí (1).

(b) Teraz dokážeme, že ak $f, g \in \mathcal{L}^1$, potom $f + g \in \mathcal{L}^1$ a

$$\int_X (f + g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu. \tag{2}$$

Kombináciou tohto tvrdenia a tvrdenia dokázaného v bode (a) plynie tvrdenie Vety 12(ii).

Nech sú najprv $f, g \in \mathcal{L}^1$ jednoduché nezáporné, $f = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{A_i}$, $g = \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{B_j}$, kde $\alpha_i \geq 0$, $A_i \in \mathcal{S}$ sú navzájom disjunktné, a podobne pre β_j, B_j. Položme $A_0 = X \setminus \bigcup_{i=1}^k A_i$, $B_0 = X \setminus \bigcup_{j=1}^m B_j$, $\alpha_0 = \beta_0 = 0$. Potom $f + g = \sum_{i,j} (\alpha_i + \beta_j)\chi_{A_i \cap B_j}$ (kde sčítame cez všetky $i = 0, 1, \ldots, k$ a $j = 0, 1, \ldots, m$) a množiny $A_i \cap B_j \in \mathcal{S}$ sú navzájom disjunktné, takže $f + g$ je nezáporná jednoduchá funkcia,

$$\begin{aligned}
\int_X (f + g)\, d\mu &= \sum_{i,j} (\alpha_i + \beta_j)\mu(A_i \cap B_j) = \sum_i \alpha_i \sum_j \mu(A_i \cap B_j) + \sum_j \beta_j \sum_i \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_i \alpha_i \mu(A_i) + \sum_j \beta_j \mu(B_j) = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu,
\end{aligned}$$

takže $f + g \in \mathcal{L}^1$ a platí (1).

Nech sú teraz $f, g \in \mathcal{L}^1$ nezáporné. Z Vety 9 plynie existencia $f_k, g_k : X \to [0, \infty)$ jednoduchých tak, že $f_k \nearrow f$, $g_k \nearrow g$. Z definície a konečnosti integrálov $\int_X f\, d\mu$ a $\int_X g\, d\mu$ naviac plynie $f_k, g_k \in \mathcal{L}^1$. S použitím Vety 11 a tvrdenia (2) pre jednoduché nezáporné integrovateľné funkcie dostávame

$$\begin{aligned}\int_X (f+g)\, d\mu &= \lim_{k\to\infty} \int_X (f_k + g_k)\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \Big(\int_X f_k\, d\mu + \int_X g_k\, d\mu \Big) \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_X f_k\, d\mu + \lim_{k\to\infty} \int_X g_k\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu,\end{aligned}$$

takže $f + g \in \mathcal{L}^1$ a platí (1).

Nech sú nakoniec $f, g \in \mathcal{L}^1$. Potom sú f, g konečné s.v., takže funkcia $h = f + g$ je definovaná s.v. (funkciu h definujeme ako nula tam, kde je $f = -g = +\infty$ alebo $f = -g = -\infty$). Zrejme $h^+ \le f^+ + g^+$, pričom z vyššie dokázaného plynie $f^+ + g^+ \in \mathcal{L}^1$, takže vďaka monotónii Lebesgueovho integrálu pre merateľné nezáporné funkcie je tiež $h^+ \in \mathcal{L}^1$ a podobne $h^- \in \mathcal{L}^1$. Pretože platí $h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$, z vyššie dokázaného plynie

$$\begin{aligned}\int_X h^+\, d\mu + \int_X f^-\, d\mu + \int_X g^-\, d\mu &= \int_X (h^+ + f^- + g^-)\, d\mu = \int_X (h^- + f^+ + g^+)\, d\mu \\ &= \int_X h^-\, d\mu + \int_X f^+\, d\mu + \int_X g^+\, d\mu,\end{aligned}$$

odkiaľ

$$\begin{aligned}\int_X h\, d\mu &= \int_X h^+\, d\mu - \int_X h^-\, d\mu = \int_X f^+\, d\mu - \int_X f^-\, d\mu + \int_X g^+\, d\mu - \int_X g^-\, d\mu \\ &= \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu,\end{aligned}$$

takže platí (1).