Cvičenia označené hviezdičkou sú dobrovoľné (nebudú obsiahnuté v skúšobných otázkach).

1. Nech χ_A je charakteristická funkcia množiny A ($\chi_A(x) = 1$ pre $x \in A$, $\chi_A(x) = 0$ pre $x \notin A$), $A_1, A_2, \ldots \subset X$,

$$\limsup_{i\to\infty} A_i := \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k, \qquad \liminf_{i\to\infty} A_i := \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} A_k.$$

Ukážte, že platí:

(i) $x \in \limsup A_i$ práve vtedy, keď $x \in A_i$ pre nekonečne indexov i,

(ii) $x \in \liminf A_i$ práve vtedy, keď $x \in A_i$ pre všetky dostatočne veľké indexy i,

(iii) $\liminf A_i \subset \limsup A_i$,

(iv) $\chi_{\limsup A_i} = \limsup \chi_{A_i}$, $\chi_{\liminf A_i} = \liminf \chi_{A_i}$,

(v) (Borel-Cantelliho lema) ak je $(X, \mathcal{S}, \mu)$ priestor s mierou, $A_i \in \mathcal{S}$ a $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) < \infty$, potom $\mu(\limsup A_i) = 0$.

Návod pre (v): Pre každé $j \in \mathbb{N}$ platí

$$\mu\Big(\limsup_{i\to\infty} A_i\Big) \le \mu\Big(\bigcup_{k=j}^{\infty} A_k\Big) \le \sum_{k=j}^{\infty} \mu(A_k).$$

2. Nech je λ Lebesgueova miera v $\mathbb{R}$. Ukážte, že pre jednoprvkovú množinu $M = \{a\}$ platí $\lambda(M) = 0$. Nech ďalej $\mathbb{Q}$ označuje množinu všetkých racionálnych čísel. Zoraďme prvky $\mathbb{Q}$ do postupnosti $q_1, q_2, \ldots$, zvoľme $\varepsilon \in (0, 1)$ a definujme $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (q_i - \varepsilon^i, q_i + \varepsilon^i)$. Ukážte, že

(i) $\lambda\mathbb{Q} = 0$.

(ii) $\lambda A < 2\varepsilon/(1 - \varepsilon)$.

(iii) A je otvorená a hustá v $\mathbb{R}$.

3. Nech je $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neklesajúca, zľava spojitá funkcia. Pre $a \le b$ definujme

$$\nu_F\big([a, b)\big) = F(b) - F(a)$$

a pre $A \subset \mathbb{R}$ položme

$$\mu_F^*(A) = \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty} \nu_F\big([a_i, b_i)\big) \ : \ a_i \le b_i, \ A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i)\Big\}.$$

Vonkajšia miera μ_F^* sa nazýva **Lebesgue-Stieltjesova vonkajšia miera** generovaná funkciou F. Pre $a < b$ platí $\mu_F^*\big([a, b)\big) = F(b) - F(a)$ a σ-algebra $\mathfrak{M}(\mu_F^*)$ obsahuje všetky borelovské množiny. Miera μ_F, ktorá vznikne reštrikciou μ_F^* na $\mathfrak{M}(\mu_F^*)$ sa nazýva **Lebesgue-Stieltjesova miera** generovaná funkciou F (a každá lokálne konečná miera definovaná na borelovských množinách sa dá vygenerovať týmto spôsobom). Pre $a \in \mathbb{R}$ spočítajte $\mu_F(\{a\})$. Ďalej nájdite funkciu F tak, aby všetky podmnožiny $\mathbb{R}$ boli μ_F-merateľné a aby miera $\mu_F(A)$ bola rovná počtu prirodzených čísel obsiahnutých v množine A.

4.* Nech $X = \mathbb{R}^n$, $s \geq 0$, $\varepsilon > 0$. Pre $A \subset X$ definujme

$$\mathcal{H}^s_\varepsilon(A) = \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty}(\operatorname{diam} O_j)^s \,:\, O_j \text{ je otvorená, } \operatorname{diam} O_j < \varepsilon,\ A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} O_j\Big\},$$

kde $\operatorname{diam} O := \sup\{|x-y| : x, y \in O\}$ pre $O \neq \emptyset$, $\operatorname{diam} \emptyset := 0$ a $0^0 := 0$. Ukážte, že platí:

(i) $\mathcal{H}^s_{\varepsilon_1} \leq \mathcal{H}^s_{\varepsilon_2}$ pre $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$.

(ii) $\mathcal{H}^s_*(A) := \lim_{\varepsilon \to 0+} \mathcal{H}^s_\varepsilon(A) = \sup_{\varepsilon > 0} \mathcal{H}^s_\varepsilon(A)$ je vonkajšia miera (tzv. **Hausdorffova s-rozmerná vonkajšia miera**).

(iii) Ak $0 \leq s < t$, potom

$$\mathcal{H}^s_*(A) < \infty \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{H}^t_*(A) = 0,$$

$$\mathcal{H}^t_*(A) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{H}^s_*(A) = \infty,$$

$$\inf\{s > 0 \,:\, \mathcal{H}^s_*(A) = 0\} = \sup\{s \geq 0 \,:\, \mathcal{H}^s_*(A) = \infty\}.$$

Číslo $\dim_H(A) := \inf\{s > 0 \,:\, \mathcal{H}^s_*(A) = 0\}$ sa nazýva **Hausdorffova dimenzia** množiny A.

5. Nech $K_0 = [0,1]$, $K_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$, $K_2 = [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]$, $\ldots$ ($K_j = I^j_1 \cup \ldots \cup I^j_{2^j}$, kde intervaly I^j_{2i-1}, I^j_{2i} vzniknú z intervalu I^{j-1}_i jeho rozdelením na tri rovnaké intervaly a vynechaním stredného intervalu). Množina $C = \bigcap_{j=0}^{\infty} K_j$ sa nazýva **Cantorovo diskontinuum**. Ukážte, že platí:

(i) C je lebesgueovsky merateľná a $\lambda C = 0$.

(ii)* $\dim_H C = \ln 2 / \ln 3$ (môžete bez dôkazu využiť fakt, že systém $\mathfrak{M}(\mathcal{H}^s_*)$ obsahuje všetky borelovské množiny).

6. **Diskontinuum s kladnou mierou.** Nech $K_0 = [0,1]$ a $\varepsilon \in (0,1)$. Položme $K_1 = K_0 \setminus J_0$, kde J_0 je otvorený interval so stredom v bode $1/2$ a dĺžkou $\varepsilon/2$. Potom $K_1 = I^1_1 \cup I^1_2$, kde I^1_i sú uzavreté intervaly dĺžky $(1-\varepsilon/2)/2$. V ďalšom kroku z každého z intervalov I^1_1, I^1_2 vynecháme otvorený interval so stredom v strede dotyčného intervalu a dĺžkou $\varepsilon/8$: zostanú nám štyri uzavreté intervaly $I^2_1, I^2_2, I^2_3, I^2_4$, každý s dĺžkou $(1-\varepsilon/2-\varepsilon/4)/4$, takže miera $K_2 = \bigcup_{i=1}^4 I^2_i$ je $1-\varepsilon/2-\varepsilon/4$. V ďalšom kroku z každého z intervalov I^2_i vynecháme v jeho strede otvorený interval dĺžky $\varepsilon/32$; dostaneme množinu K_3 s mierou $1-\varepsilon/2-\varepsilon/4-\varepsilon/8$. Indukciou získame postupnosť K_j a položíme $C = \bigcap_{j=0}^{\infty} K_j$. Ukážte, že C je uzavretá množina s mierou $1-\varepsilon$, ktorá má nasledujúcu vlastnosť: medzi každými dvoma rôznymi bodmi $x_1, x_2 \in C$ existuje otvorený neprázdny interval J taký, že $J \cap C = \emptyset$.

7. Nech λ je Lebesgueova miera v $\mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ je lebesgueovsky merateľná množina a $\lambda A < \infty$. Pomocou Vety 6 ukážte, že pre každé $\varepsilon > 0$ existuje otvorená množina $U \subset \mathbb{R}^n$ a kompaktná množina $K \subset \mathbb{R}^n$ tak, že $K \subset A \subset U$ a $\lambda(U \setminus K) < \varepsilon$. Platí toto tvrdenie aj bez predpokladu $\lambda A < \infty$?