1. Nech $g \in \mathcal{L}^* = \mathcal{L}^*(X, \mathcal{S}, \mu)$ a $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ je merateľná, $f = g$ s.v. Ukážte, že potom $f \in \mathcal{L}^*$ a $\int_X f\, d\mu = \int_X g\, d\mu$. Ukážte tiež, že predpoklad merateľnosti f je automaticky splnený, pokiaľ je miera μ úplná.

2. Nech je $f \in \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \mu)$. Ukážte nasledujúce tvrdenia:
   (i) Ak je f nezáporná a $\alpha > 0$ potom $\mu\{x : f(x) \geq \alpha\} \leq \frac{1}{\alpha} \int_X f\, d\mu$.
   (ii) Ak je f nezáporná a $\int_X f\, d\mu = 0$, potom $f = 0$ s.v.
   (iii) Ak $\int_E f\, d\mu = 0$ pre každú $E \in \mathcal{S}$, potom $f = 0$ s.v.

3. Nech sú $g, h \in \mathcal{L}^1$, f merateľná, $g \leq f \leq h$. Potom $f \in \mathcal{L}^1$ a $\int_X g\, d\mu \leq \int_X f\, d\mu \leq \int_X h\, d\mu$. Dokážte. Platí toto tvrdenie aj v prípade, keď $\mathcal{L}^1$ zmeníme na $\mathcal{L}^*$?

4. Ukážte, že rovnosť $\int_X (f+g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu$ z Vety 12(ii) platí aj pre $f, g \in \mathcal{L}^*$, pokiaľ má súčet integrálov na pravej strane tejto rovnosti zmysel.

5. Použite Leviho resp. Lebesgueovu vetu na dôkaz nasledujúcich tvrdení:
$$\lim_{k\to\infty} \int_0^\infty \frac{x^k}{1+x^{2k}}\, dx = 0, \qquad \lim_{a\to 0} \int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{e^x - 1}\, dx = 0,$$
$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{e^x-1}\, dx = \sum_{k=1}^\infty \frac{a}{a^2+k^2}.$$
Návod pre posledné tvrdenie: $\frac{1}{1-e^{-x}} = 1 + e^{-x} + e^{-2x} + \ldots$.

6. Nech je $(X, \mathcal{S}, \mu)$ priestor s mierou, $f \geq 0$ je merateľná a $\mu_f(E) := \int_E f\, d\mu$ pre $E \in \mathcal{S}$. Ukážte, že $(X, \mathcal{S}, \mu_f)$ je priestor s mierou (μ_f sa nazýva **miera s hustotou** f). (Návod: Na dôkaz σ-aditivity použite Leviho vetu pre funkcie $f\chi_k$, kde χ_k je charakteristická funkcia množiny $\bigcup_{j=1}^k A_j$.)

7. Nech $F(a) = \int_0^1 x^a\, dx$ pre $a > -1$. Ukážte, že $F''(a) = \int_0^1 x^a (\ln x)^2\, dx = 2/(a+1)^3$.

8. Pre $a > 0$ pevné a $b \in \mathbb{R}$ definujme $F(b) := \int_0^\infty e^{-ax^2} \cos(bx)\, dx$. Ukážte, že F je diferencovateľná, pomocou derivovania podľa parametra a integrovania per partes ukážte rovnosť $F'(b) = (-b/2a)F(b)$ a riešením tejto diferenciálnej rovnice ukážte $F(b) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-b^2/4a}$.

9. Nech $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je priestor s mierou, $P \subset \mathbb{R}^n$, $a \in P$. Nech má funkcia $f : P \times X \to \mathbb{R}$ nasledujúce vlastnosti:
   (i) $f(\cdot, x) : P \to \mathbb{R}$ je spojitá v bode a pre s.v. $x \in X$,
   (ii) $f(t, \cdot) : X \to \mathbb{R}$ je merateľná pre všetky $t \in P$,
   (iii) existuje $g \in \mathcal{L}^1(X)$ a nulová množina $N \in \mathcal{S}$ tak, že $|f(t,x)| \leq g(x)$ pre $x \in X \setminus N$.

   Ukážte, že potom je $f(t, \cdot) \in \mathcal{L}^1(X)$ pre každé $t \in P$ a funkcia $F : P \to \mathbb{R} : t \mapsto \int_X f(t, \cdot)\, d\mu$ je spojitá v bode a. (Návod: Pre $t_k \to a$ použite na postupnosť $f_k(x) := f(t_k, x)$ Lebesgueovu vetu.) Použite ďalej toto tvrdenie na dôkaz spojitosti funkcie $F : (2, \infty) \to \mathbb{R} : \alpha \mapsto \int_0^\infty x/(2 + x^\alpha)\, dx$.

10. Pre $t \in (-1, 1)$ a $x \in (0, 1)$ položme
$$f(t,x) = \begin{cases} 1 & \text{ak } x < |t|, \\ 0 & \text{inak}, \end{cases}$$
a nech $F(t) = \int_0^1 f(t,x)\, dx$. Ukážte, že pre pevné t platí $\partial f/\partial t(t,x) = 0$ pre skoro všetky x, ale $F'(0)$ neexistuje. Ktorý z predpokladov Vety 15 nie je splnený?

11. Pre $t > 0$ spočítajte $\int_0^\infty x^2 e^{-tx^2}\, dx$. Návod: Voľte $f(t,x) = -e^{-tx^2}$ a použite Vetu 15.