Veta 6. (Regularita Lebesgueovej miery) *Nech je λ Lebesgueova miera v $\mathbb{R}^N$ a nech je $A \subset \mathbb{R}^N$ lebesgueovsky merateľná množina. Potom platí*

$$\begin{aligned}\lambda(A) &= \inf\{\lambda(U) : U \subset \mathbb{R}^N \text{ je otvorená a } A \subset U\} \\ &= \sup\{\lambda(K) : K \subset A \text{ je kompaktná}\}.\end{aligned}$$

Dôkaz. Tvrdenie

$$\lambda(A) = \inf\{\lambda(U) : U \subset \mathbb{R}^N \text{ je otvorená a } A \subset U\} \tag{1}$$

dokážeme len pre $N = 1$ (pre $N > 1$ je dôkaz podobný). Uvedené tvrdenie stačí dokázať za dodatočného predpokladu $\lambda(A) < \infty$, lebo pre $\lambda(A) = \infty$ je zrejmé.

Ak $A \subset U$ a U je otvorená, potom monotónia miery zaručuje $\lambda(A) \le \lambda(U)$. Stačí teda dokázať, že pre každé $\varepsilon > 0$ existuje U otvorená tak, že $A \subset U$ a $\lambda(U) < \lambda(A) + \varepsilon$. Zvoľme teda $\varepsilon > 0$. Z definície čísla $\lambda(A) = \lambda^*(A)$ plynie existencia otvorených intervalov (a_i, b_i), $i = 1, 2, \dots$ takých, že

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i) \qquad \text{a} \qquad \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) < \lambda(A) + \varepsilon.$$

Zrejme stačí položiť $U = \bigcup_i (a_i, b_i)$.

Tvrdenie

$$\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) : K \subset A \text{ je kompaktná}\} \tag{2}$$

dokážeme najprv pre ohraničené (merateľné) množiny A. Zvoľme $\varepsilon > 0$ a kompaktnú množinu C tak, aby $A \subset C$. Z tvrdenia (1) a merateľnosti množiny $C \setminus A$ plynie existencia otvorenej U tak, že

$$C \setminus A \subset U \qquad \text{a} \qquad \lambda(U) < \lambda(C \setminus A) + \varepsilon = \lambda(C) - \lambda(A) + \varepsilon.$$

Položme $K := C \setminus U$. Potom je K kompaktná, $K \subset A$ a z inklúzie $C \subset K \cup U$ plynie

$$\lambda(C) \le \lambda(K \cup U) \le \lambda(K) + \lambda(U) < \lambda(K) + \lambda(C) - \lambda(A) + \varepsilon,$$

odkiaľ $\lambda(A) - \varepsilon < \lambda(K) \le \lambda(A)$, takže platí (2).

Nech je teraz A neohraničená. Môžeme predpokladať $\lambda(A) > 0$ (inak je (2) zrejmá). Zvoľme $\alpha \in (0, \lambda(A))$ a pre $j = 1, 2, \dots$ položme $A_j = \{x \in A : |x| < j\}$. Potom $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ a $A = \bigcup_j A_j$, takže $\lambda(A) = \lim_{j\to\infty} \lambda(A_j)$. Existuje teda k tak, že $\lambda(A_k) > \alpha$. Z tvrdenia (2) pre ohraničenú množinu A_k plynie existencia kompaktnej množiny K tak, že $K \subset A_k$ a $\lambda(K) > \alpha$. Pretože $A_k \subset A$, platí tiež $K \subset A$. Keďže $\lambda(K) > \alpha$ a $\alpha \in (0, \lambda(A))$ bolo ľubovoľné, plynie odtiaľ (2) pre množinu A.