Nech je $\gamma : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ vonkajšia miera. Množina $M \subset X$ sa nazýva γ-*merateľná* (podľa Carathéodoryho), ak pre každú "testovaciu" množinu $T \subset X$ platí

$$\gamma T = \gamma(T \cap M) + \gamma(T \setminus M). \tag{1}$$

Systém všetkých γ-merateľných množín označíme $\mathfrak{M}(\gamma)$.

Keďže zo subaditivity vonkajšej miery dostávame

$$\gamma T \leq \gamma(T \cap M) + \gamma(T \setminus M)$$

pre každé dve množiny $T, M \subset X$, je "testovacia" podmienka (1) ekvivalentná s podmienkou

$$\gamma T \geq \gamma(T \cap M) + \gamma(T \setminus M). \tag{2}$$

Túto podmienku treba zrejme overovať len ak $\gamma T < \infty$ (inak je (2) triviálne splnená).

Veta 4. (Carathéodory) *$\mathfrak{M}(\gamma)$ je σ-algebra a $\gamma|_{\mathfrak{M}(\gamma)}$ je úplná miera.*

Dôkaz. Dôkaz rozdelíme do viacerých krokov.

(a) Ľahko sa overí, že $\emptyset, X \in \mathfrak{M}(\gamma)$. Ak $M \in \mathfrak{M}(\gamma)$, potom z podmienky (1) a rovností $T \cap M = T \setminus (X \setminus M)$, $T \setminus M = T \cap (X \setminus M)$ plynie

$$\gamma T = \gamma(T \cap M) + \gamma(T \setminus M) = \gamma(T \setminus (X \setminus M)) + \gamma(T \cap (X \setminus M)),$$

takže je splnená podmienka (1) pre merateľnosť množiny $X \setminus M$. Z predpokladu $M \in \mathfrak{M}(\gamma)$ teda plynie $X \setminus M \in \mathfrak{M}(\gamma)$, t.j. systém $\mathfrak{M}(\gamma)$ je uzavretý vzhľadom na doplnky. Ďalej ukážeme, že z predpokladu $M, N \in \mathfrak{M}(\gamma)$ plynie $M \cap N \in \mathfrak{M}(\gamma)$. Indukciou odtiaľ bude plynúť, že $\mathfrak{M}(\gamma)$ je uzavretý vzhľadom na konečné prieniky.

Nech teda $M, N \in \mathfrak{M}(\gamma)$ a zvoľme si testovaciu množinu $T \subset X$. Potom z merateľnosti M dostávame

$$\gamma T = \gamma(T \cap M) + \gamma(T \setminus M) \tag{3}$$

a z merateľnosti N (pre testovaciu množinu $\tilde{T} := T \cap M$)

$$\gamma(T \cap M) = \gamma(T \cap M \cap N) + \gamma((T \cap M) \setminus N)\,. \tag{4}$$

Teraz použijeme testovaciu množinu $T \setminus (M \cap N)$ a merateľnosť M (a tiež množinové rovnosti $[T \setminus (M \cap N)] \cap M = (T \cap M) \setminus N$, $[T \setminus (M \cap N)] \setminus M = T \setminus M$):

$$\gamma(T \setminus (M \cap N)) = \gamma((T \cap M) \setminus N) + \gamma(T \setminus M)\,. \tag{5}$$

Z rovností (3)-(5) plynie

$$\gamma T = \gamma(T \cap (M \cap N)) + \gamma(T \setminus (M \cap N))\,,$$

takže $M \cap N \in \mathfrak{M}(\gamma)$.

Pretože $\mathfrak{M}(\gamma)$ je uzavretý vzhľadom na doplnky a konečné prieniky, je uzavretý aj na konečné zjednotenia.

(b) Nech sú $M_1, M_2, \dots \in \mathfrak{M}(\gamma)$ navzájom disjunktné. Dokážeme, že $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} M_i \in \mathfrak{M}(\gamma)$, odkiaľ ľahko vidno, že $\mathfrak{M}(\gamma)$ je σ-algebra. Zvoľme si teda testovaciu množinu $T \subset X$. Z merateľnosti množiny M_k (a voľbou testovacej množiny $T \cap \bigcup\limits_{i=1}^{k} M_i$) dostávame

$$\gamma(T \cap \bigcup_{i=1}^{k} M_i) = \gamma(T \cap M_k) + \gamma(T \cap \bigcup_{i=1}^{k-1} M_i),$$

odkiaľ indukciou $\gamma(T \cap \bigcup_{i=1}^{k} M_i) = \sum_{i=1}^{k} \gamma(T \cap M_i)$. Pre každé k teda platí

$$\gamma T = \gamma(T \setminus \bigcup_{i=1}^{k} M_i) + \gamma(T \cap \bigcup_{i=1}^{k} M_i) \geq \gamma(T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i) + \sum_{i=1}^{k} \gamma(T \cap M_i).$$

S využitím σ-subaditivity γ odtiaľ plynie

$$\gamma T \geq \gamma(T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i) + \gamma(T \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i),$$

čo je podmienka (2) pre množinu $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$.

(c) Chceme ukázať, že funkcia γ je σ-aditívna na $\mathfrak{M}(\gamma)$, a teda $\gamma|_{\mathfrak{M}(\gamma)}$ je miera. Nech sú $M_1, M_2, \dots \in \mathfrak{M}(\gamma)$ navzájom disjunktné množiny. Voľbou testovacej množiny $T = M_1 \cup M_2$ a využitím merateľnosti M_1 dostaneme

$$\gamma(M_1 \cup M_2) = \gamma M_1 + \gamma M_2 \,.$$

Funkcia γ je teda na $\mathfrak{M}(\gamma)$ aditívna. Ďalej s využitím aditivity a montónnosti γ dostaneme

$$\sum_{i=1}^{\infty} \gamma M_i = \lim_k \sum_{i=1}^{k} \gamma M_i = \lim_k \gamma(\bigcup_{i=1}^{k} M_i) \leq \lim_k \gamma(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i) = \gamma(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i) \,.$$

Keďže σ-subaditivita γ zaručuje obrátenú nerovnosť $\sum_{i=1}^{\infty} \gamma M_i \geq \gamma(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i)$, je γ σ-aditívna.

(d) Zostáva dokázať úplnosť miery $\gamma|_{\mathfrak{M}(\gamma)}$. Nech $N \subset A$, kde $A \in \mathfrak{M}(\gamma)$, $\gamma A = 0$. Zvoľme testovaciu množinu T. Z monotónnosti γ plynie $\gamma(T \cap N) \leq \gamma N \leq \gamma A = 0$, a teda

$$\gamma T \geq \gamma(T \setminus N) = \gamma(T \setminus N) + \gamma(T \cap N),$$

takže je splnená podmienka (2) pre množinu N, a teda platí $N \in \mathfrak{M}(\gamma)$.