Cvičenia označené hviezdičkou sú dobrovoľné (nebudú obsiahnuté v skúšobných otázkach).

1. Nech $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je priestor s mierou, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Ukážte, že f je merateľná práve vtedy, keď pre každé $q \in \mathbb{Q}$ platí $\{x \in X : f(x) > q\} \in \mathcal{S}$.

2. Nech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je monotónna funkcia (nerastúca alebo neklesajúca). Ukážte, že f je borelovsky merateľná.

3. Nech je $(X, \mathcal{S}, \mu)$ priestor s mierou, $f : X \to \mathbb{R}$. S použitím Vety 7 ukážte, že

$$\begin{aligned} f \text{ je merateľná} \quad &\iff \quad \text{funkcie } f^+ = \max\{f, 0\} \text{ a } f^- = \max\{-f, 0\} \text{ sú merateľné} \\ &\iff \quad \text{pre každú } g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ spojitú je funkcia } h : X \to \mathbb{R} : x \mapsto g(f(x)) \text{ merateľná.} \end{aligned}$$

4. Nech $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je priestor s úplnou mierou a $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ je merateľná. Ukážte, že ak $f(x) = g(x)$ s.v., potom je g merateľná.

5. Nech $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je priestor s úplnou mierou a $f, f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $f_k(x) \to f(x)$ pre skoro všetky $x \in X$. Ukážte, že ak sú f_k merateľné, potom je aj f merateľná.

6. * Ukážte, že existuje neborelovská podmnožina A Cantorovho diskontinua C. Keďže C je lebesgueovsky merateľná množina s nulovou mierou a Lebesgueova miera je úplná, je A lebesgueovsky merateľná množina, ktorá nie je borelovská.
   Návod: Nech $f : [0,1] \to [0,1]$ je Cantorova funkcia. Definujme funkciu $\kappa : [0,1] \to [0,1]$ nasledovne:

$$\kappa(y) := \inf\{x \in [0,1] : f(x) = y\}.$$

   Funkcia κ zobrazuje $[0,1]$ do C a $f(\kappa(y)) = y$ pre každé $y \in [0,1]$ (dokážte). Funkcia κ je rastúca (dokážte), a teda borelovsky merateľná (množiny tvaru $\{x : \kappa(x) > \alpha\}$ sú intervaly, a teda borelovské množiny). Nech M je lebesgueovsky nemerateľná podmnožina $[0,1]$ a $A := \kappa(M) \subset C$. Keby bola A borelovská, potom by $M = \kappa^{-1}(A)$ musela byť merateľná, čo je spor. Množina A má teda požadované vlastnosti.